

References (transliterated)

1. Tatarchuk D. D., Molchanov V. I., Didenko Yu. V., Franchuk A. S. Tonkie dielektricheskie rezonatory millimetrovogo diapazona dlin voln [Thin dielectric resonators of millimeter wavelength range]. *Electronics and Communications*. 2015, vol. 20, no. 6 (89), pp. 6–10.
2. Molchanov V. I., Pashkov V. M., Tatarchuk D. D., Franchuk A. S. Vymiryuvannya NVCh parametriv dielektrychnykh materialiv metodom tonkoho dielektrychnoho rezonatora [Using thin dielectric resonator method for measuring SHF parameters of dielectric materials]. *Electronics and Communications*. 2015, vol. 20, no. 1 (84), pp. 23–26.
3. Tatarchuk D. D., Molchanov V. I., Didenko Yu. V., Franchuk A. S. Fil'try NVCh na osnovi tonkykh dielektrychnykh rezonatoriv [SHF filters based on thin dielectric resonators]. *Electronics and Communications*. 2016, vol. 21, no. 6 (95), pp. 6–9.
4. Il'yinskiy A. S., Kravtsov V. V., Sveshnikov A. G. *Matematicheskie modeli elektrodinamiki : ucheb. posobie dlya vuzov* [Mathematical models of electrodynamics : textbook. for universities]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991. 224 p.
5. Grigor'ev A. D., Yankevich V. B. *Rezonatory i rezonatornye zamedlyayushchie sistemy SVCh : chislennyye metody rascheta i proektirovaniya* [Resonators and resonator microwave deceleration systems : numerical methods of calculation and design]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1984. 248 p.
6. Bezborodov Yu. M., Narytnik T. N., Fedorov V. B. *Fil'try SVCh na dielektricheskikh rezonatorakh* [Microwave filters on dielectric resonators]. Kiev, Tekhnika Publ., 1989. 184 p.
7. Tatarchuk D. D. *Kombinovani struktury NVCh z dielektrychnym rezonansom E – typu : dys. kand. tekhn. nauk 05.27.01* [Combined microwave structures with E – type dielectric resonance: diss. Cand. Tech. Sciences]. Kyiv, 2000. 170 p.

Надійшла (received) 05.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Татарчук Дмитро Дмитрович (Татарчук Дмитрий Дмитриевич, Tatarchuk Dmytro Dmytrovych) – кандидат технічних наук, доцент, Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, м. Київ; тел.: (097) 152-18-61; e-mail: d.tatarchuk@kpi.ua.

Діденко Юрій Вікторович (Диденко Юрий Викторович, Didenko Yuriy Viktorovich) – кандидат технічних наук, старший викладач, Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, м. Київ; тел.: (050) 628-73-23; e-mail: yu.didenko@kpi.ua.

Поправка Анастасія Павлівна (Поправка Анастасия Павловна, Popravka Anastasiya Pavlivna) – магістрант, Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, м. Київ; тел.: (095) 311-03-94; e-mail: anastasiia.popravka@gmail.com.

Браге Ксенія Сергіївна (Браге Ксения Сергеевна, Brage Kseniya Sergijivna) – магістрант, Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, м. Київ; тел.: (050) 863-64-88; e-mail: kseniabrage@gmail.com.

УДК 517 (07)

В. В. ТКАЧЕНКО**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЯМИ**

Предложен численно-аналитический метод исследования многослойных пластин с отверстиями сложной формы. Создано программное обеспечение в рамках системы ПОЛЕ-RL, которое было использовано для исследования прямоугольной трехслойной пластины с крестообразным отверстием. Рассмотрены различные виды граничных условий для исследуемой пластины: свободно опертая пластина со свободным отверстием, свободно опертая пластина со свободно опертым отверстием, жестко заземленная пластина со свободно опертым отверстием и жестко заземленная пластина с жестко заземленным отверстием. Изучено влияние размеров отверстия, граничных условий и степени ортотропии на значение критической нагрузки и построены соответствующие зоны динамической устойчивости (неустойчивости) пластин.

Ключевые слова: динамическая устойчивость, многослойные пластины, пластины с отверстиями, критическая нагрузка, зоны динамической неустойчивости, R – функции.

В. В. ТКАЧЕНКО**ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН З ОТВОРАМИ**

Запропоновано чисельно-аналітичний метод дослідження багатошарових пластин зі складною формою плану. Створено програмне забезпечення в рамках системи ПОЛЕ-RL, що було використано для дослідження прямокутної тришарової пластины з хрестоподібним отвором. Розглянуто різні види граничних умов, такі як вільно оперта пластина з вільним отвором, вільно оперта пластина з вільно опертим отвором, жорстко закріплена пластина з вільно опертим отвором і жорстко закріплена пластина з жорстко закріпленим отвором. Вивчено вплив розмірів отвору, граничних умов і ступеня ортотропії на значення критичного навантаження та побудовані відповідні зони динамічної стійкості (нестійкості) пластини.

Ключові слова: динамічна стійкість, багатошарові пластины, пластины з отворами, критичне навантаження, зони динамічної нестійкості, R – функції.

© В. В. Ткаченко, 2018

V. V. TKACHENKO

INVESTIGATION OF DYNAMIC STABILITY OF MULTILAYER PLATES WITH HOLES

The article proposes a numerically-analytical method for studying laminated plates with a complicated shape of the plan. Due to the application of R-function theory in combination with variational methods the investigation of the motion equation is reduced to studying ordinary differential equation of the Duffing type. The software was created within the framework of the POLE-RL package and tested on the example of a rectangular three-layer plate with a cross-shaped hole. Various types of fastening are considered, such as a free plate with a free hole, a free-standing plate with a free hole, a free-standing plate with a clamped hole, and a clamped plate with a clamped hole. The effect of the hole size, boundary conditions and the degree of orthotropy on the value of the critical load and dynamic stability zones is studied.

Key words: dynamic stability, laminated plates, plates with holes, critical load, zones of dynamic instability, R – functions.

Введение. При проектировании элементов тонкостенных конструкций, моделируемых пластинами, одной из основных проблем является их расчет на устойчивость. Широкое использование композитных материалов в различных областях промышленности, особенно в авиационной и ракетной, повлекло за собой разработку различных методов для расчета на динамическую устойчивость многослойных композитных пластин и оболочек. Решению этой проблемы посвящено огромное количество работ. Обзор существующей литературы представлен в работах [7 – 10] и других. Следует заметить, что большинство работ посвящено исследованию устойчивости многослойных пластин канонической формы. Существенно меньше публикаций посвящено исследованию многослойных пластин с отверстиями. Из обзора статей, в которых проводилось исследование пластин с отверстиями ([7, 9, 10] и другие), можно сделать вывод, что, в основном, исследованы свободно опертые пластины прямоугольной формы со свободными отверстиями.

Создание численно-аналитических, особенно без сеточных (meshless) методов, позволяющих учитывать неоднородное докритическое состояние многослойных пластин и различные способы закрепления отверстий, является все еще актуальной проблемой.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию численно-аналитического метода, базирующегося на совместном использовании теории R – функций и вариационных методов (RFM). Ранее этот метод применялся к пластинам сложной формы со свободными прямоугольными и круглыми отверстиями [3 – 6]. В настоящей работе метод применен к многослойным пластинам с отверстиями сложной формы и разными способами их закрепления.

Постановка задачи. Рассмотрим многослойную тонкую гибкую пластину постоянной толщины $h = \sum_{i=1}^n h_i$,

состоящую из n однородных слоев, в том предположении, что проскальзывания слоев отсутствуют. Предполагается также, что пластина находится под действием усилий в срединной плоскости, определяемых формулой:

$$p = p_0 + p_t \cos \theta t,$$

где p_0 – это статическая часть нагрузки, изменяющаяся пропорционально некоторому параметру λ , а p_t – динамическая часть нагрузки.

Постановка задачи в рамках классической теории базируется на основной гипотезе недеформируемых нормалей, при этом условия равновесия при отсутствии объемных сил имеют следующий вид [1]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \lambda \left(N_x^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (3)$$

где N_x, N_y, N_{xy} – нормальные и касательные усилия в срединной плоскости; N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 – усилия, соответствующие распределению внутренних усилий в срединной плоскости при $\lambda = 1$; M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие и крутящий моменты.

В общем виде, выражения для усилий и моментов определяются равенствами [1]:

$$\begin{aligned} N_x &= C_{11}\varepsilon_x^{(0)} + C_{12}\varepsilon_y^{(0)} + C_{16}\varepsilon_{xy}^{(0)} + K_{11}\chi_x + K_{12}\chi_y + K_{16}\chi_{xy}; \\ N_y &= C_{12}\varepsilon_x^{(0)} + C_{22}\varepsilon_y^{(0)} + C_{26}\varepsilon_{xy}^{(0)} + K_{12}\chi_x + K_{22}\chi_y + K_{26}\chi_{xy}; \\ N_{xy} &= C_{16}\varepsilon_x^{(0)} + C_{26}\varepsilon_y^{(0)} + C_{66}\varepsilon_{xy}^{(0)} + K_{16}\chi_x + K_{26}\chi_y + K_{66}\chi_{xy}; \\ M_x &= K_{11}\varepsilon_x^{(0)} + K_{12}\varepsilon_y^{(0)} + K_{16}\varepsilon_{xy}^{(0)} + D_{11}\chi_x + D_{12}\chi_y + D_{16}\chi_{xy}; \\ M_y &= K_{12}\varepsilon_x^{(0)} + K_{22}\varepsilon_y^{(0)} + K_{26}\varepsilon_{xy}^{(0)} + D_{12}\chi_x + D_{22}\chi_y + D_{26}\chi_{xy}; \\ M_{xy} &= K_{16}\varepsilon_x^{(0)} + K_{26}\varepsilon_y^{(0)} + K_{66}\varepsilon_{xy}^{(0)} + D_{16}\chi_x + D_{26}\chi_y + D_{66}\chi_{xy}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $(C_{ij}, K_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s(1, z, z^2) dz$ – приведенные жесткостные характеристики.

Компоненты деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, \chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ в срединной плоскости выражаются через перемещения формулами:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Здесь u, v, w – перемещения произвольной точки в направлениях осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Если слои пластины симметричны относительно срединной плоскости, то выражения (4) имеют более простой вид, поскольку в этом случае $K_{ij} = 0$ [1].

Уравнения (1 – 3) дополняются соответствующими граничными условиями. При этом будем считать, что на нагруженной части контура, граничные условия имеют вид:

$$N_n = -p, \quad T_n = 0.$$

На ненагруженном контуре пластины могут быть различные виды закреплений.

Метод решения. Первым шагом алгоритма решения задачи о динамической устойчивости многослойных пластин сложной формы, находящихся под действием периодической нагрузки в срединной плоскости, является определение неоднородного докритического состояния пластины. В результате выполнения этого шага определяются усилия N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 , вызванные действиями сжимающих сил, приложенных к контуру пластины. Эта задача сводится к нахождению минимума функционала

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} N_n u_n ds,$$

где $u_n = ul + vm$, а l и m – направляющие косинусы внешней нормали n к границе области; N_n – интенсивность внешнего сжимающего усилия. Минимум функционала находится на множестве функций, удовлетворяющих главным (кинематическим) граничным условиям.

Второй шаг алгоритма предусматривает нахождение критической нагрузки. Для чего используется энергетический метод, согласно которому, задача сводится к задаче на собственные значения, которые определяются из условия минимума следующего функционала:

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[(M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + \lambda \left(N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

Минимизация функционала выполняется на множестве функций, которые удовлетворяют главным граничным условиям для функции прогиба w .

Следующим шагом алгоритма является нахождение частоты колебаний пластины под действием статической нагрузки p_0 . Решение этой задачи также выполняется с помощью метода Рунца в результате минимизации следующего функционала:

$$I = \Pi_{\max} - \Omega_L^2 T_{\max},$$

где T_{\max} – кинетическая энергия пластины,

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_1 (u^2 + v^2 + w^2) d\Omega, \quad m_1 = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_s dz;$$

ρ_s – плотность материала s -го слоя; Π_{\max} – полная потенциальная энергия пластины,

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[(M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + p_0 \left(N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

Для решения задачи о геометрически нелинейных параметрических колебаниях сжатой пластины будем использовать метод, предложенный в работах [4 – 6]. Как показано в этих работах, система нелинейных уравне-

ний (1 – 3) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно времени. При этом ограничимся одномерной аппроксимацией неизвестных функций, то есть прогиб пластины представим в виде

$$w(x, y, t) = y(t)w_1(x, y),$$

а перемещения в срединной плоскости соответственно

$$u(x, y, t) = p(t)u_1(x, y)y(t) + y^2(t) \cdot u_{11}(x, y), \quad v(x, y, t) = p(t)v_1(x, y)y(t) + y^2(t) \cdot v_{11}(x, y),$$

где $w(x, y)$, $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$ – собственные функции, соответствующие основной частоте $\Omega_L = \Omega_1$ пластины, сжатой статической нагрузкой, а $u_{11}(x, y)$, $v_{11}(x, y)$ – функции, являющиеся решениями неоднородной системы уравнений, подобной системе уравнений задачи теории упругости со специальной правой частью [4 – 6].

Тогда система уравнений (1 – 3) сводится к одному уравнению

$$y''(t) + \varepsilon y'(t) + \Omega_L^2(1 + \alpha p_t \cos \theta t + \gamma y^2(t))y(t) = 0. \quad (5)$$

Аналитические выражения для коэффициентов α и γ представлены в работах [4 – 6].

Обозначим выражение $\alpha \cdot p_t = -2k$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$; тогда уравнение (5) примет такой же вид, как в [2]:

$$y''(t) + 2\varepsilon_1 y'(t) + \Omega_L^2((1 - 2k \cos \theta t)y(t) + \gamma y^3(t)) = 0.$$

В случае статического нагружения $p_t = 0$, то есть при $k = 0$, исследование сводится к решению уравнения:

$$y''(t) + \Omega_L^2(y(t) + \gamma y^3(t)) = 0,$$

здесь $\varepsilon = 0$. Применение к последнему уравнению метода Бубнова-Галёркина позволяет получить зависимость амплитуды нелинейных колебаний от отношения $\nu = \omega_N / \Omega_L$ нелинейной частоты к линейной,

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \gamma A^2}.$$

Для построения областей динамической неустойчивости и определения амплитуд колебаний в зонах параметрического резонанса возникает необходимость определения зон динамической неустойчивости системы (ЗДН). Для исследования устойчивости, как показано в [2], достаточно рассмотреть линеаризованное уравнение, то есть при значении $\gamma = 0$:

$$y''(t) + 2\varepsilon_1 y'(t) + \Omega_L^2((1 - 2k \cos \theta t)y(t)) = 0. \quad (6)$$

Известно, что для уравнения (6) (это уравнение Матье), главная область неустойчивости (возле $\theta = 2\Omega_L$) ограничена кривыми [2]:

$$2\Omega_L \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}} \leq \theta \leq 2\Omega_L \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}},$$

где $\Delta = \frac{2\pi\varepsilon_1}{\Omega}$ – это декремент затухания. При $\varepsilon_1 = 0$ имеем

$$\theta_1 = 2\Omega_L \sqrt{1 - k}, \quad \theta_2 = 2\Omega_L \sqrt{1 + k}. \quad (7)$$

В этом интервале возникает главный параметрический резонанс.

Для определения амплитуд затухающих колебаний в зоне главного параметрического резонанса, был использован подход, изложенный В. В. Болотинным в [2]. Тогда зависимость между частотным отношением $\theta/2\Omega_L$ и амплитудой колебаний A принимает вид:

$$A = \frac{2}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\left(\frac{\theta}{2\Omega_L}\right)^2 - 1 \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{\theta}{2\Omega_L}\right)^2} \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}.$$

Тестирование предложенного метода решения. Ранее в работах [3, 4, 6] было проведено тестирование предложенного метода для пластин со свободным круглым отверстием и для параметрических колебаний прямоугольных пластин с различной укладкой слоев. Там же показана эффективность и достоверность этого метода.

В данной работе рассматривается трехслойная пластина (рис. 1) с укладкой слоев $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ и крестообразным отверстием. При этом важно, что отверстие может быть не только свободным, но и свободно опертым или жестко защемленным. Основной целью является исследование влияния закрепления отверстия на динамическую устойчивость пластины.

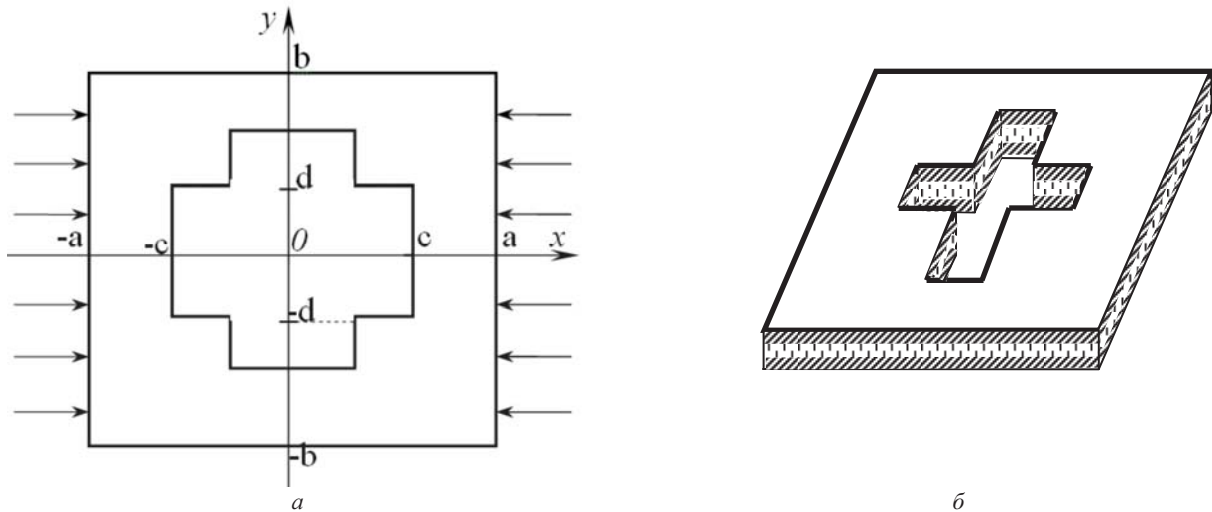


Рис. 1 – Изображение исследуемой пластины: a – срединная плоскость пластины; b – общий вид пластины.

Рассмотрим два варианта степени ортотропии материала, а именно – $\frac{E_1}{E_2} = 3$ и $\frac{E_1}{E_2} = 10$.

Основные геометрические параметры пластины приняты следующими:

$$\frac{a}{b} = 1, \quad \frac{h}{2b} = 0,01,$$

где h – это общая толщина пластинки при равных толщинах всех слоев, а $2b$ – характерный размер пластинки.

Размеры отверстия c и d варьируются.

Рассмотрим следующие 4 типа граничных условий.

I. Свободное опирание по внешнему контуру, отверстие свободно:

$$M_x = 0, N_x = -p, N_{xy} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_1, \partial\Omega_1 : x = \pm \frac{a}{2}; \tag{8}$$

$$w = 0, M_y = 0, u = 0, N_y = 0, (x, y) \in \partial\Omega_2, \partial\Omega_2 : y = \pm \frac{b}{2}; \tag{9}$$

$$M_n = 0, Q_n = 0, N_n = 0, T_n = 0, (x, y) \in \partial\Omega_3, \partial\Omega_3 = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2).$$

II. Свободное опирание по всему контуру.

Выполняются условия (8), а также следующие, на остальном участке контура:

$$w = 0, M_n = 0, N_n = 0, T_n = 0, (x, y) \in \partial\Omega_4, \partial\Omega_4 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1.$$

III тип. Свободное опирание по внешнему контуру, отверстие – жестко закреплено.

Выполняются условия (8 – 9), а на остальном участке контура следующие равенства:

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_3, \partial\Omega_3 = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2).$$

IV тип. Пластина, жёстко защемленная по контуру:

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0, (x, y) \in \partial\Omega, \text{ на всем контуре } \partial\Omega.$$

Согласно методу R – функций (RFM), построим структуры решения для всех случаев закрепления пластины:

$$\text{I тип. } w = \omega_{\text{внешн}} \Phi. \text{ II тип. } w = \omega \Phi. \text{ III тип. } w = \omega \omega_{\text{внутр}} \Phi. \text{ IV тип. } w = \omega^2 \Phi,$$

где Φ – неопределенные компоненты построенных структур решения; $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение границы всей области, которое в данном случае может быть построено равенством

$$\omega(x, y) = \omega_{\text{внешн}} \wedge_0 \omega_{\text{внутр}},$$

где $\omega_{\text{внешн}}(x, y) = (F_1 \wedge_0 F_2)$, $\omega_{\text{внутр}}(x, y) = (F_3 \wedge_0 F_4) \vee_0 (F_5 \wedge_0 F_6)$, $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ – R – операторы [5]:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{x} = -x.$$

Функции $F_i, i = 1 \dots 6$ определяются следующим образом:

$$F_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \geq 0, \quad F_2 = \frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \geq 0, \quad F_3 = \frac{1}{2c}(c^2 - x^2) \geq 0,$$

$$F_4 = \frac{1}{2d}(d^2 - y^2) \geq 0, \quad F_5 = \frac{1}{2d}(d^2 - x^2) \geq 0, \quad F_6 = \frac{1}{2c}(c^2 - y^2) \geq 0.$$

Критическая нагрузка определяется как $P_{кр} = \lambda_{кр} \cdot \frac{E_2 h^3}{4b^2}$, где $\lambda_{кр}$ – безразмерный параметр.

Ранее в [4], для граничных условий первого типа, были получены значение безразмерного параметра $\lambda_{кр}$ для квадратной пластины с жесткостными характеристиками, такими же, как в настоящей работе. Например, в случае $E_1/E_2 = 3$ значение безразмерного параметра для квадратной пластины найдено и составляет 5,43. Таким образом при отверстии, размер которого стремится к нулю, значение безразмерного параметра увеличивается и стремится к значению для квадратной пластины без отверстия. Аналогично, для случая $E_1/E_2 = 10$ критическая нагрузка квадратной пластинки имеет значение $\lambda_{кр} = 11,49$. В данной работе при устремлении крестообразного отверстия к нулю, также значение критической нагрузки устремляется к критической нагрузке квадрата. Что свидетельствует о достоверности полученных результатов и разработанного программного обеспечения. В результате проведения вычислительного эксперимента, связанного с исследованием сходимости при увеличении количества координатных функций, было установлено, что вычисления могут быть выполнены при использовании 14-й степени аппроксимирующего полинома для прогиба $w(x, y)$ и 11-й степени аппроксимирующих полиномов для каждого из перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$, что соответствует 36 координатным функциям для прогиба и 21 координатным функциям для каждого из перемещений.

В табл. 1 представлены значения безразмерного частотного параметра для трехслойной пластинки с разными граничными условиями, различной степени ортотропии и размеров отверстия.

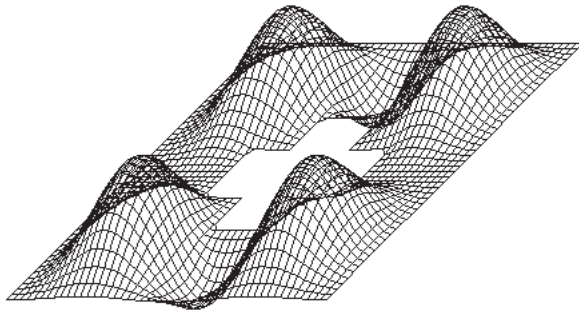
Таблица 1 – Значение безразмерного параметра $\lambda_{кр} = N_{кр}(2b)^2/E_2 h^3$ в зависимости от степени ортотропии и размеров отверстия

гран. усл.	$c/2b$ $d/2b$	$\frac{E_1}{E_2} = 3$					$\frac{E_1}{E_2} = 10$				
		0,1	0,125	0,15	0,175	0,2	0,1	0,125	0,15	0,175	0,2
1 тип	0,05	4,79	4,59	4,44	4,33	4,21	9,29	8,69	8,25	7,91	7,59
	0,075	4,60	4,30	4,10	3,93	3,76	8,73	7,79	7,13	6,62	6,11
	0,1	4,56	4,20	3,96	3,81	3,64	8,60	7,45	6,69	6,18	5,67
2 тип	0,05	28,29	28,69	31,83	33,33	36,35	77,52	78,41	84,32	85,36	89,51
	0,075	27,23	31,94	32,36	35,30	38,31	76,40	82,11	86,84	90,71	93,83
	0,1	27,98	29,17	33,61	36,51	38,78	79,39	81,69	91,35	93,61	95,63
3 тип	0,05	29,47	32,16	34,92	37,91	39,78	80,69	86,49	90,97	94,94	97,40
	0,075	30,73	33,41	36,47	39,22	42,56	84,74	90,20	94,59	98,29	103,18
	0,1	32,44	34,91	37,69	40,85	49,39	90,16	94,80	97,93	100,90	104,68
4 тип	0,05	53,46	57,56	60,99	65,05	68,03	145,55	153,16	158,90	164,92	170,49
	0,075	54,69	58,20	62,36	65,67	70,73	145,21	152,35	159,06	165,42	174,93
	0,1	57,12	59,32	61,76	65,70	69,39	147,83	151,39	154,87	160,79	168,58

С увеличением размеров отверстия, значение критической нагрузки для свободно опертой пластины со свободным отверстием уменьшается. Для трех остальных исследуемых типов граничных условий наблюдается противоположная тенденция. С увеличением размеров отверстия, значение критической нагрузки увеличивается.

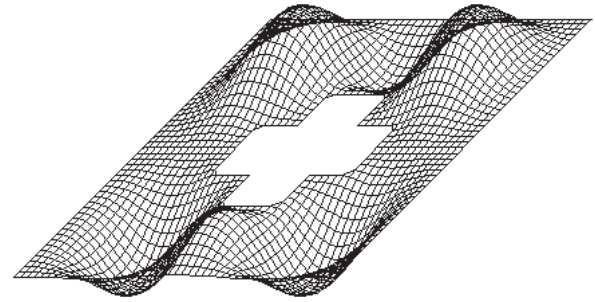
Для любого типа граничных условий значение критической нагрузки пластины для материала, характеризуемого отношением $E_1/E_2 = 10$ выше, чем для такой же пластины с отношением $E_1/E_2 = 3$. Причем, для четвертого типа граничных условий это значение отличается более, чем в два раза.

Если анализировать ситуацию в целом, то наименьшее значение критической нагрузки имеют пластины с граничными условиями первого типа (свободно опертая пластина со свободным отверстием). Для свободно опертой по всему контуру пластины значения критической нагрузки значительно выше. Для свободно опертой по внешнему контуру и жестко защемленной по контуру отверстия пластины значения критической нагрузки немного превосходят результаты, полученные для второго типа граничных условий. И самые большие значения критической нагрузки принимает при четвертом типе граничных условий (жестко защемленная по всему контуру пластина).



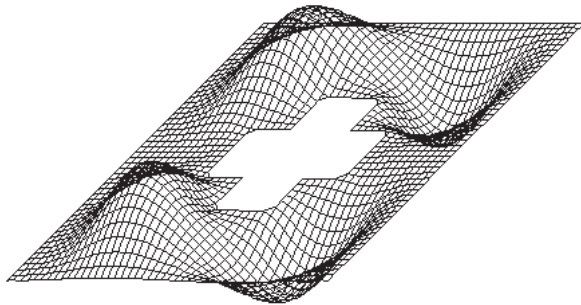
$\Lambda_1 = 0,841$

Рис. 2 – Первая форма колебаний жёстко защемлённой по всему контуру пластины.



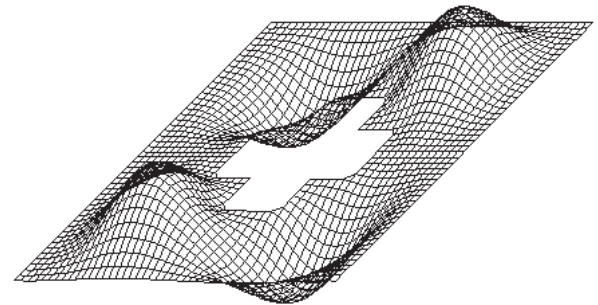
$\Lambda_2 = 0,843$

Рис. 3 – Вторая форма колебаний жёстко защемлённой по всему контуру пластины.



$\Lambda_3 = 0,854$

Рис. 4 – Третья форма колебаний жёстко защемлённой по всему контуру пластины.



$\Lambda_4 = 0,854$

Рис. 5 – Четвёртая форма колебаний жёстко защемлённой по всему контуру пластины.

На рис. 2 – 4 изображены первые четыре формы колебания жёстко защемленной по всему контуру пластины при $c = 0,2$ и $d = 0,075$, и указаны первые частоты Λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), $\Lambda_i = \omega_i(2b)^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$, соответствующие этим формам. Потеря устойчивости происходит по первой форме.

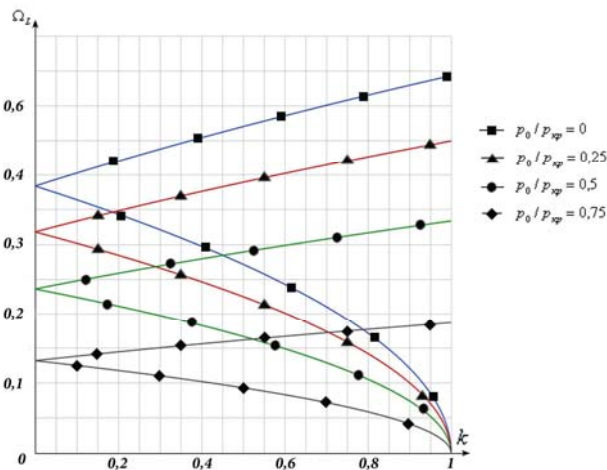


Рис. 6 – ЗДН для свободно опертой по внешнему контуру и жёстко защемлённой по контуру отверстия пластины.

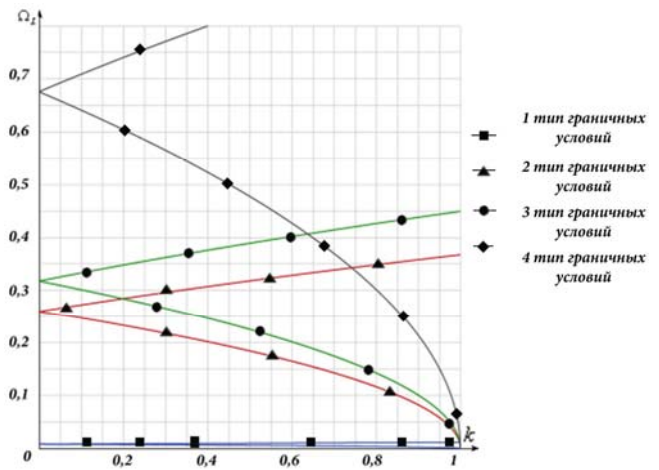


Рис. 7 – ЗДН для различных видов условий закрепления пластины при фиксированных размерах отверстия.

На рис. 6 приведены зоны динамической неустойчивости для свободно опертой по внешнему контуру и жёстко защемленной по контуру отверстия пластины с параметрами выреза $c = 0,15$ и $d = 0,075$ и отношением $E_1 / E_2 = 3$ в зависимости от нагрузки. Чем меньше отношение $p_0 / p_{кр}$, тем выше расположена зона неустойчивости и тем больше площадь самой зоны.

На рис. 7 приведены зоны динамической неустойчивости (ЗДН) для различных видов условий закрепления пластины при фиксированных размерах отверстия ($c = 0,15$ и $d = 0,075$), нагрузке $p_0 / p_{кр} = 0,25$ и $E_1 / E_2 = 3$. Для первого типа граничных условий характерна наименьшая зона динамической неустойчивости (ограничена кривыми, отмеченными квадратами на рис. 7, где на графике в данном масштабе они практически сливаются).

ЗДН для второго и третьего типа граничных условий отличаются не очень существенно. Наибольшая площадь зоны динамической неустойчивости возникает для граничных условий четвертого типа (ограниченная кривыми, отмеченными ромбиками на рис. 7).

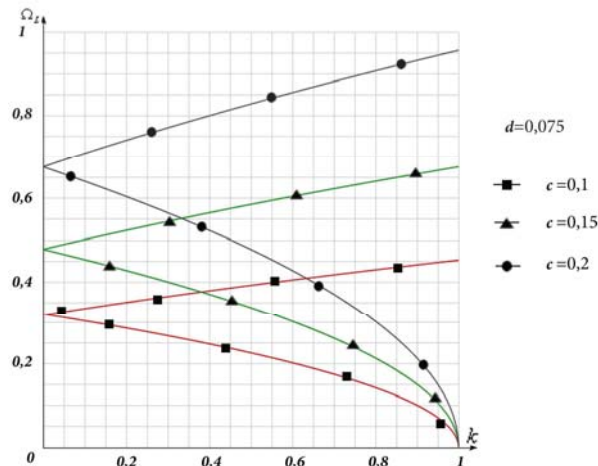


Рис. 8 – ЗДН жёстко защемлённой по всему контуру пластины в зависимости от размера отверстия.

На рис. 8 приведены зоны динамической неустойчивости жёстко защемленной по всему контуру пластины при нагрузке $p_0/p_{кр} = 0,25$ с жесткостным соотношением $E_1/E_2 = 3$ в зависимости от размера отверстия. Очевидно, что с увеличением размера отверстия, увеличивается и зона динамической неустойчивости.

Выводы. В работе предложен метод исследования динамической устойчивости многослойных пластин, основывающийся на теории R – функций и вариационных методах, учитывающий неоднородное напряженное состояние пластины. Найдены значения критической нагрузки для трехслойной пластины с укладкой слоев $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ и отверстием крестообразной формы. Для поставленной задачи построены новые структуры решения и последовательности координатных функций. Исследовано влияние размеров отверстия, степени ортотропии и граничных условий. Построены зоны динамической неустойчивости в зависимости от нагрузки, граничных условий, параметров отверстия и степени ортотропии.

Предложенный метод может быть использован для многослойных пластин не только со сложной формой отверстия, но и со сложной формой внешнего контура.

Список литературы

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – М. : Наука, 1967. – 266 с.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М. : Гостехиздат, 1956. – 500 с.
3. Курпа Л. В., Линник Г. Б., Ткаченко В. В. Дослідження стійкості багатосарових пластин симетричної будови за допомогою методу R – функцій // Журнал «Машинознавство». – 2010. – № 3 – 4. – С. 3 – 8.
4. Курпа Л. В., Мазур О. С., Ткаченко В. В. Параметричні коливання багатосарових пластин під дією періодичного навантаження // Вісник НТУ «ХПІ». – 2011. – № 3. – С. 134 – 145.
5. Курпа Л. В., Мазур О. С., Шматко Т. В. Применение теории R – функции к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2016. – 492 с.
6. Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape // Latin American Journal of Solids and Structures. – Vol. 10. – no. 1. – Rio de Janeiro, Jan. 2013 – P. 175 – 188.
7. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells : 2000–2009. // Composite Structures. – Volume 93. – Issue 1. – December 2010. – P. 14 – 31.
8. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. Second ed.. – London : CRC PRESS, 2004. – 831 p.
9. Sahu S. K., Datta P. K. Research Advances in the dynamic stability behavior of plates and shells : 1987 – 2005 – Part 1 : conservative system // Applied mechanics reviews. – 2007. – Vol. 60. – P. 65 – 75.
10. Singha M. K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates // Journal of Sound and Vibration. – 2009. – Vol. 328 (4 – 5). – p. 541 – 554.

References (transliterated)

1. Ambartsumyan S. A. *Teoriya anizotropnykh plastin* [The theory of anisotropic plates]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 266 p.
2. Bolotin V. V. *Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem* [Dynamic stability of elastic systems]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956. 500 p.
3. Kurpa L. V., Linnyk G. B., Tkachenko V. V. Doslidzhennya stiykosti bagatosharovykh plastyn symetrychnoyi budovy za dopomogoyu metodu R – funktsiy [Investigation of stability of multilayer plates of symmetric structure using the method of R – functions]. *Zhurnal "Mashynoznavstvo"* ["Machine Science" Journal]. 2010, no. 3 – 4, pp. 3–8.
4. Kurpa L. V., Mazur O. S., Tkachenko V. V. Parametrychni kolyvannya bagatosharovykh plastyn pid diyeyu periodychnogo navantazhennya [Parametric fluctuations of multilayer plates under the action of periodic loading]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of NTU "KhPI"]. 2011, no. 3, pp. 134–145.
5. Kurpa L. V., Mazur O. S., Shmatko T. V. Primenenie teorii R – funktsii k resheniyu nelineynykh zadach dinamiki mnogosloynnykh plastin [Application of the R -function theory to solving nonlinear problems of dynamics of laminated plates]. Kharkov, «NTU KhPI» Publ., 2016. 492 p.

6. Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape. *Latin American Journal of Solids and Structures*. Rio de Janeiro, Jan. 2013, vol. 10, no. 1, pp. 175–188.
7. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells : 2000–2009. *Composite Structures*. December 2010, vol. 93, issue 1, pp. 14–31.
8. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. Second ed.* London, CRC PRESS Publ., 2004. 831 p.
9. Sahu S. K., Datta P. K. Research Advances in the dynamic stability behavior of plates and shells : 1987 – 2005 – Part 1 : conservative system. *Applied mechanics reviews*. 2007, vol. 60, pp. 65–75.
10. Singha M. K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2009, vol. 328 (4 – 5), pp. 541–554.

Поступила (received) 06.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ткаченко Вікторія Валеріївна (Ткаченко Виктория Валерьевна, Tkachenko Viktoriia Valeriyivna) – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (098) 355-40-29; e-mail: viktoryatkachenko@gmail.com.

UDC 519.6

N. V. CHEREMSKAYA

DEVELOPING ALGORITHMS OF OPTIMAL FORECASTING AND FILTERING FOR SOME CLASSES OF NONSTATIONARY RANDOM SEQUENCES

The problem of forecasting and filtering non-stationary random sequences is solved in the article. Optimal forecasting and filtering are performed using linear estimates and minimizing the mean squared error. For non-stationary random sequences, even with the correlation functions of the simplest form, such studies were not conducted. In this work, on the examples of non-stationary sequences, the problem of forecasting and filtering is solved explicitly. The correlation function image is obtained using the Hilbert approach, which allows one to calculate correlation functions as scalar products in a corresponding Hilbert space. The solution of the extrapolation problem with particular correlation function considered in the article can be used to simulate filtration and forecasting processes in real systems in the case of non-stationary random signals.

Key words: correlation function, mathematical expectation, forecasting and filtering of nonstationary random sequences and processes, mean square error.

Н. В. ЧЕРЕМСЬКА

ПОБУДОВА АЛГОРИТМІВ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГНОЗУ І ФІЛЬТРАЦІЇ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Розв'язується задача прогнозу і фільтрації нестационарних випадкових послідовностей. Оптимальні прогноз і фільтрація здійснюються за допомогою лінійних оцінок та мінімізації середньої квадратичної помилки. Для нестационарних випадкових послідовностей, навіть з кореляційними функціями найпростішого вигляду, такі дослідження не проводились. У цій роботі на прикладах нестационарних послідовностей задача прогнозу та фільтрації вирішується явно. Для отримання зображень кореляційних функцій використовується гільбертів підхід, який дозволяє обчислювати кореляційні функції як скалярні добутки у відповідному гільбертовому просторі. Розв'язок екстраполяційної задачі з частковими видами кореляційної функції, який було розглянуто в статті, може бути використаний для моделювання процесів фільтрації та прогнозу в реальних системах у випадку нестационарних випадкових сигналів.

Ключові слова: кореляційна функція, математичне очікування, прогноз та фільтрація нестационарних випадкових послідовностей і процесів, середня квадратична помилка.

Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГНОЗА И ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Решается задача прогноза и фильтрации нестационарных случайных последовательностей. Оптимальные прогноз и фильтрация осуществляются с помощью линейных оценок и минимизации средней квадратичной ошибки. Для нестационарных случайных последовательностей, даже с корреляционными функциями простейшего вида, такие исследования не проводились. В этой работе на примерах нестационарных последовательностей задача прогноза и фильтрации решается явно. Для получения представлений корреляционных функций используется гильбертов поход, позволяющий вычислять корреляционные функции как скалярные произведения в соответствующем гильбертовом пространстве. Решение экстраполяционной задачи с частными видами корреляционной функции, рассмотренное в статье может быть использовано для моделирования процессов фильтрации и прогноза в реальных системах в случае нестационарных случайных сигналов.

Ключевые слова: корреляционная функция, математическое ожидание, прогноз и фильтрация нестационарных случайных последовательностей и процессов, средняя квадратическая ошибка.

Introduction. The tasks of predicting the values of random processes (sequences) for known values in the past or the allocation of a signal in the background of random noise are partial but very important problems of the general theory of linear transformations of a random signal. Solving the extrapolation problem with particular correlation function, which is calculated for various cases of the spectrum of a non-selfadjoint bounded operator, can be used to simulate the filtration and prediction processes in real systems in the case of non-stationary random signals.

© N. V. Cheremskaya, 2018