

А. В. ВОРОПАЙ**ГАШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПЛАСТИНЫ И СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ. ПАССИВНАЯ ВИБРОЗАЩИТА**

Механическая система состоит из прямоугольной изотропной пластины средней толщины, шарнирно-опёртой по контуру, и присоединённых к ней в разных точках сосредоточенной массы и пассивного демпфера. На пластину воздействует нестационарное нагружение, вызывающее колебания. Влияние сосредоточенной массы и демпфера моделируется дополнительными нестационарными сосредоточенными силами, приложенными к пластине. Исследования сводятся к анализу системы интегральных уравнений Вольтерра, которые решаются численно с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова. Приведены примеры расчетов для прямой и обратной задач при пассивном гашении нестационарных колебаний пластины.

Ключевые слова: пластина средней толщины, сосредоточенная масса, нестационарное нагружение, пассивный демпфер, система интегральных уравнений Вольтерра, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова, обратная задача.

О. В. ВОРОПАЙ**ГАСІННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З ПЛАСТИНИ ТА ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ МАСИ. ПАСИВНИЙ ВІБРОЗАХИСТ**

Механічна система складається з прямокутної ізотропної пластини середньої товщини, шарнірно-опертої по контуру, та приєднаних до неї в різних точках зосередженої маси і пасивного демпфера. На пластину діє нестационарне навантаження, яке збуджує коливання. Вплив зосередженої маси і демпфера моделюється додатковими нестационарними зосередженими силами, прикладеними до пластини. Дослідження зводяться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра, які розв'язуються чисельно з використанням регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова. Наведені приклади розрахунків для прямої та оберненої задач пасивного гасіння нестационарних коливань пластини.

Ключові слова: пластина середньої товщини, зосереджена маса, нестационарне навантаження, пасивний демпфер, система інтегральних рівнянь Вольтерра, регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова, обернена задача.

A. V. VOROPAY**SUPPRESSION OF NON-STATIONARY VIBRATIONS IN A MECHANICAL SYSTEM CONSISTING OF A PLATE AND CONCENTRATED MASS. PASSIVE VIBRATION PROTECTION**

The mechanical system consists of a rectangular isotropic hinged medium thickness plate and a concentrated mass and a passive damper attached to it at different points. The plate is impacted by non-stationary loading, causing vibrations. The influence of the concentrated mass and the damper is simulated by additional nonstationary concentrated forces applied to the plate. The research is reduced to the analysis of a system of Volterra integral equations, which are solved numerically with using Tikhonov regularization algorithm. Examples of calculations for the direct and inverse problems of passive suppression of non-stationary vibrations of the plate are given.

Key words: plate of medium thickness, concentrated mass, nonstationary loading, passive damper, system of Volterra integral equations, Tikhonov regularization algorithm, inverse problem.

Введение и анализ последних исследований. Существует несколько подходов к реализации активной и пассивной виброзащиты. Гашение колебаний (особенно нестационарных) является важным направлением задач виброзащиты элементов конструкций. Актуальность указанных задач в настоящее время несомненна. При необходимости гашения колебаний уже созданных элементов конструкций используют различные управляемые и неуправляемые устройства – гасители колебаний (vibration absorbers). Наиболее известными и распространенными устройствами являются амортизаторы, которые широко распространены во всех отраслях машиностроения, в частности, в автомобилестроении.

Для систем активной виброзащиты управление колебаниями осуществляется с помощью введения в механическую систему дополнительных управляющих нагрузок. Тогда задача управления сводится к идентификации этих неизвестных нагрузок, которые определяются из решения соответствующих обратных нестационарных задач. А выбор конкретной системы управления и механизмов реализации найденных управляющих сил осуществляется уже на стадии практических или экспериментальных исследований. В статье [1] представлено решение задачи об управлении нестационарными колебаниями в некоторой точке пластины прямоугольной формы с помощью введения вспомогательной (управляющей) нагрузки, а в её продолжении [2] – управление поперечными колебаниями на малой области прямоугольной пластины осуществляется при помощи приложения к пластине системы дополнительных управляющих нагрузок. В работе [3] показана возможность управления нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на прямоугольной пластине, с помощью дополнительной (управляющей) нагрузки.

Здесь рассмотрена подобная задача, однако гашение будет реализовано методом пассивной виброзащиты.

Постановка задачи. Исследуется возможность гашения нестационарных колебаний механической системы, состоящей из прямоугольной шарнирно опертой пластины и лежащей на ней сосредоточенной массы, при помощи специально присоединённого к пластине в некоторой точке пассивного гасителя колебаний (рис. 1).

Воспользуемся системой дифференциальных уравнений модели Тимошенко, описывающих нестационар-

ные деформационные процессы в пластине средней толщины из [4], дополнив её соотношениями, записанными для точек присоединения сосредоточенной массы (x_M, y_M) и демпфера (x_D, y_D) :

$$R(x_M, y_M, t) = M \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2} \quad \text{и} \quad R(x_D, y_D, t) = \kappa \frac{dw(x_D, y_D, t)}{dt}.$$

Указанный подход, для моделирования влияния сосредоточенной массы на колебания упругодеформируемых элементов конструкций встречается у ряда исследователей, например, в монографии [5].

В результате получается система уравнений аналогичная приведенной в [3], но с учетом дополнительной реакции гасителя колебаний.

Прямая задача. Для перемещений точек, в которых присоединены сосредоточенная масса $w(x_M, y_M, t) = w_M(t)$ и гаситель колебаний $w(x_D, y_D, t) = w_D(t)$, можно записать следующие интегральные соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_D, y_D, t) = \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau; \\ w(x_D, y_D, t) = \int_0^t P(\tau) K_{PD}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_D(\tau) K_{DD}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_M(\tau) K_{MD}(t-\tau) d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t R_M(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t P(\tau) K_{PM}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_D(\tau) K_{DM}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_M(\tau) K_{MM}(t-\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (1)$$

Исключив из интегральных соотношений (1) $w(x_M, y_M, t)$ и $w(x_D, y_D, t)$, получаем следующую систему интегральных уравнений Вольтерра I рода относительно неизвестных $R_D(t)$ и $R_M(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t R_D(\tau) \left[K_{DD}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] d\tau + \int_0^t R_M(\tau) K_{MD}(t-\tau) d\tau = \int_0^t P(\tau) K_{PD}(t-\tau) d\tau; \\ \int_0^t R_D(\tau) K_{DM}(t-\tau) d\tau + \int_0^t R_M(\tau) \left[K_{MM}(t-\tau) + \frac{t-\tau}{M} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_{PM}(t-\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (2)$$

Описание и вид ядер, входящих в (1) и (2), аналогично приведенному в статье [3].

Система (2), как и подобные, решается с использованием *регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова* [6]. После дискретизации её можно переписать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{DD} \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{MD} \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PD} \mathbf{P}, \\ \mathbf{A}_{DM} \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{MM} \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PM} \mathbf{P}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Для решения матричной системы (3) удобно использовать *обобщённый алгоритм Крамера для блочных матриц* [7]; в случае прямой задачи, когда возмущающее воздействие $P(t)$ известно, а искомыми являются $R_D(t)$ и $R_M(t)$, в системе (3) удобно переобозначить матрицы и записать её в блочном виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_D \\ \mathbf{R}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{PD} \\ \mathbf{w}_{PM} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Обратная задача. В случае решения обратной задачи, когда все три силовые зависимости $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ неизвестны, а задано изменение прогиба в некоторой точке $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$, можно записать следующую блочную систему:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{R}_D \\ -\mathbf{R}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}, \quad (5)$$

которая решается аналогично системе (4).

Результаты моделирования. При расчетах предполагалось, что срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Считалось, что возмущающая нагрузка, а также реакции массы и демпфера сосредоточены в точках. При вычислениях принимались следующие значения: модуль упругости $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; плотность $\rho = 7890$ кг/м³ (материал – легированная сталь); толщина $p = 0.04$ м; длина $l = 0.6$ м; ширина $m = 0.4$ м; число членов в *соответствующих двойных*

рядах Фурье 50×50 .

На рис. 2 приведена схема расположения точек для расчётов при решении прямой и обратной задачи.

Координаты точек: $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.3$ м – приложения возмущающей нагрузки; $x_D = 0.3$ м, $y_D = 0.2$ м – присоединения демпфера; $x_M = 0.15$ м, $y_M = 0.3$ м – сосредоточенной массы; $x_S = 0.2$ м, $y_S = 0.15$ м – в которой задавалось известное изменение прогиба при решении обратной задачи.

При вычислениях в рамках анализа прямой задачи искомые функции $R_D(t)$ и $R_M(t)$ определялись из решения системы (4), которая решалась численно-аналитически согласно регуляризирующему алгоритму А. Н. Тихонова. Параметры регуляризации α_D и α_M определялись на основе минимизации по α соответствующих функционалов невязки. На рис. 3 представлены графики изменения невязок для $R_D(t)$ (показан точками) и $R_M(t)$ (сплошная линия) в зависимости от величины параметра регуляризации α . Значения параметра регуляризации для удобства отложены в логарифмической шкале.

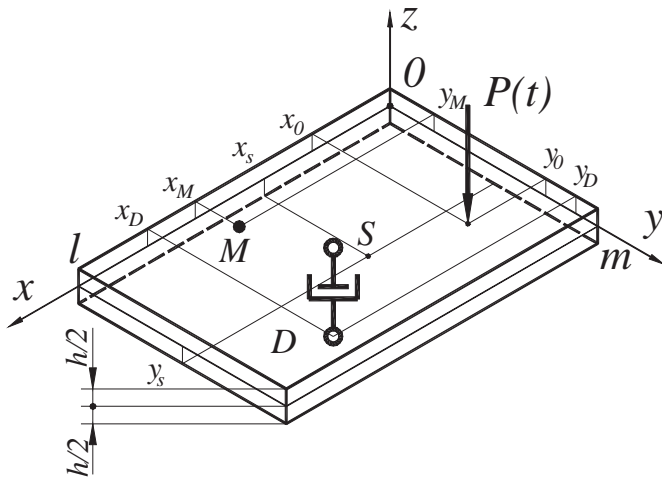
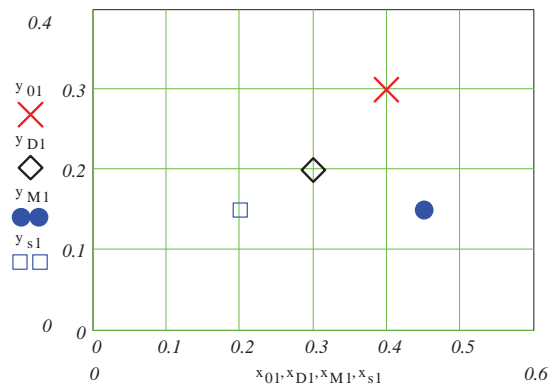


Рис. 1 – Схема гашения нестационарных колебаний пластины и массы.



- × – внешняя сила;
- – точка присоединения сосредоточенной массы;
- ◊ – точка присоединения демпфера;
- – точка измерения прогибов пластины

Рис. 2 – Схема пластины с массой и демпфером в плане.

Из рис. 3 видно, что имеются зоны оптимальных значений параметров регуляризации: для α_D это $10^{-47} < \alpha_D < 10^{-43}$; для α_M это $10^{-48} < \alpha_M < 10^{-46}$, причём при дальнейших расчетах принимались $\alpha_D = 10^{-46}$ и $\alpha_M = 10^{-47}$.

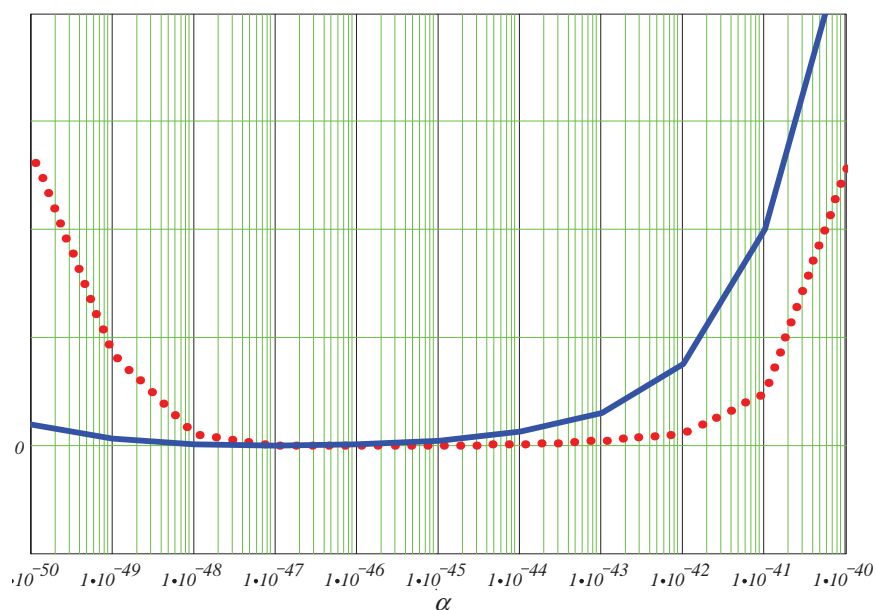


Рис. 3 – К выбору параметров регуляризации α_D и α_M .

На рис. 4 показаны графики изменения прогибов пластины в точке S , вызванных действием только лишь возмущающей силы $P(t) - w_{PS}(t)$ либо только реакцией между гасителем и пластиной $R_D(t) - w_{DS}(t)$ или только реакцией сосредоточенной массы $R_M(t) - w_{MS}(t)$, а также график, показывающий изменение прогиба в исследуемой точке для пластины с массой (суммарная кривая) при наличии сосредоточенного гасителя – $w_S(t)$.

Рис. 4 демонстрирует (кривая $w_S(t)$), что, используя гаситель колебаний с выбранным оптимальным коэффициентом демпфирования, можно несколько сгладить основной пик прогибов, а потом в течении нескольких периодов почти полностью погасить нестационарные колебания (то есть, значительно уменьшить амплитуды прогибов). Это подтверждает эффективность систем пассивной виброзащиты.

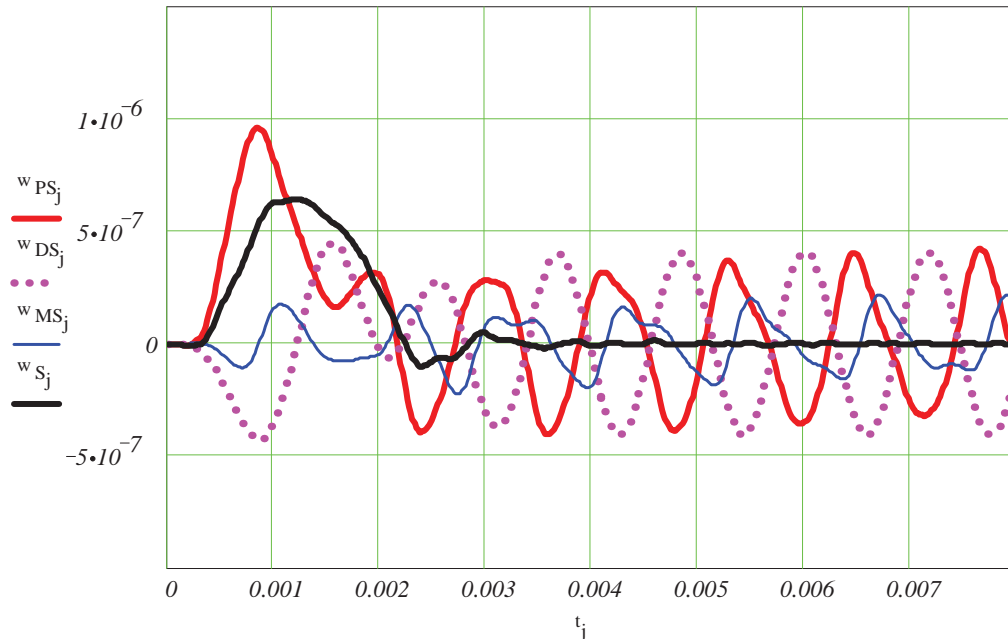


Рис. 4 – Изменение прогиба в точке пластины $x_S = 0.2$ м, $y_S = 0.15$ м.

На рис. 5 показаны графики изменения во времени внешней возмущающей нагрузки, а также определенные из решения системы (4) реакции $R_D(t)$ и $R_M(t)$, найденные при значениях параметров регуляризации $\alpha_D = 10^{-46}$ и $\alpha_M = 10^{-47}$ соответственно.

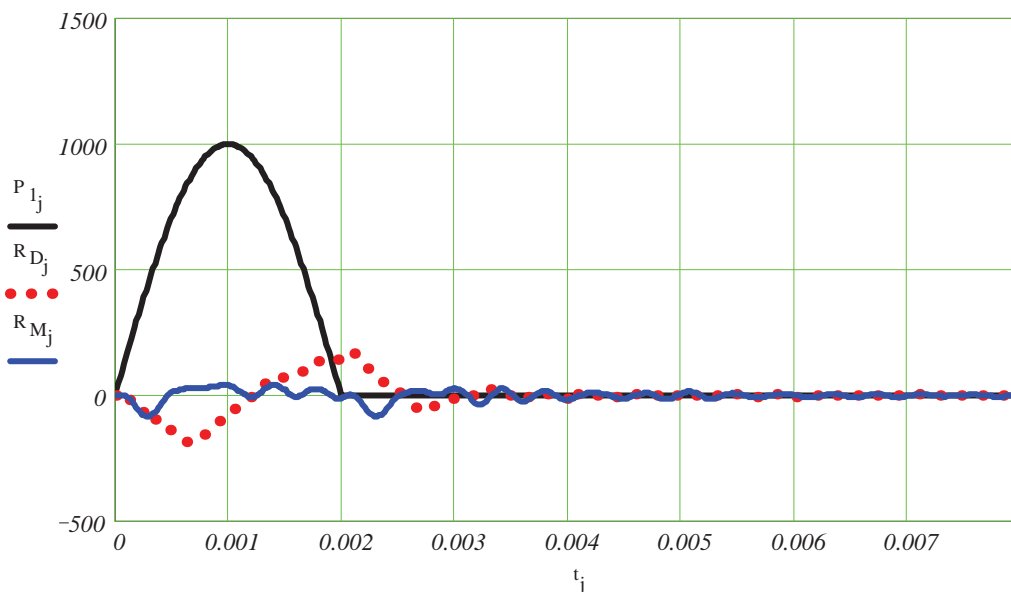


Рис. 5 – Воздействующие на пластину нагрузки: $P_1(t)$ – возмущающее воздействие; $R_M(t)$ – реакция сосредоточенной массы; $R_D(t)$ – реакция между пластиной и демпфером.

При вычислительном эксперименте в процессе решения обратной задачи закон изменения во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ считался неизвестным. Идентификация производилась по зашумленным и незашумленным значениям прогиба $w_S(t)$ в точке S , найденным в результате решения прямой задачи.

На рис. 6 показаны незашумленные значения прогиба $w_S(t)$ в точке S и зашумленные значения $w_\delta(t)$. Зашумление исходных данных осуществлялось с использованием закона нормального распределения (которое моделирует погрешности случайного характера), механизм наложения которого описывался ранее; относительная погрешность «зашумления» (дисперсия) принималась $\delta = 0.2$.

На рис. 7 и рис. 8 показаны идентифицированные по $w_S(t)$ и $w_\delta(t)$ зависимости изменения во времени $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$.

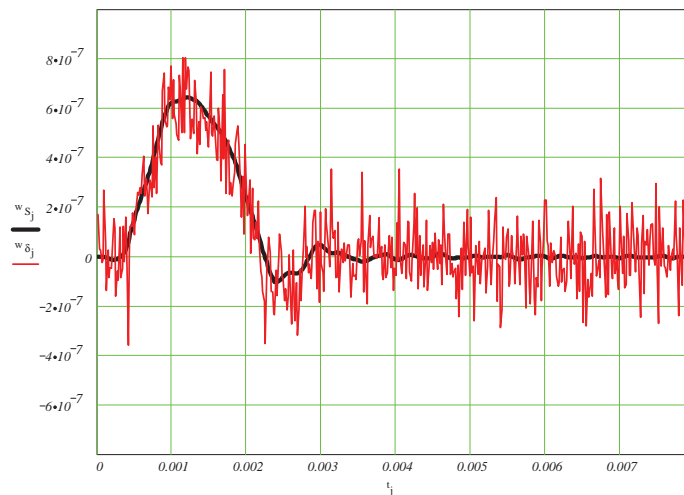


Рис. 6 – Исходные данные идентификации (изменение прогиба).

Отметим, что на рис. 7 и рис. 8. идентифицированные $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ показаны точками, а точные зависимости, которые были взяты из результатов решения прямой задачи, показаны сплошными линиями.

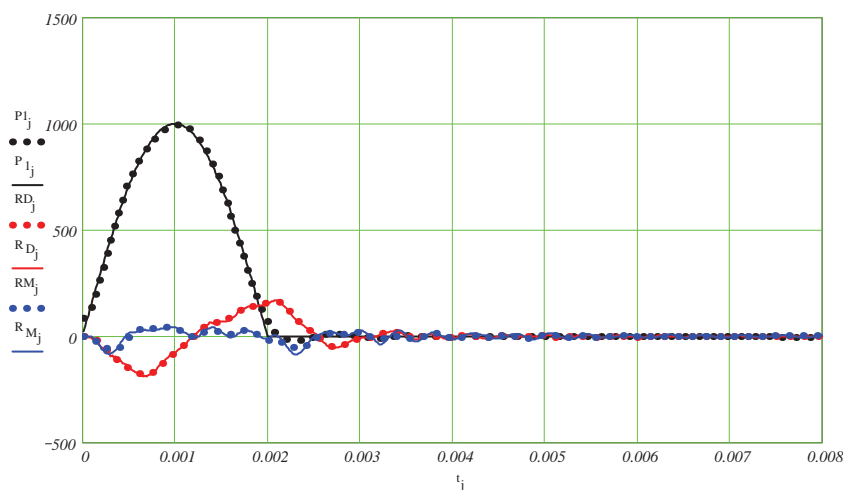


Рис. 7 – Результаты идентификации по незашумленным исходным данным.

Из рис. 7 хорошо видно, что идентифицированные $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ по незашумленным исходным данным практически полностью совпадают с точными их значениями. В случае использования зашумленных исходных данных (рис. 8) результаты идентификации получаются весьма удовлетворительные, особенно в зоне с большими амплитудами, которая представляет значительный интерес при исследовании нестационарных процессов.

Укажем, что идентификация $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ производилась при значении параметров регуляризации $\alpha_P = 10^{-61}$, $\alpha_D = 10^{-62}$ и $\alpha_M = 10^{-62}$ соответственно. Вид функционалов невязки, на основе минимизации которых выбирались оптимальные значения параметров регуляризации, подобен показанным на рис. 3 и отдельно для обратной задачи не приводится.

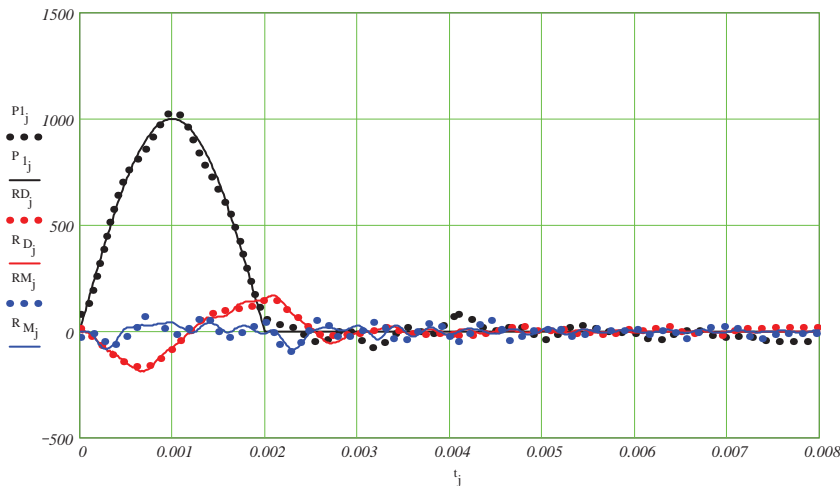


Рис. 8 Результаты идентификации по зашумленным исходным данным.

Выводы. Используя гаситель колебаний с выбранным оптимальным коэффициентом демпфирования, можно несколько сгладить основной пик прогибов пластины, а потом в течении нескольких периодов почти полностью погасить нестационарные колебания, что подтверждает эффективность описанной системы пассивной виброзащиты.

На основе представленных на рис. 8 результатов можно сделать вывод о том, что предложенная методика решения обратной задачи для сложной механической системы и алгоритм определения неизвестных нагрузок являются эффективными и устойчивыми к возмущению исходных данных.

Список литературы

1. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads // *Int. J. Solids and Struct.* –2004. – 41 (2004). – P. 4919 – 4926.
2. Voronay A. B. Управление поперечными колебаниями на малой области прямоугольной пластины // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. – 2010. – Вып. 49. – С. 84 – 87.
3. Voronay A. B. Управление нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на пластине // Вестник национального технического университета «ХПИ». Серия : Динамика и прочность машин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2010. – № 69. – С. 46 – 52.
4. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М. : Машиностроение, 1970. – 734 с.
5. Кохманюк С. С., Яныутин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев : Наукова думка, 1980. – 232 с.
6. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 576 с.

References (transliterated)

1. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. *Int. J. Solids and Struct.* 2004, vol. 41 (2004), pp. 4919–4926.
2. Voropay A. V. Upravlenie poperechnymi kolebaniyami na maloy oblasti pryamougol'noy plastiny [Controlling transverse vibrations on a small region of a rectangular plate]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo avtomobil'no-dorozhnogo universiteta Severo-Vostochnogo nauchnogo tsentra Transportnoy akademii Ukrainy. Sbornik nauchnykh trudov* [Bulletin of the Kharkov National Automobile and Highway University of the North-East Scientific Center of the Ukrainian Academy of Transport. Digest of scientific papers]. 2010, vol. 49, pp. 84–87.
3. Voropay A. V. Upravlenie nestatsionarnymi kolebaniyami sosredotochennoy massy, lezhashhey na plastine [Controlling nonstationary vibrations of concentrated mass lying on a plate.]. *Vestnik natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta "KhPI". Seriy : Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2010, vol. 69, pp. 46–52.
4. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruyemykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1970. 734 p.
5. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin E. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruyemykh sistem pri impul'snykhi podvizhnykh nagruzkakh* [Vibrations of deformable systems under pulse and movable loads]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1980. 232 p.
6. Tikhonov A. N., Goncharovskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyariziruyushhie algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori data]. Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1983. 200 p.
7. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1967. 576 p.

Поступила (received) 16. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воронай Олексій Валерійович (Воронай Алексей Валериевич, Voropay Alexey Valerievich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.