

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

КОЛИВАННЯ СТЕПЕНЕВО-НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА, СПРИЧИНЕНІ СИЛОВИМ ІМПУЛЬСОМ

Розглянуто коливання осцилятора зі степеневою характеристикою пружності при дії миттєво прикладеної сталої сили (ступінчастого імпульсу) та сили обмеженої тривалості дії (прямокутного імпульсу). Одержано аналітичні розв'язки задачі Коші для нелінійного диференціального рівняння другого порядку. Вони виражені через спеціальні періодичні Атеб-функції. Запропоновано апроксимації цих спеціальних функцій, які ґрунтуються на тригонометричній інтерполяції. Показано, що коефіцієнт динамічності осцилятора залежить від показника нелінійності і попадає в інтервал $(1; e)$, де e – основа натурального логарифма. Він більше двох при м'якій характеристиці пружності і менший двох – у випадку жорсткої характеристики. Встановлено тривалості дії імпульсу, при яких амплітуди вільних коливань розвантаженого осцилятора мають екстремальні значення. Ці тривалості залежать не тільки від маси і жорсткості пружного осцилятора, а також від величини миттєво прикладеної сили. Наведено приклади розрахунків, які ілюструють можливості викладеної теорії.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, степенева характеристика пружності, імпульсне навантаження, коефіцієнт динамічності, періодичні Атеб-функції та їх апроксимація.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

КОЛЕБАНИЯ СТЕПЕННО-НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА, ВЫЗВАННЫЕ СИЛОВЫМ ИМПУЛЬСОМ

Рассмотрены колебания осциллятора со степенной характеристикой упругости при действии мгновенно приложенной постоянной силы (ступенчатого импульса) и силы ограниченной продолжительности действия (прямоугольного импульса). Получены аналитические решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Они выражены через специальные периодические Атеб-функции. Предложены аппроксимации этих специальных функций, которые основаны на тригонометрической интерполяции. Показано, что коэффициент динамичности осциллятора зависит от показателя нелинейности и попадает в интервал $(1; e)$, где e – основание натурального логарифма. Он больше двух при мягкой характеристике упругости и меньше двух – в случае жёсткой характеристики. Установлены продолжительности действия импульса, при которых амплитуды свободных колебаний разгруженного осциллятора имеют экстремальные значения. Эти продолжительности зависят не только от массы и жёсткости упругого осциллятора, а также и от величины мгновенно приложенной силы. Приведены примеры расчётов, которые иллюстрируют возможности изложенной теории.

Ключевые слова: нелинейный осциллятор, степенная характеристика упругости, импульсное нагружение, коэффициент динамичности, периодические Атеб-функции.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

VIBRATIONS OF POWER NONLINEAR OSCILLATOR CAUSED BY FORCE PULSE

Vibrations of an oscillator with power elasticity characteristic under the influence of an instantaneously applied constant force (step-function signal) and a force of limited duration (rectangular pulse) are studied. The analytical solutions of the Cauchy problem for the nonlinear second order differential equation are obtained. The solutions are expressed in terms of special periodic Ateb-functions. The approximations of these special functions based on trigonometric interpolation are presented. The oscillator dynamicity factor is shown to depend on the power of the nonlinearity and belong to the interval $(1; e)$, e being the base of the natural logarithm. The factor is greater than two for a mild elasticity characteristic and is less than two for a rigid one. The pulse durations causing extreme values of the amplitudes of free vibrations of an unloaded oscillator are determined. These durations depend on the value of the instantaneously applied force as well as on the mass and rigidity of the elastic oscillator. The computation examples illustrating the theory proposed are presented.

Key words: nonlinear oscillator, power elasticity characteristic, pulse load, dynamicity factor, periodic Ateb-functions.

Вступ. Вивчення нелінійних коливань механічних систем відносяться до актуальних проблем. Незважаючи на порівняно тривалу історію і значні досягнення в цій галузі механіки [1], дослідженню нелінійних коливань приділяється і тепер значна увага. Не зупиняючись на численних публікаціях за цією тематикою у вигляді наукових статей, відзначимо лише монографічні видання останніх років українських вчених [2 – 5], де є відповідні літературні огляди та аналіз сучасного стану проблеми. Із зарубіжних публікацій виділимо огляд [6], у якому йдеться про роботи з нелінійних коливань механічних систем змінної маси. Рух осциляторів змінної маси, за наявності сухого тертя, розглядали також в [7, 8]. Мотивом сучасних досліджень нелінійних коливань служить їх роль в техніці та технологіях, адже вони можуть спричинити руйнування елементів конструкцій або спричинити передчасну втрату їх працездатності. Вивчення закономірностей руху нелінійних осциляторів потрібне також для розробки ефективних способів віброзахисту операторів машин, способів підресорювання транспортних засобів та інше.

На сьогодні найбільш повно вивчено вільні та збудені періодичні нелінійні коливання і значно менше коливання, спричинені силовим імпульсним та ударним навантаженнями. Виходячи з цього, тут поставлена відповідна мета роботи.

Метою статті є виведення та апробація формул для розрахунку руху степенево-нелінійного осцилятора при дії силового імпульсного навантаження. Ставиться завдання, спираючись на аналітичні розв'язки, дослідити основні закономірності руху, спричиненого ступінчастим і прямокутним імпульсами.

Засобом досягнення поставленої мети вибрано метод припасовування розв'язків диференціального рівняння руху з використанням *періодичних Атеб-функцій*.

Постановка задач та їх розв'язки.

1. Рух осцилятора при дії миттєво прикладеної сили. Переміщення осцилятора $x(t)$ у часі t описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c|x|^\nu \operatorname{sign}(x) = PH(t). \quad (1)$$

Тут m – рухома зосереджена маса; c – характеристика жорсткості; ν – показник нелінійності ($\nu > 0$); P – величина прикладеної сили; $H(t)$ – *одична функція Хевісайда*.

Рівняння (1) доповнюємо нульовими початковими умовами:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Перетворенням $\dot{x} = \vartheta$, $\ddot{x} = \vartheta \frac{d\vartheta}{dx}$ рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$\vartheta \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{P}{m} H(t) - \frac{c}{m} |x|^\nu \operatorname{sign}(x). \quad (3)$$

Оскільки, при $t > 0$: $H(t) = 1$; $\operatorname{sign}(x) = 1$, то проінтегрувавши (3), з урахуванням (2), отримуємо:

$$\vartheta = \pm \sqrt{2 \left(\frac{P}{m} - \frac{c x^\nu}{m(\nu+1)} \right)} x = \pm \sqrt{\frac{2c}{m(\nu+1)}} \cdot \sqrt{x(a^\nu - x^\nu)}. \quad (4)$$

Тут $a = (1+\nu)^{1/\nu} \cdot (P/c)^{1/\nu}$ – максимальне динамічне відхилення системи від положення $x = 0$.

Переміщення осцилятора $x_{\text{ст}}$, при статичному навантаженні осцилятора силою P , дорівнює

$$x_{\text{ст}} = (P/c)^{1/\nu}.$$

Тому коефіцієнт динамічності K_d становить

$$K_d = a/x_{\text{ст}} = (1+\nu)^{1/\nu}. \quad (5)$$

Якщо $\nu = 1$, то $K_d = 2$, що традиційно враховують в динаміці лінійної системи.

У випадку $\nu > 1$ отримуємо $K_d < 2$, тобто для жорсткої пружної характеристики коефіцієнт динамічності менший двох. Граничний перехід в (5) дає:

$$K_d = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (1+\nu)^{1/\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\nu} \ln(1+\nu)} = e^0 = 1.$$

Отже, найменше значення коефіцієнта динамічності дорівнює одиниці.

У випадку $0 \leq \nu < 1$ маємо $K_d > 2$, тобто для м'якої пружної характеристики коефіцієнт динамічності більший двох. Граничне значення K_d становить

$$K_d = \lim_{\nu \rightarrow 0} (1+\nu)^{1/\nu} = e \approx 2,718.$$

Таким чином, коефіцієнт динамічності осцилятора зі степеневою характеристикою пружності задовольняє нерівності:

$$1 \leq K_d \leq e,$$

де e – основа натурального логарифма.

Подальше інтегрування виразу (4), з урахуванням (2), при $\nu > 0$, дає залежність

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(a^\nu - y^\nu)}} = \sqrt{\frac{2c}{m(1+\nu)}} t,$$

якій заміною $y = au^2$, $dy = 2audu$ надаємо вигляд:

$$\int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^{2\nu}}} = \omega t. \quad (6)$$

Тут $\omega = a^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\frac{c}{2m(1+\nu)}}$.

Із (6) впливає формула для розрахунку переміщень осцилятора:

$$\frac{x}{a} = Sa^2(2\nu - 1, 1, \nu\omega t), \quad (7)$$

де $Sa^2(2\nu - 1, 1, \nu\omega t)$ – *періодичний Атеб-синус*. Раніше таку функцію використовували в [4, 9 – 11].

Формула (7) узагальнює відомі залежності, наприклад, при $\nu = 1$ вона набуває вигляд:

$$\frac{x}{a} \sin^2\left(\sqrt{\frac{c}{m}} \frac{t}{2}\right),$$

що є відомим результатом в теорії лінійних осциляторів.

У загальному випадку при розрахунках динамічних переміщень осцилятора за формулою (7) доводиться обчислювати значення Атеб-синуса. Для цього в роботі [12] розроблена відповідна апроксимація. Як доповнення до неї, тут пропонуємо додатково два наближення періодичної Атеб-функції, де вона подається і вигляді суми тригонометричних синусів з певними коефіцієнтами.

Першим варіантом такого наближення є:

$$Sa(2\nu - 1, 1, \nu\omega t) \approx \sin\left(\frac{\pi}{2I}\omega t\right) + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{I}\omega t\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{I}\omega t\right) + a_4 \sin\left(\frac{4\pi}{I}\omega t\right), \quad (8)$$

в якому:

$$a_1 = Sa\left(2\nu - 1, 1, \nu \frac{I}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{4}; \quad I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{2\nu}}}; \quad a_2 = Sa\left(2\nu - 1, 1, \nu \frac{I}{4}\right) - \sin \frac{\pi}{8} - a_1 \sin \frac{\pi}{4};$$

$$a_4 = Sa\left(2\nu - 1, 1, \nu \frac{I}{8}\right) - \sin \frac{\pi}{16} - a_1 \sin \frac{\pi}{8} - a_2 \sin \frac{\pi}{4}. \quad (9)$$

Формула (8) стає точною при $\nu = 1$, коли Атеб-синус співпадає з тригонометричним синусом.

Інтеграл I виражається через *гамма-функцію* [13, с. 296]:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2\nu} \frac{\Gamma(1/2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2\nu}\right)}. \quad (10)$$

Тому, для обчислення I можна застосувати таблицю гамма-функції, надруковану в [14, с. 52]. При $\nu = 1$ $I = \pi/2$. Для $\nu > 1$ $I < \pi/2$, а для $0 < \nu < 1$ $I > \pi/2$.

Значимо, що $Sa(2\nu - 1, 1, \nu\omega t) = 0$, коли $\omega t = 0$, і $Sa(2\nu - 1, 1, \nu\omega t) = 1$, коли $\omega t = I$. Це узгоджується з апроксимацією (8).

Другий варіант тригонометричної інтерполяції ґрунтується на рівномірній сітці вузлів. Якщо 2π поділено на $2n+1$ інтервал, де $n = 1, 2, 3, \dots$, то:

$$Sa(2\nu - 1, 1, \nu\omega t) \approx \frac{4}{2n+1} \sum_{k=1}^n b_k \sin\left(\frac{k\pi}{2I}\omega t\right), \quad (11)$$

причому:

$$b_k = \sum_{j=1}^n f_j \sin\left(j \frac{2\pi k}{2n+1}\right); \quad f_j - \text{значення Атеб-синуса в вузлових точках,}$$

$$f_j = \begin{cases} Sa\left(2\nu - 1, 1, \nu \cdot j \frac{4I}{2n+1}\right), & \text{при } j \leq n/2; \\ Sa\left(2\nu - 1, 1, \nu \cdot (2n - 2j + 1) \frac{2I}{2n+1}\right), & \text{при } j > n/2, \end{cases} \quad (12)$$

де I , як і раніше, подається виразом (10).

Щоб отримати інформацію про фактичні похибки формул (8) і (11), розглянемо приклади розрахунків.

Приклад 1. Припустимо, що $\nu = 0,5$. Для такого ν , при $\omega t \in [0; 2]$, Атеб-синус виражається через елементарні функції, а саме:

$$Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \cdot \omega t\right) = 1 - \left(1 - \frac{\omega t}{2}\right)^2. \quad (13)$$

Оскільки $I = 2$, то інтерполяція (8) приймає вигляд:

$$Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \cdot \omega t\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{4}\omega t\right) + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\omega t\right) + a_2 \sin(\pi\omega t) + a_4 \sin(2\pi\omega t), \quad (14)$$

причому:

$$a_1 = 0,75 - \sin \frac{\pi}{4} \approx 4,2893 \cdot 10^{-2}; \quad a_2 = 0,4375 - \sin \frac{\pi}{8} - a_1 \sin \frac{\pi}{4} \approx 2,4487 \cdot 10^{-2};$$

$$a_4 = 0,234375 - \sin \frac{\pi}{16} - a_1 \sin \frac{\pi}{8} - a_2 \sin \frac{\pi}{4} \approx 5,5556 \cdot 10^{-3}.$$

Результати обчислень значень Атеб-синуса для різних ωt записано в табл. 1. Точні значення Sa знайдено за формулою (13), а наближені значення $\tilde{S}a$ – за формулою (14).

Для аналізу похибок інтерполяції (11) прийняли $n = 6$, тобто розбили 2π на 13 інтервалів. Тоді, згідно з (11):

$$Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \omega t\right) \approx \frac{4}{13} \sum_{k=1}^6 b_k \sin\left(\frac{k\pi}{4} \omega t\right), \quad (15)$$

причому:

$$b_k = \sum_{j=1}^6 f_j \sin\left(j \cdot \frac{2\pi k}{13}\right), \quad (16)$$

$$f_j = \begin{cases} Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \cdot j \cdot \frac{8}{13}\right), & \text{при } j \leq 3; \\ Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \cdot (13-2j) \cdot \frac{4}{13}\right), & \text{при } j > 3. \end{cases} \quad (17)$$

Враховуючи (13) і (17), маємо:

$$f_1 \approx 0,5207; \quad f_2 \approx 0,8521; \quad f_3 \approx 0,9941; \quad f_4 \approx 0,9467; \quad f_5 \approx 0,7101; \quad f_6 \approx 0,2840.$$

Для цих значень Атеб-функції в вузлових точках формула (16) дає:

$$b_1 \approx 3,3541; \quad b_2 \approx -1,5236 \cdot 10^{-3}; \quad b_3 \approx 0,1241; \quad b_4 \approx -4,0333 \cdot 10^{-3}; \quad b_5 \approx 2,6514 \cdot 10^{-2}; \quad b_6 \approx -9,2619 \cdot 10^{-3}.$$

Наближені Sa_* , обчислені за формулою (15), теж записано до табл. 1

Таблиця 1 – Точні та апроксимовані значення $Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \omega t\right)$

ωt	$10Sa$	$10\tilde{S}a$	$10Sa_*$	ωt	$10Sa$	$10\tilde{S}a$	$10Sa_*$
0,0	0,00	0,00	0,00	1,2	8,40	8,41	8,41
0,2	1,90	1,89	1,81	1,4	9,09	9,06	9,08
0,4	3,60	3,61	3,54	1,6	9,60	9,50	9,57
0,6	5,10	5,09	5,10	1,8	9,90	9,81	9,89
0,8	6,40	6,38	6,43	2,0	10,00	10,00	10,02
1,0	7,50	7,50	7,53				

Як бачимо, абсолютні похибки обох наближень не суттєві. Апроксимація (14) дає більш точні результати при $\omega t \leq 1$, а апроксимація (15) – більш точні при $\omega t \rightarrow 1$.

Приклад 2. Збільшимо в десять разів значення параметра ν , що задавали в попередньому прикладі, тобто прийемо $\nu = 5$, і використаємо таблицю значень $Sa(5, 1, 3\eta)$, надруковану в [15]. У цьому випадку:

$$I \approx 1,21433; \quad Sa\left(5, 1, 3 \cdot \frac{I}{2}\right) \approx 0,605; \quad Sa\left(5, 1, 3 \cdot \frac{I}{4}\right) \approx 0,303; \quad Sa\left(5, 1, 3 \cdot \frac{I}{8}\right) \approx 0,1518.$$

Тому, після обчислення значень a_1, a_2, a_4 за формулами (9), отримуємо наступне наближення:

$$Sa(5, 1, 3 \cdot \omega t) \approx \sin(1,2935\omega t) - 0,1021 \sin(2,5871\omega t) - 0,0075 \cdot \sin(5,1742\omega t) + 0,0011 \sin(10,3484\omega t).$$

Провівши інтерполяцію табличних даних [15], згідно з (12), одержуємо:

$$f_1 \approx 0,3734; \quad f_2 \approx 0,7382; \quad f_3 \approx 0,9864; \quad f_4 \approx 0,8913; \quad f_5 \approx 0,5591; \quad f_6 \approx 0,1865.$$

Далі за формулою (16) знаходимо:

$$b_1 \approx 3,0090; \quad b_2 \approx 8,5638 \cdot 10^{-4}; \quad b_3 \approx -0,2054; \quad b_4 \approx -1,2715 \cdot 10^{-3}; \quad b_5 \approx 2,7835 \cdot 10^{-2}; \quad b_6 \approx 4,5078 \cdot 10^{-3}.$$

В результаті інтерполяцію Атеб-синуса подаємо виразом:

$$Sa(5, 1, 3 \cdot \omega t) \approx \frac{4}{13} \sum_{k=1}^6 b_k \sin\left(\frac{k\pi\omega t}{2,42866}\right). \quad (19)$$

Запозичені з [15] умовно точні та наближені значення Атеб-синуса вказано в табл. 2.

Тут $\tilde{S}a$ – значення Атеб-функції, обчислені за формулою (18), а Sa_* – результати, обчислені за формулою (19).

Таблиця 2 – Точні та апроксимовані значення $Sa(5, 1, 3 \cdot \omega t)$

ωt	$10Sa$	$10\tilde{S}a$	$10Sa_*$	ωt	$10Sa$	$10\tilde{S}a$	$10Sa_*$
0,1	1,00	1,00	1,02	0,7	6,94	6,92	6,93
0,2	2,00	2,00	2,02	0,8	7,85	7,77	7,86
0,3	3,00	2,99	3,01	0,9	8,67	8,52	8,70
0,4	4,00	3,99	3,99	1,0	9,35	9,14	9,37
0,5	4,99	4,99	4,97	1,1	9,81	9,62	9,81
0,6	5,98	5,98	5,96	I	10,00	10,00	9,98

Обидва варіанти інтерполяції дають задовільну точність, що спрощує обчислення задіяної спеціальної функції в інженерних розрахунках, бо для інтерполяції потрібно лише декілька її значень.

Результати обчислень x/a за формулою (7) у вигляді графіків для трьох показників ν зображено на рис. 1.

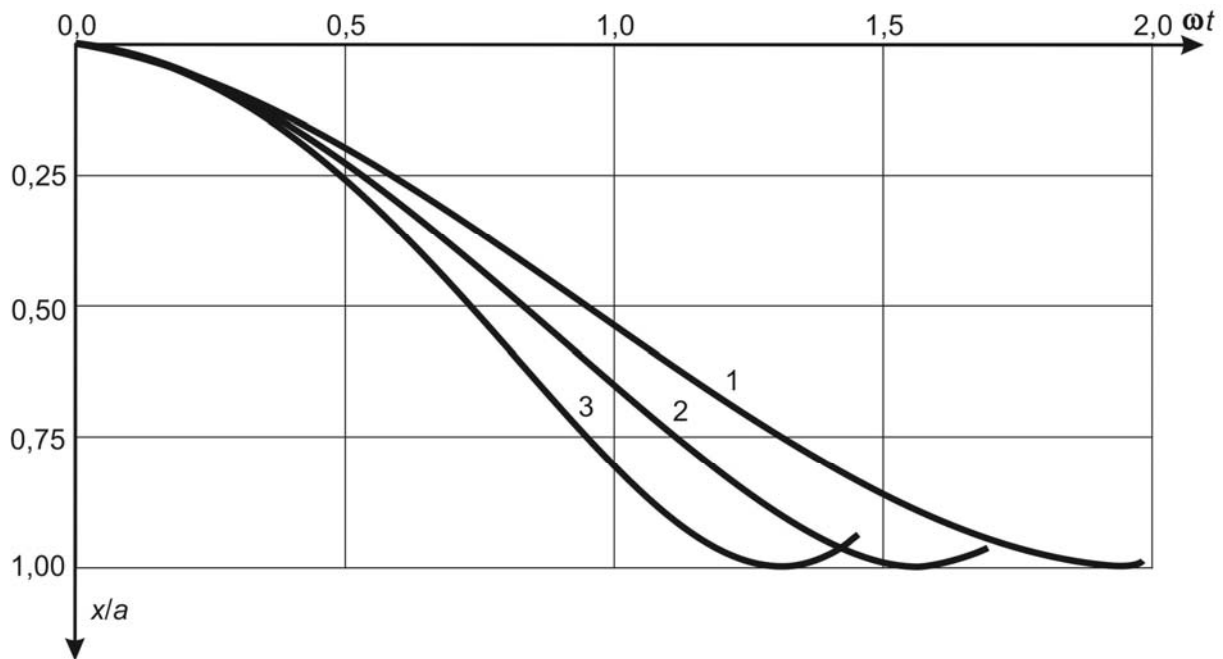


Рис. 1 – Переміщення осцилятора при різних ν : 1 – $\nu = 0,5$; 2 – $\nu = 1$; 3 – $\nu = 2$.

При збільшенні ν скорочується час, коли досягається максимальне відхилення осцилятора від початкового положення $x = 0$.

2. Рух осцилятора, спричинений імпульсом обмеженої тривалості. Його опишемо диференціальним рівнянням

$$m\ddot{x} + c|x|^\nu \operatorname{sign}(x) = P[H(t) - H(t - t_1)], \quad (20)$$

де t_1 – тривалість імпульсу.

При цьому зберігаємо початкові умови (2). Тому на проміжку $t \in [0; t_1]$ має чинність розв'язок (7). У відповідності з цим розв'язком, в момент миттєвого розвантаження осцилятора його переміщення становить

$$x_1 = x(t_1) = aSa^2(2\nu - 1, 1, \nu \cdot \omega t_1). \quad (21)$$

Рух в цей момент часу відбувається зі швидкістю

$$\vartheta_1 = \vartheta(t_1) = \pm 2a\omega \sqrt{\frac{x_1}{a} \left[1 - \left(\frac{x_1}{a} \right)^\nu \right]}.$$

Знак «плюс» маємо при $\omega t_1 < I$ і «мінус» – при $I < \omega t_1 < 2I$. Тому розглянемо спочатку рух осцилятора, коли $\vartheta_1 > 0$, а потім, – коли $\vartheta < 0$.

2.1. При $t > t_1$ рівняння (20) стає однорідним, і його інтегруємо при початкових умовах $x(t_1) = x_1$; $\vartheta(t_1) = \vartheta_1 > 0$. Розвантажений осцилятор продовжує віддалятися від положення $x = 0$. Перший інтеграл рівнян-

ня руху має вигляд:

$$\vartheta = \frac{dx}{dt} = a_* \omega_* \sqrt{1 - (x/a_*)^{\nu+1}}, \quad (22)$$

де $a_* = \lambda a$; $\lambda = \left(\frac{x_1}{a}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}$; $\omega_* = 2\lambda^{\frac{\nu-1}{2}} \omega$.

Подальше інтегрування виразу (22) дає:

$$\int_{x_1}^x \frac{dy}{a_* \sqrt{1 - (y/a_*)^{\nu+1}}} = \omega_* (t - t_1) \quad (23)$$

або

$$\int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}} = \omega_* (t - t_1). \quad (24)$$

Якщо ввести позначення

$$I_* = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}}, \quad (25)$$

то, замість (24), одержимо

$$\int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}} = \xi = I_* - \omega_* (t - t_1). \quad (26)$$

Це співвідношення дає можливість знайти час $t = t_2$, коли вперше зупиниться осцилятор, відхилившись від вихідного положення на $x = a_*$. Із (26) випливає, що:

$$I_* - \omega_* (t_2 - t_1) = 0 \Rightarrow \omega t_2 = \frac{I_*}{\frac{\nu-1}{2}} + \omega t_1. \quad (27)$$

У відповідності з (26), рух осцилятора на проміжку $t \in [t_1, t_2)$ описується виразом:

$$\frac{x}{a} = \lambda Ca \left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2} \xi \right), \quad (28)$$

де $Ca \left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2} \xi \right)$ – періодичний Атеб-косинус [4, 9 – 11].

Далі, при $t > t_2$, осцилятор буде здійснювати вільні коливання відносно положення $x = 0$ з амплітудою $x = a_*$, причому вона буде найбільша ($a_* = a$), коли $\omega t_1 = I$.

2.2. Якщо $I < \omega t_1 < 2I$, то у розвантаженого осцилятора $\vartheta < 0$, бо він повертається у вихідне положення. Тому, замість (23), отримуємо

$$-\int_{x_1}^x \frac{dy}{a_* \sqrt{1 - (y/a_*)^{\nu+1}}} = \omega_* (t - t_1)$$

або, враховуючи, що $x \leq x_1$,

$$\int_{x/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}} = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}} - I_* = \omega_* (t - t_1).$$

Звідки випливає, що

$$\int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}} = \eta = I_* + \omega_* (t - t_1). \quad (29)$$

Час $t = t_2$, коли осцилятор повертається в положення $x = 0$, можна знайти за формулою

$$\omega t_2 = \frac{\gamma - I_*}{\frac{\nu-1}{2}} + \omega t_1, \quad (30)$$

де $\gamma = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}}$. Цей інтеграл виражається через гама-функцію, бо в [13, с. 296]:

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu+1} \frac{\Gamma(1/(\nu+1))}{\Gamma\left(\frac{3+\nu}{2\nu+2}\right)}, \quad (31)$$

тобто γ можна обчислювати за допомогою таблиці гама-функції, що надрукована в [14, с. 53].

У відповідності з (29), на проміжку часу $t \in (t_1, t_2)$ рух розвантаженого осцилятора описується виразом

$$\frac{x}{a} = \lambda Ca\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}\eta\right). \quad (32)$$

Далі, при $t > t_2$ проходять вільні коливання, спричинені в положенні $x = 0$ початковою швидкістю:

$$v_0 = -a_* \omega_* = -a^{\nu/2} \sqrt{\frac{2x_1 c}{m(\nu+1)}}.$$

Якщо розвантаження осцилятора відбулося так, що $x_1 = 0$, то $v_0 = 0$, і вільних коливань не буде. Після розвантаження осцилятор буде знаходитись в стані спокою. Такий стан за формулою (21) настає, коли $\omega t_1 = 2I$.

Щоб проводити розрахунки переміщень розвантаженого осцилятора за формулами (28) і (32), потрібне значення інтеграла I_* . Тому окремо зупинимось на цьому питанні.

Для обчислення інтеграла (25) можна застосувати різні способи. Розглянемо деякі з них, виключаючи найпростіші випадки $\nu = 0$ і $\nu = 1$, коли I_* виражається через елементарні функції.

Перш за все звернемо увагу на залежність, що випливає з (25):

$$\frac{x_1}{a_*} = Ca\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}I_*\right).$$

Тут $Ca\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}I_*\right)$ – періодичний Атеб-косинус. За наявності таблиці цієї спеціальної функції, методом лінійної інтерполяції не складно наближено знайти аргумент I_* , якому відповідає задане x_1/a_* . Але реалізація цього способу ускладнюється відсутністю відповідних таблиць.

Для деяких цілих ν , наприклад, $\nu = 2$ або $\nu = 3$, інтеграл (25) виражається через затабульований неповний еліптичний інтеграл першого роду. Тоді для обчислення I_* можна скористатися відомими таблицями.

Для інших ν треба прийняти до уваги, що здебільшого відношення x_1/a_* близьке до одиниці. Виходячи з цього, замінимо u на $1-\varepsilon$ і при $\nu > 1,6$ використаємо часткову суму ряду:

$$1-u^{\nu+1} = 1-(1-\varepsilon)^{\nu+1} \approx (\nu+1)\varepsilon \left[1 - \frac{\nu}{2}\varepsilon + \frac{\nu(\nu-1)}{6}\varepsilon^2\right].$$

Тоді:

$$I_* \approx \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} \int_0^{1-x_1/a_*} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon \left(1 - \frac{\nu}{2}\varepsilon + \frac{\nu(\nu-1)}{6}\varepsilon^2\right)}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\nu(\nu^2-1)}} \int_0^{1-x_1/a_*} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon \left[(\varepsilon-\alpha)^2 + \beta^2\right]}}. \quad (33)$$

$$\text{Тут } \alpha = \frac{3}{2(\nu-1)}; \quad \beta^2 = \frac{3}{\nu-1} \left(\frac{2}{\nu} - \frac{3}{4(\nu-1)}\right).$$

Інтеграл в (33) зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду, а саме [16, с. 242]:

$$I_* \approx \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\nu(\nu^2-1)}p} F\left(2\arctg \sqrt{\frac{1-x_1/a_*}{p}}, \sqrt{\frac{p+\alpha}{2p}}\right), \quad (34)$$

де $p = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Отже, при $\nu > 1,6$, значення I_* можна знайти за допомогою таблиць $F(\varphi, k)$, що надруковані в [14, с. 101].

У випадку довільних $\nu > 0$ наближене обчислення I_* найбільш просто проводити з використанням формули Сімпсона. У цей спосіб:

$$I_* = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\nu(\nu+1)}} \arcsin \sqrt{\frac{\nu h}{2}} + \delta(\nu, h), \quad (35)$$

причому

$$\delta(\nu, h) = \int_0^h \left(\frac{1}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^{\nu+1}}} - \frac{1}{\sqrt{(\nu+1)\varepsilon\left(1-\frac{\nu}{2}\varepsilon\right)}} \right) d\varepsilon \approx$$

$$\approx \frac{h}{6} \left[\frac{4}{\sqrt{1-\left(1-\frac{h}{2}\right)^{\nu+1}}} - \frac{4}{\sqrt{(\nu+1)\frac{h}{2}\left(1-\frac{\nu h}{4}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1-h)^{\nu+1}}} - \frac{1}{\sqrt{(\nu+1)h\left(1-\frac{\nu h}{2}\right)}} \right],$$

де $h = 1 - x_1/a_*$; $\nu h < 2$.

З метою перевірки точності формули (35), проведемо обчислення трьома способами значення I_* при $\nu = 5$, $h = 0,3$. Згідно з [13, с. 133], маємо:

$$I_* = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} F(\varphi, \sin 15^\circ), \quad \varphi = \arccos \frac{(\sqrt{3}+1)(x_1/a_*)^2 - 1}{(\sqrt{3}-1)(x_1/a_*)^2 + 1} \approx 75,565^\circ.$$

З таблиці [14, с. 101] знаходимо: $F(\varphi, \sin 15^\circ) \approx 1,3375$; $I_* \approx 0,508$. Розрахунок за формулою (35) дає:

$$I_* \approx 0,541 - 0,0346 \approx 0,506,$$

що не суттєво відрізняється від попереднього результату.

Якщо користуватися формулою (34), то

$$\alpha = 0,375, \quad \beta^2 \approx 0,1594, \quad p \approx 0,5477, \quad 2\arctg(\sqrt{h/p}) \approx 73,01^\circ, \quad \sqrt{(p+\alpha)/(2p)} \approx \sin 66,606^\circ.$$

Подвійною інтерполяцією в [14, с. 103] одержуємо $F(73,01^\circ, \sin 66,606^\circ) \approx 1,6677$. Підстановка цього значення еліптичного інтеграла в (34) дає $I_* \approx 0,504$.

Як бачимо, три способи розрахунку дають близькі результати, причому формула (35) не потребує використання таблиць еліптичного інтеграла. Розглянемо приклади, пов'язані з аналізом руху осцилятора після його розвантаження.

Приклад 3. Обчислимо амплітуду вільних коливань і час, коли буде перша зупинка осцилятора з кубічною характеристикою пружності ($\nu = 3$), якщо його розвантаження відбувається при $\omega t_1 = 0,7$.

Для такої тривалості імпульсу, користуючись табл. 2 за формулою (21) одержуємо $x_1/a \approx 0,482$. Далі знаходимо $\lambda = \sqrt[4]{0,482} \approx 0,833$. Отже, амплітуда вільних коливань $a_* \approx 0,833a$, де a – максимальне відхилення осцилятора від положення $x = 0$, коли $\omega t_1 = I \approx 1,21433$. Щоб знайти час першої зупинки осцилятора t_2 за формулою (27), обчислимо значення I_* . Підставивши $\nu = 3$, $h = 1 - x_1/(\lambda a) \approx 0,421$ в формулу (35), отримуємо: $I_* \approx 0,724$. Для $\nu = 3$ обчислення I_* можна проводити і за допомогою таблиць *неповного еліптичного інтеграла першого роду*, бо [14, с. 96]:

$$I_* = \int_{0,579}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F(\varphi, \sin 45^\circ), \quad \varphi = \arccos 0,579 \approx 54,62^\circ.$$

Провівши лінійну інтерполяцію табличних даних в [14, с. 102], одержуємо:

$$F(\varphi, \sin 45^\circ) \approx 1,0257, \quad I_* \approx 0,725,$$

що близьке до попереднього результату. Підставивши знайдене I_* в формулу (27) одержуємо $\omega t_2 = 1,135$ або $t_2/t_1 = 1,621$.

Приклад 4. Обчислимо час, коли осцилятор з кубічною характеристикою пружності повернеться у вихідне положення $x = 0$ при тривалості прямокутного імпульсу $\omega t_1 = 1,529 > I$.

Щоб знайти x_1/a , прийmemo до уваги, що $Sa(5, 1, 3 \cdot \omega t) = Sa(5, 1, 3 \cdot (2I - \omega t))$. Тому $Sa(5, 1, 3 \cdot \omega t_1) \approx 0,867$ і за формулою (21) $x_1/a \approx 0,752$. Для цього відношення: $\lambda = \sqrt[4]{0,752} \approx 0,931$, $x_1/a_* \approx x_1/(a\lambda) \approx 0,808$, $h \approx 0,192$. Тоді, згідно з (35) $I_* \approx 0,460$. Оскільки в [14, с. 52]: $\Gamma(1/4) \approx 3,625610$, $\Gamma(3/4) \approx 1,225417$, то у відповідності з (31), $\gamma \approx 1,31103$. Підстановка цих значень інтегралів в (30) дає $\omega t_2 \approx 1,986 < 2I$. Розвантажений

осцилятор повертається в положення $x = 0$ раніше, ніж у випадку дії на нього сталої сили P .

При розрахунках переміщень розвантаженого осцилятора за формулами (28) і (32) потрібно обчислювати значення Ateb-косинуса. Для цього можна використати запропоновані апроксимації Ateb-синуса, якщо прийняти до уваги, що:

$$Ca\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}\xi\right) = Sa\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}(I-\xi)\right).$$

Висновки.

1. Коефіцієнт динамічності нелінійного осцилятора залежить від характеристики його пружності. У випадку жорсткої характеристики він менший двох, а у випадку м'якої характеристики – більший двох.

2. Переміщення осцилятора у часі, спричинені силовим імпульсом, виражаються через періодичні Ateb-функції.

3. Існують такі тривалості дії прямокутного імпульсу, при яких досягаються екстремальні амплітуди вільних коливань розвантаженого осцилятора. Ці тривалості залежать не тільки від власних параметрів осцилятора, а й від величини миттєво прикладеної сили.

Список літератури

1. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний. – Севастополь : Вебер, 2013. – 403 с.
2. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1. Модели, методы, явления. – Москва – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
3. Митропольский Ю. А. Избранные труды в 2-х томах. – Киев : Наукова думка, 2012. – 504 с.
4. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
5. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.
6. Cveticanin L. A Review on dynamics of mass variable system // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6. – № 1. – pp. 56 – 74.
7. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Метод ВБК в расчётах нестационарных колебаний осцилляторов. – Харьков : Мис'кдрук, 2014. – 264 с.
8. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тищенко Л. Н. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Мис'кдрук, 2016. – 264 с.
9. Грицик В. В., Назаркевич М. А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій // Доповіді Національної академії наук України. – 2007. – № 12. – С. 37 – 42.
10. Сокил Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доповіді Національної академії наук України. – 1997. – № 1. – С. 55 – 58.
11. Кузьо І. В., Ванькович Т-Н. М., Зін'ко Я. А. Теоретична механіка. Динаміка. Кн. 1. – Львів : Львівська політехніка, 2012. – 442 с.
12. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про рух осцилятора зі степенною характеристикою пружності // Вібрації в техніці та технологіях. Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2017. – № 3 (86). – С. 34 – 40.
13. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды (элементарные функции). – Москва : Наука, 1981. – 800 с.
14. Янке Е., Эмде Ф., Лёви Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
15. Ольшанський В. П., Бурлака В. В., Сліпченко М. В., Малець О. М. Про коливання істотно нелінійного осцилятора // Механіка та машинобудування. – 2017. – № 1. – С. 6 – 14.
16. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва : Наука, 1962. – 1100 с.

References (transliterated)

1. Larin A. A. *Ocherki istorii razvitiya teorii mekhanicheskikh kolebanii* [Essays on the history of development of mechanical oscillations]. Sevastopol, Veber Publ., 2013. 403 p.
2. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh system. T. 1. Modeli, metody, yavleniya* [Nonlinear dynamics of elastic systems. Vol. 1. Models, methods, phenomena]. Moscow, Izhevsk, Institut komp'uternykh issledovaniy Publ., 2010. 704 p.
3. Mitropol'skiy Yu. A. *Izbrannye trudy v 2-kh tomakh* [Selected works in 2 volumes]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2012. 504 p.
4. Pukach P. Ya. *Yakisni metody doslidzhennya nelineinykh kolyval'nykh system* [Qualitative methods of studying nonlinear oscillatory systems]. Lviv, L'viv's'ka politekhnika Publ., 2014. 288 p.
5. Shatokhin V. M. *Analiz i parametricheskii sintez nelineinykh silovykh peredach mashin* [Analysis and parametric synthesis of nonlinear power car transmissions]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2008. 456 p.
6. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2012, vol. 6, no. 1, pp. 56–74.
7. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. *Metod VBK v raschyetakh nestatsionarnykh kolebanii ostsillyatorov* [The WKB method for computing oscillator nonlinear vibrations]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2014. 264 p.
8. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V., Tishhenko L. N. *Dynamika dysypatyvnykh ostsilyatoriv* [Dissipative oscillators' dynamics]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.
9. Grytsyk V. V., Nazarkevych M. A. Matematychni modeli algorytmiv i realizatsiya Ateb-funktsiy [Mathematical models of algorithms and implementation of Ateb-functions]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of science of Ukraine]. 2007, no. 12, pp. 37–42.
10. Sokil B. I. Pro zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv'yazkiv deyakykh rivnyan', yaki opysuyut' nelineiny kolyvannya odnovymirnykh seredovyshh [On application of Ateb-functions for constructing solutions to some equations describing nonlinear oscillations of one-dimensional media]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of science of Ukraine]. 1997, no. 1, pp. 55–58.
11. Kuz'o I. V., Van'kovych T-N. M., Zin'ko Ya. A. *Teoretychna mekhanika. Dynamika. Kn. 1* [Theoretical mechanics. Dynamics. Book 1]. Lviv, L'viv's'ka politekhnika Publ., 2012. 442 p.
12. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro rukh ostsilyatora zi stepenevoyu kharakterystyky pruzhnosti [On the movement of an oscillator with power elasticity characteristic]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh. Vseykrayins'kyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in technic and technologies. Pan-Ukrainian scientific and technical journal]. Vinnitsa, 2017, no. 3 (86), pp. 34–40.
13. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrally i ryady (elementarnye funktsii)* [Integrals and series (elementary functions)]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.

14. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
15. Ol'shans'kiy V. P., Burlaka V. V., Slipchenko M. V., Malets' O. M. Pro kolyvannya istotno neliniynogo ostsylatora [On vibrations of essentially nonlinear oscillator]. *Mekhanika ta mashynobuduvannya* [Mechanics and mechanical engineering]. 2017, no. 1, pp. 6–14.
16. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]. Moscow, Nauka Publ., 1962. 1100 p.

Надійшла (received) 11.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

АТЕБ-СИНУС У РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ГЕРЦА ПРО УДАР

Розглянута класична задача Г. Герца про пружний удар двох незакріплених твердих тіл, з урахуванням контактних деформацій. Її розв'язок виражено через Атеб-синус, що дало можливість одержати явну аналітичну залежність від часу сили удару та інших параметрів динамічної взаємодії тіл. Для зручності проведення розрахунків складено таблицю задіяної спеціальної функції та запропоновано її апроксимацію елементарними функціями. Наведено числові результати.

Ключові слова: пружний удар, контактні деформації, Атеб-синус, апроксимація.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

АТЕБ-СИНУС В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ГЕРЦА ОБ УДАРЕ

Рассмотрена классическая задача Г. Герца об упругом ударе двух незакрепленных твердых тел, с учетом контактных деформаций. Ее решение выражено через Атеб-синус, что дало возможность получить явную аналитическую зависимость от времени силы удара и других параметров динамического взаимодействия тел. Для удобства проведения расчетов составлено таблицу задействованной специальной функции и предложено ее аппроксимацию элементарными функциями. Приведены численные результаты.

Ключевые слова: упругий удар, контактные деформации, Атеб-синус, аппроксимация.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

ATEB-SINE IN THE SOLUTION OF HERTZ'S PROBLEM OF IMPACT

We consider the classical problem of H. Hertz on the elastic impact of two loose rigid bodies, taking into account the contact deformations. Its solution is expressed through the Ateb-sine, which made it possible to obtain an explicit analytical dependence on the time of the impact force and other parameters of the dynamic interaction of bodies. For convenience of calculations, a table of the involved special function is compiled and its approximation by elementary functions is proposed. Numerical results are given.

Key words: elastic impact, contact deformation, Ateb-sine, approximation.

Вступ. Зусиллями Львівської школи математиків і механіків *теорія Атеб-функцій* набула розвитку при аналітичному розв'язуванні диференціальних рівнянь, які описують динамічні процеси різної природи, зокрема вільні та вимушені коливання нелінійних механічних систем [1 – 5]. Зазначимо, що причиною вимушених коливань там вважали дію періодичних збурюючих сил. Далі виявилось, що Атеб-функції є також зручним засобом математичного моделювання руху нелінійних механічних систем при силових імпульсних навантаженнях [6, 7]. Тут йдеться про можливість подальшого використання вказаних спеціальних функцій у розв'язку задачі пружного удару твердих тіл у постановці *Г. Герца*. Його теорія висвітлена в багатьох публікаціях, зокрема в [8 – 11]. На відміну від інших відомих теорій механічного удару, вона дає можливість визначити максимальне значення сили удару, тривалість ударного імпульсу та інші параметри, які потрібні для оцінки динамічної міцності тіл в умовах інтенсивного короткочасного навантаження. Тому теорія Г. Герца набула подальший розвиток в роботах *С. П. Тимошенко, А. П. Філіпова* та інших дослідників. Її стали використовувати у розрахунках коливань континуальних систем, а саме балок, пластин і оболонок, підданих пружному удару [12, 13]. Стало можливим, з використанням комп'ютерів, обчислювати не тільки переміщення, а і напруження в тонкостінних елементах конструкцій. Вдалося встановити, що коефіцієнт динамічності напружень при локальному ударі відрізняється від коефіцієнта динамічності перемішень [12], і з цим слід рахуватись при проектуванні деталей машин.

© В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський 2018