

- magnetic Waves from a Superconducting Layer with Rectangular Waveguide Channels. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2001, vol. 56, no. 2, pp. 78–86.
13. Gandel Y. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016, vol. 212, no. 2, pp. 156–166.
 14. Nesvit K. V. Discrete Mathematical Model of the Problem of Diffraction for E-Polarized Waves on Slots in the Impedance Plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016, vol. 212, no. 2, pp. 142–155.
 15. Kostenko O. V. Mathematical model of wave scattering by an impedance grating. *Cybernetics and systems analysis*. 2015, vol. 51, no. 3, pp. 344–360.
 16. Il'insky A. S., Slepjan A. Ja., Slepjan G. Ja. *Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves*. London, UK : The IEE and Peter Peregrinus Ltd. Publ., Electromagnetic Waves (Series 36), 1993. 275 p.
 17. Kravchenko V. F. *Eylektrodinamika sverkhprovodyashhikh struktur. Teoriya, algoritmy i metody vychisleniy* [The electrodynamics of superconducting structures. The theory, algorithms and computational methods]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 280 p.
 18. Marchenko V. A. *Spektral'naya teoriya operatorov Shturma – Liuvillya* [Spectral theory of Sturm-Liouville operators]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1972. 220 p.
 19. Gandel Y. V., Dushkin V. D. Granichnye integral'nye uravneniya tret'ey kraevoy zadachi dlya uravneniya Gel'mgol'tsa v R_+^2 s ploskoparallelnymi razrezami [The boundary integral equations of the third boundary-value problem for the Helmholtz equation in the R_+^2 with plane-parallel slits]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the NAS of Ukraine]. 2014, no. 8, pp. 14–19.
 20. Dushkin V. D. Approximate Solving of the Third Boundary Value Problems for Helmholtz Equations in the Plane with Parallel Cuts. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. 2017, vol. 13, no. 3, pp. 254–267.
 21. Gandel Y. V., Dushkin V. D. The Approximate Method for Solving the Boundary Integral Equations of the Problem of Wave Scattering by Superconducting Lattice. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 2014, vol. 2, no. 6, pp. 369–375.

Поступила (received) 23.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Душкін Володимир Давидович (Душкин Владимир Давидович, Dushkin Vladimir Davidovich) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національна академія Національної гвардії України, м. Харків; тел.: (097) 386-64-54; e-mail: dushkinvdv@gmail.com.

УДК 519.6

С. Е. ГАРДЕР, Е. П. ГОМОЗОВ

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КУРСОВОЙ СТОИМОСТИ БИТКОИНА МЕТОДОМ SSA

Приведен обзор существующих на сегодняшний день математических моделей функционирования финансового рынка. Однако, практически все публикуемые исследования носят в основном теоретический характер, прогнозы, как правило, требуют большого количества наблюдений, плохо работают в окрестностях бифуркаций и не имеют компьютерной модели, которая могла бы строить прогнозы в режиме реального времени. В работе на основе метода SSA (Singular Spectrum Analysis) проведен анализ структуры и прогнозирование временного ряда курсовой стоимости биткоина. Получен более точный прогноз по сравнению с применением для прогнозирования моделей ARIMA и ARFIMA-FIGARCH даже и в «критических» для этих моделей случаях.

Ключевые слова: временной ряд, биткоин, анализ структуры, прогноз, сингулярный спектральный анализ, метод SSA – «Гусеница».

С. Е. ГАРДЕР, Е. П. ГОМОЗОВ

АНАЛІЗ І ПРОГНОЗУВАННЯ КУРСОВОЇ ВАРТОСТІ БІТКОІНА ЗА МЕТОДОМ SSA

Надано огляд існуючих математичних моделей функціонування фінансового ринку. Однак, практично усі досліді, що були опубліковані, мають теоретичний характер, прогнози, як правило, потребують більшої кількості спостережень, погано працюють поблизу біфуркацій і не мають комп'ютерної моделі, яка мала б можливість будувати прогнози в режимі реального часу. На засадах методу SSA проведено аналіз структури та прогнозування ряду курсової вартості. Отримано найбільш точний прогноз порівняно з застосуванням для прогнозування моделей ARIMA і ARFIMA-FIGARCH навіть в «критичних» для цих моделей випадках.

Ключові слова: часовий ряд, біткоїн, аналіз структури, прогноз, сингулярний спектральний аналіз, метод SSA – «Гусениця».

S. E. GARDER, E. P. GOMOZOV

ANALYSIS AND PREDICTION OF BITCOIN RATE BY SSA METHOD

In the paper the existing mathematical models of the financial market are reviewed. Nevertheless, the majority of the research published has the essential drawbacks such as the theoretical character of the papers, the amount of the observations required, the inadequate performance in the neighborhood of bifurcation points, and the absence of a computer model capable of real-time prediction. In the present paper we apply the SSA method for analyzing the structure and predicting the behavior of the bitcoin rate time series. The results obtained are of higher accuracy compared to the ones obtained by using the ARIMA and ARFIMA-FIGARCH models for predicting, even in the critical for these models cases.

Key words: time series, bitcoin, structure analysis, prediction, singular spectral analysis, the "Caterpillar"-SSA method.

© С. Е. Гардер, Е. П. Гомозов, 2018

Введение. Как известно, всегда существовали проблемы в прогнозировании бифуркаций курсов финансовых инструментов (длин флэтов и трендов, точек перелома трендов, мыльных пузырей, обрушений рынка, которые никак не объясняются в рамках классической гипотезы эффективного рынка – ЕМН. С математической точки зрения ЕМН предполагает вероятностную модель рынка с динамикой курсов финансовых инструментов «марковского» типа). Из теории динамических систем следует, что функционирующая в режиме реального времени сеть современных финансовых рынков должна неустойчиво включать в себя структурно неустойчивые системы. Как альтернатива ЕМН существует еще одна гипотеза относительно функционирования финансовых рынков – гипотеза фрактального рынка – FMH [1], которая придает особое значение влиянию информации и инвестиционным горизонтам в поведении инвесторов – так называемых «рациональных» и «шумовых» трейдеров (то есть, динамика курсов финансовых инструментов описывается фрактальными временными рядами). Есть попытки создать новые или модифицированные гипотезы поведения финансовых рынков – синергетическая модель, мультиагентная модель, модификация ЕМН на основе, так называемой теории *игровой вероятности*. Среди достаточно распространенных методов математического моделирования можно назвать: классический и фрактальный анализ временных рядов [2, 3, 4], общий фрактальный анализ [5], методы дифференциальных уравнений в частных производных [6], нейронные сети [4], многофакторный регрессионный анализ, генетический алгоритм, методы когнитивной психологии, теории бифуркаций [8] и так далее. Однако практически все публикуемые исследования носят в основном теоретический характер, прогнозы, как правило, требуют большого количества наблюдений, плохо работают в окрестностях бифуркаций и не имеют расчетной модели, которая могла бы строить прогнозы в режиме реального времени.

Постановка задачи. В настоящее время имеется рынок чисто «шумовых» трейдеров, которых характеризует случайное подражательное и стадное поведение – это рынок криптовалют. Метод SSA (Singular Spectrum Analysis) – это непараметрический метод анализа временных рядов, который не требует предварительного создания модели ряда и поэтому, с нашей точки зрения, наиболее подходит для анализа структуры и прогнозирования ряда курсовой стоимости биткоина – самой популярной на сегодня криптовалютой.

Источники исходных данных. – электронный ресурс [/https://www.calc.ru/grafik-Bitcoin-k-dollaru-za-2018-01.html](https://www.calc.ru/grafik-Bitcoin-k-dollaru-za-2018-01.html). Курс биткоина взят из данных различных онлайн бирж и высчитывался как среднее арифметическое значение на текущий момент времени. На рис.1 приведен график изменения стоимости биткоина с 20.01.2017 по 15.01.2018.

Решение задачи. Следуя методу SSA, временной ряд раскладывается на сумму компонент: тренд, гармонические составляющие и остаточную компоненту (шум). Теоретическую основу метода составляет *сингулярное разложение траекторной матрицы*, столбцами которой являются вектора вложения – отрезки ряда длины L – основного параметра метода, называемого длиной окна. Анализ членов сингулярного разложения позволяет сначала классифицировать их как относящиеся к одной из компонент ряда, а затем выделить эту компоненту.

Пусть имеется временной ряд $X_N = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ длины N ($N > 2$), выберем число L – длину окна, затем последовательно заполним столбцы траекторной матрицы G .

$$G = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{K+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & x_{L+2} & \dots & x_{L+K-1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Эта матрица – ганкелева, имеющая равные элементы на побочных диагоналях.

Образует матрицу $R = GG^T$. Поскольку R неотрицательно определенная, то ее собственные числа неотрицательны. Найдем *собственные числа* матрицы R , взятые в порядке убывания $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ и соответствующие им *собственные векторы* U_1, \dots, U_L . Разложение траекторной матрицы (1) на компоненты имеет вид:

$$G = G_1 + \dots + G_d, \quad (2)$$

где $d = \max \{ j, \text{таких, что } \lambda_j > 0 \}$, $G_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$, $V_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} G^T U_i$, ($i = 1, \dots, d$); $\sqrt{\lambda_i}$ – сингулярные числа; V_i –

факторные векторы; набор $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ – i -я *собственная тройка* сингулярного разложения; вектор $Z_i = \sqrt{\lambda_i} V_i$, – вектор i -х главных компонент [1 – 3].

На следующем шаге проводится группировка компонентов разложения:

$$G = G_{I_1} + G_{I_2} + \dots + G_{I_m}, \quad G_{I_j} = \sum_{k \in I_j} G_k,$$

где матрицы G_{I_j} образуют непересекающиеся подмножества.

Последним шагом является восстановление составляющих $X_N^{(j)}$ по сгруппированным матрицам G_{I_j} с помощью усреднения элементов вдоль побочных диагоналей этих матриц. Результатом алгоритма является разбиение временного ряда на аддитивные составляющие [2].

Пусть G – матрица размерности $(L \times K)$ с элементами g_{ij} , $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq K$. Положим $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$ и $N = L + K - 1$. Пусть $g_{ij}^* = g_{ij}$, если $L < K$ и $g_{ij}^* = g_{ji}$, если $L \geq K$. Тогда ряд восстанавливается по следующим формулам:

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{K+1} \sum_{m=1}^{k+1} g_{m,k-m+2}^*, & 0 \leq k < L^* - 1; \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} g_{m,k-m+2}^*, & L^* - 1 \leq k < K^*; \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} g_{m,k-m+2}^*, & K^* \leq k < N. \end{cases} \quad (3)$$

Полученное нами число элементов ряда курса биткоина $N = 116$. Следуя рекомендациям [10, 11], длина вектора вложения $L = 66$ (близко к половине длины ряда), размерность траекторной матрицы (66×50) , что обеспечивает наилучшую разделимость ряда на компоненты.

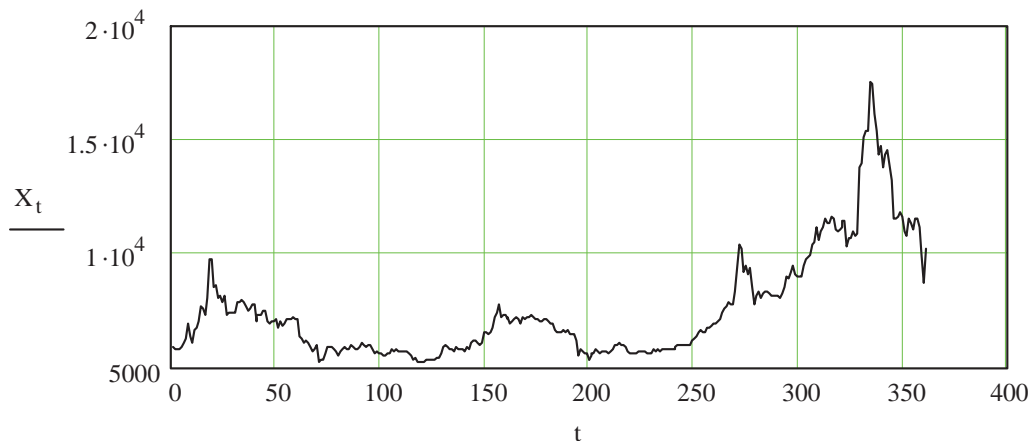


Рис. 1 – График изменения стоимости биткоина X_t от времени t (суток).

Первые десять собственных чисел корреляционной матрицы показаны на рис. 2.

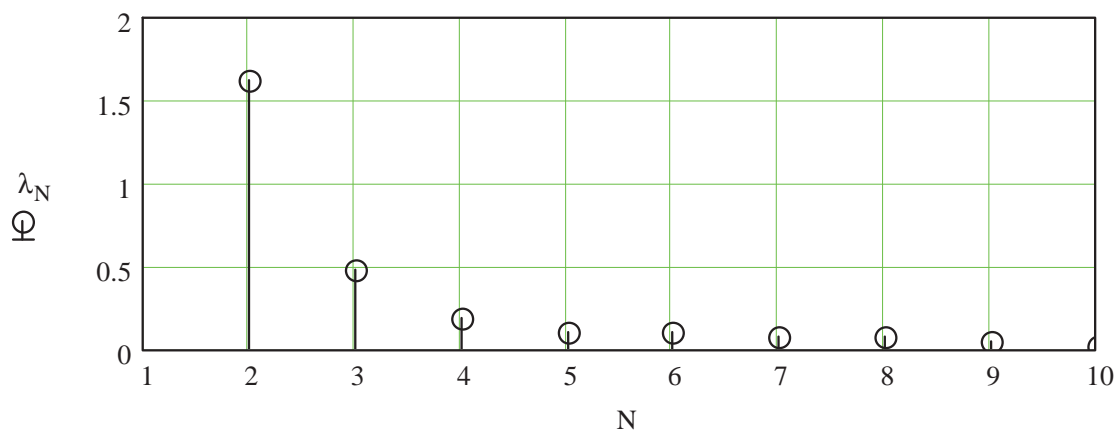


Рис. 2 – Собственные числа корреляционной матрицы.

Как правило, шум порождает медленно убывающую последовательность собственных чисел [11]. Поэтому скачок в собственных числах отделяет собственные тройки, соответствующие медленно меняющемуся сигналу (тренду) от остальных, соответствующих шуму. Перелом на третьем собственном значении позволяет сделать предположение, что первые две-три компоненты в разложении несут информацию о тренде, последующие соответствуют случайной составляющей (шуму). На рис. 3 приведены собственные векторы, соответствующие первым трем собственным числам корреляционной матрицы.

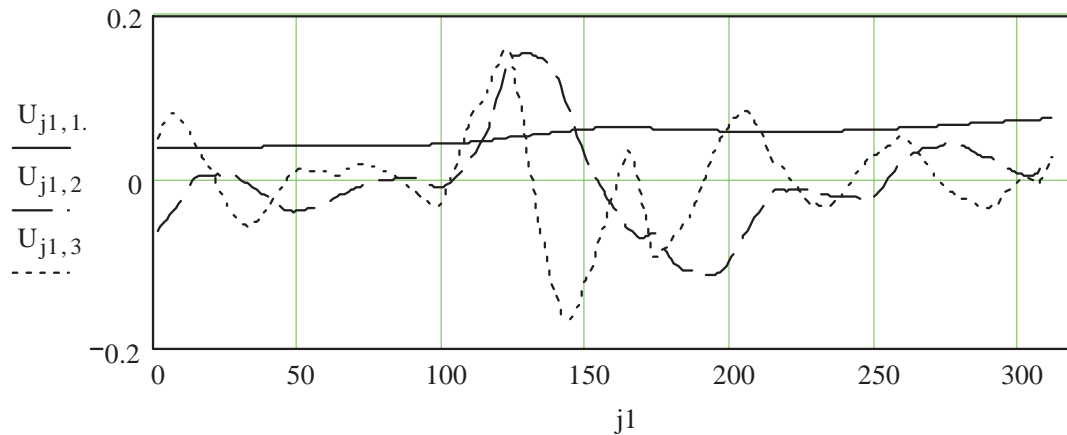


Рис. 3 – Собственные векторы $U_{j1,i}$, соответствующие первым собственным числам. Линии — $1^{\text{й}}$ собственный вектор; $---$ $2^{\text{й}}$ собственный вектор; \dots — $3^{\text{й}}$ собственный вектор.

Осцилляции третьего и последующих собственных векторов подтверждают, что соответствующие им компоненты не могут относиться к тренду.

На рис. 4 показан график временного ряда, восстановленного по 1 – 2 тройкам, вектор остатков (шума). Ряд остатков, полученный после удаления трендовой компоненты, приведен на рис. 5.

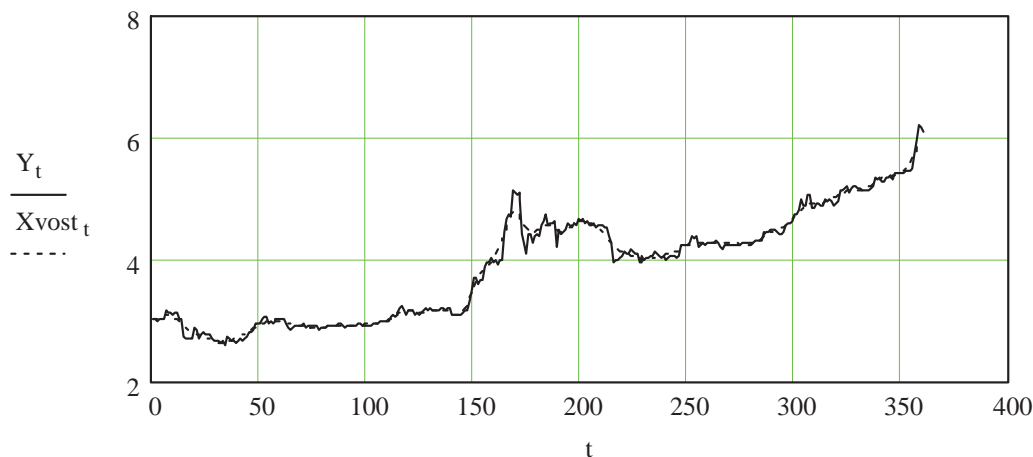


Рис. 4 – Исходный ряд, Y_t —; восстановленный ряд, $Xvost_t$ — \dots , t – время.

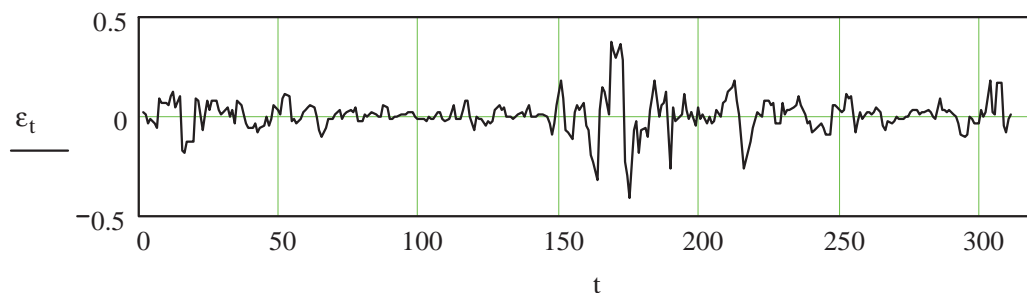


Рис. 5 – График остаточной компоненты ϵ_t , t – время.

Характер автокорреляционной функции, (рис. 6) подтверждает стационарность шумовой компоненты.

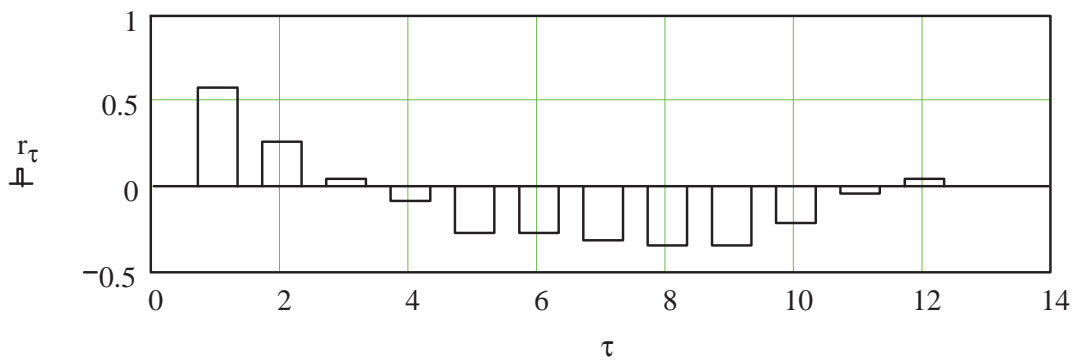


Рис. 6 – Автокорреляционная функция остаточной компоненты.

Данный метод исследования позволяет рассмотреть прогноз. К сожалению, дать статистическую оценку точности не представляется возможным в силу непараметричности метода SSA. Пусть X – траекторная матрица ряда, *восстановленного* по K^* компонентам. Выборка, представленная матрицей X , принадлежит некоторой поверхности S . В качестве базиса этой поверхности можно взять отобранные собственные вектора U_1, \dots, U_{K^*} , входящие в сингулярные тройки, образующие матрицу X .

Запишем разложение i -го столбца матрицы X по базису U_1, \dots, U_{K^*}

$$X^{(i)} = (U_1, U_2, \dots, U_{K^*}) \cdot (m_1^i, m_2^i, \dots, m_{K^*}^i)^T, \quad (4)$$

где m_i – неизвестные параметры разложения, подлежащие определению.

Число уравнений системы (4) меньше числа неизвестных, то есть система *недоопределенная*.

Добавим к матрице X $K^* + 1$ столбец и запишем соотношение (4) для этого столбца:

$$(U_1 \ U_2 \ \dots \ U_{K^*}) \cdot \begin{pmatrix} m_1^{K^*+1} \\ m_2^{K^*+1} \\ \vdots \\ m_{K^*}^{K^*+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{K^*+1} \\ x_{K^*+2} \\ \vdots \\ x_{K^*+L+1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Последний элемент в столбце X^{K^*+1} – это *прогнозное значение*, подлежащее определению. Отбросим в системе (5) последнее уравнение, содержащее неизвестное x_{K^*+L+1} . Решив полученную усеченную систему уравнений, найдем параметры разложения $(m_1^{K^*+1} \ \dots \ m_{K^*}^{K^*+1})^T$

$$\vec{m} = (U_*^T \cdot U_*)^{-1} U_* \cdot X_*$$

Где U_* обозначает усеченную матрицу собственных значений. Теперь можно определить прогнозное значение

$$x_{K^*+L+1} = (u_L^1 \ u_L^2 \ \dots \ u_L^{K^*}) \cdot \vec{m}. \quad (6)$$

Для нахождения следующего прогнозного значения алгоритм повторяется с известным x_{K^*+L+1} .

К сожалению, отсутствие математической модели не позволяет получить статистическую оценку точности прогноза. Однако доказано [10,11], что точность обеспечивается асимптотически.

Результаты применения методики приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Результаты применения методики

Дата продажи	16.01.2018	17.01.2018	18.01.2018
Цена продажи (\$)	13650	11880	11960
Прогноз (\$)	14090	12420	11170
Погрешность (%)	3.9	4.5	6.6

Вывод. Получен более точный прогноз по сравнению с применением для прогнозирования моделей ARIMA и ARFIMA-FIGARCH даже и в «критических» для этих моделей случаях. В дальнейшем результаты прогнозирования возможно улучшить за счет разработки корректных методов подбора наиболее влияющих на прогноз факторов, а также комбинируя модель SSA с другими методами прогнозирования курса и точек перелома тренда.

Список литературы

1. Федоров А. В. Анализ финансовых рынков и торговли финансовыми активами. – Санкт-Петербург, 2007. – 234 с. – Режим доступа : www.forexclub.ua. – Дата обращения : 02 февраля 2018.
2. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – Москва : Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
3. Гомозов С. П., Сорокоумов И. О., Яновський О. В. Моделювання оцінки вартості акцій // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2010. – № 67. – С. 34 – 38.
4. Гуляева О. С., Цветков В. П., Цветков И. В. Фрактальный анализ валютных временных рядов // Финансы и кредит. – № 9 (249). – 2007. – С. 30 – 35.
5. Ширяев В. И. Финансовые рынки: Нейронные сети, хаос и нелинейная динамика. Изд. 2, испр. и доп. – М. : Либроком, 2009. – 232 с.
6. Данилов Д. Л., Жиглявский А. А. Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница». – Санкт-Петербург : Пресском, 1997. – 307 с.
7. Голыандина Н. Э. Метод «Гусеница»-SSA : прогноз временных рядов : Учеб. пособие. – Санкт-Петербург : Изд-во СПбГУ, 2004. – 52 с.
8. Голыандина Н., Некруткин В., Степанов Д. Варианты метода «Гусеница»-SSA для анализа многомерных временных рядов // Труды II Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'03. – Москва, 2003. – С. 2139 – 2168.
9. Peters E. Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment & Economics. – New York : J. Wiley&Sons, 1994. – 336 p.
10. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Business. – Vol. 45. – 1973.
11. Sornette D. Critical market crashes // Physics Reports. – 2003. – Vol. 378 (1). – P. 1 – 98. doi: 10.1016/S0370-1573(02)00634-8.
12. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. – Berlin : Springer, 2013. – 120 p.

References (transliterated)

1. Fedorov A. V. *Analiz finansovykh rynkov i torgovlya finansovymi aktivami* [Analysis of financial markets and trading of financial assets]. Saint Petersburg, 2007. 234 p. Available at: www.forexclub.ua. (accessed 02.02.2018).
2. Lukashin Yu. P. *Adaptivnye metody kratkosrochnogo prognozirovaniya vremennykh ryadov* [Adaptive methods for time series short-term prediction]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2003. 416 p.
3. Gomofov E. P., Sorokoumov I. O., Yanovskyy O. V. *Modelyuvannya otsinky vartosti aktsiy* [Modeling share value estimates]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of the NTU "KhPI"]. Kharkiv, 2010, no. 67, pp. 34–38.
4. Gulyaeva O. S., Tsvetkov V. P., Tsvetkov I. V. *Fraktal'nyy analiz valyutnykh vremennykh ryadov* [Fractal analysis of currency time series]. *Finansy i kredit* [Finances and Credit]. 2007, no. 9 (249), pp. 30–35.
5. Shiryayev V. I. *Finansovyye rynki : Neyronnyye seti, khaos i nelineynaya dinamika. Izd. 2, ispr. i dop.* [Financial markets: neuron networks, chaos, and non-linear dynamics. 2nd ed. corrected and expanded]. Moscow, Librokom Publ., 2009. 232 p.
6. Danilov D. L., Zhiglyavskiy A. A. *Glavnyye komponenty vremennykh ryadov : metod "Gusenitsa"* [Main components of time series: "Caterpillar" method]. Saint Petersburg, Presskom Publ., 1997. 307 p.
7. Golyandina N. E. *Metod "Gusenitsa"-SSA : prognoz vremennykh ryadov : Ucheb. posobie* ["Caterpillar"-SSA method: time series prediction. Textbook]. Saint Petersburg, Izd-vo SpbGU Publ., 2004. 52 p.
8. Golyandina N., Nekrutkin V., Stepanov D. *Varianty metoda "Gusenitsa"-SSA dlya analiza mnogomernykh vremennykh ryadov* [Versions of "caterpillar"-SSA method for analyzing multi-dimensional time series]. *Trudy II Mezhdunarodnoy konferentsii "Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya" SICPRO'03* [Proceedings of the II International Conference "System Identification and Control Problems" SICPRO'03]. Moscow, 2003, pp. 2139–2168.
9. Peters E. *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment & Economics*. New York, J. Wiley&Sons Publ., 1994. 336 p.
10. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Business*. 1973, vol. 45.
11. Sornette D. Critical market crashes. *Physics Reports*. 2003, vol. 378 (1), pp. 1–98. doi: 10.1016/S0370-1573(02)00634-8.
12. Golyandina N., Zhigljavsky A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. Berlin, Springer Publ., 2013. 120 p.

Поступила (received) 12.02.2017

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гардер Сергій Євгенійович (Гардер Сергей Евгеньевич, Harder Sergei Evgenyevich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 529-56-46; e-mail: sergey.garder@gmail.com.

Гомозов Євген Павлович (Гомозов Евгений Павлович, Gomofov Yevgen Pavlovich) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 514-01-33; e-mail: kayaker0011@gmail.com.