методов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПИ», 2016. – №16 (1188). – С. 5 – 15.
4. LS-DYNA Theory manual. *Compiled by J. O. Hallquist*. – Livermore Software Technology Corporation, 2006. – 680 p.
5. LS-DYNA Keyword User's Manual. Version 971. – Livermore : LSTC, 2006. – 2102 c.

References (transliterated)

1. *ANSYS Mechanical APDL User's Guide. Command Reference. Release 15.0.* SAS IP, Inc., 2013. 1858 p.
2. Svetlichnyy S. P. Analiz deformatsiy stal'noy plity-misheni pri udare myagkogo tela [Analysis of deformation of steel target plate under soft body impact]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirovannye tekhnologii.: Sb. nauch. tr. nats. aerokosmicheskogo un-ta im. N. E. Zhukovskogo "Kharkovskiy aviatsionnyy institute"* [Open information and computer integrated technologies. Collection of scientific papers of N. Ye. Zhukovskiy National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute"]. Kharkov, KhAI Publ., 2017, vol. 77, pp. 73–80.
3. Vanin V. A., Svetlichnyy S. P. Chislennoe issledovanie vzaimodeystviya tushki ptitsy s pregradoy na osnove setochnogo i bessetochnogo metodov [Numerical study of bird carcass to obstacle interaction using grid-based and gridless methods]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2016, no. 16 (1188), pp. 5–15.
4. *LS-DYNA Theory manual.* Compiled by J. O. Hallquist. Livermore Software Technology Corporation, 2006. 680 p.
5. *LS-DYNA Keyword User's Manual. Version 971.* Livermore, LSTC, 2006. 2102 p.

Поступила (received) 12.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ванін Віктор Антонович (Ванин Виктор Антонович, Vanin Viktor Antonovych) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: plbvva5652xpi@gmail.com.

Світличний Сергій Петрович (Светличный Сергей Петрович, Svetlichnyy Sergey Petrovich) – старший викладач, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (099) 632-88-54; e-mail: spp.kharkov@gmail.com.

УДК 539.3

В. О. ВАХНЕНКО

БЛУКАЮЧА ХВИЛЯ В ГОМОКЛІННОМУ ПІДХОДІ

Розглядається гомоклінний підхід для знаходження розв'язків рівняння Вахненка-Паркеса. Гомоклінна тестова функція дає можливість знайти бризерні розв'язки. Обговорюється питання переходу бризерних розв'язків у блукаючу хвилю. Відомо, що блукаючі хвилі виникають не тільки в океані, але також і в нелінійно фізичних системах, таких як плазма, Бозе-Ейнштейнівський конденсат, нелінійна оптика, гідродинаміка. Дослідження блукаючої хвилі вказує на те, що вона виникає нізвідки та дисипує безслідно. Амплітуда таких хвиль значно перевищує амплітуду відомих хвиль. Розв'язки для блукаючих хвиль вказують на локалізацію хвиль як в просторі, так і в часі. Це зумовлює їх непередбачуваність. Таким чином, вивчення бризерних хвиль, зокрема блукаючих хвиль, набуває важливого значення з точки зору їх взаємодії з іншими збуреннями, що вже вивчені для рівняння, що аналізується.

Ключові слова: нелінійні еволюційні рівняння, рівняння Вахненка, гомоклінний метод, бризер.

В. А. ВАХНЕНКО

БЛУЖДАЮЩАЯ ВОЛНА В ГОМОКЛИННОМ ПОДХОДЕ

Рассматривается гомоклинный подход для нахождения решений уравнения Вахненко-Паркеса. Гомоклинная тестовая функция дает возможность найти бризерные решения. Обсуждается вопрос перехода бризерных решений в блуждающую волну. Известно, что блуждающие волны возникают не только в океане, но также и в нелинейных физических системах, таких как плазма, Бозе-Ейнштейновский конденсат, нелинейная оптика, гидродинамика. Исследования блуждающей волны указывают на то, что она возникает из ниоткуда и исчезает бесследно. Амплитуда таких волн значительно превышает амплитуду известных волн. Решения для блуждающих волн указывают на локализацию волн как в пространстве, так и во времени. Таким образом, изучение бризерных волн, в частности блуждающих волн, приобретает важное значение с точки зрения их взаимодействия с другими возмущениями, что уже изучены для анализируемого уравнения.

Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, уравнение Вахненко, гомоклинный метод, бризер.

V. O. VAKHNENKO

THE ROGUE WAVE IN A HOMOCLINIC APPROACH

The homoclinic approach is considered to find solutions for the Vakhnenko-Parkes equation. The homoclinic test function enables one to obtain the breather solutions. The transformation of breather solution into rogue wave solution is discussed. It is known that rogue waves arise not only in the ocean, but also in nonlinearly physical systems such as plasma, Bose-Einstein condensate, nonlinear optics, hydrodynamics. The study of the rogue wave indicates that these waves appear from nowhere and disappears without a trace. The amplitude of this wave exceeds the amplitude of the known waves. The solutions for rogue waves point at the localization of waves both in space and in time. These imply their unpredictability. Thus, the study of breather waves, in particular rogue waves, for the Vakhnenko-Parkes equation becomes important with respect to interaction of these waves with other perturbations that have already been studied for the analyzed equation.

Key words: nonlinear evolution equations, the Vakhnenko equation, homoclinic method, breather.

Вступ. Дослідження точних розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь відіграють значну роль у вивченні фізичних явищ. Низка фізичних задач приводить до *рівняння Вахненка* (*the Vakhnenko equation* (VE)):

$$(u_t + uu_x)_x + u = 0, \tag{1}$$

яке однозначно пов'язане з *рівнянням Вахненка – Паркеса* (*the Vakhnenko – Parkes equation* (VPE))

$$W_{XXT} + (1+W_T)W_X = 0 \tag{2}$$

через перетворення незалежних змінних [1 – 5]. Зокрема, для нелінійної оптики рівняння VE було отримано в роботі [4] під час дослідження гранично коротких імпульсів, коли не мають сенсу поняття звичайної і незвичайної хвиль. В той же час в роботі [5] рівняння VE одержано при дослідженні розповсюдження гранично коротких імпульсів в умовах двопроменевого заломлення, яке наведене паралельними електричним і магнітним полями. Розв'язки рівняння VE, в тому числі *періодичні* і *однопетлеві розв'язки*, були отримані в роботі [2]. Також в цій роботі були знайдені двопетлеві розв'язки. Важливою особливістю цих розв'язків є те, що вони утримують властивість структурної стійкості, так само, як і *солітонні розв'язки нелінійних рівнянь*, що інтегруються *методом оберненої задачі розсіяння* (ОЗР). Як відомо, визначальна властивість таких нелінійних рівнянь полягає в можливості їх представити у вигляді умови сумісництва перевизначеної системи лінійних рівнянь (*пара Лакса*).

Аналіз останніх досліджень. За допомогою *методу Хіроти*, який тісно пов'язаний з методом ОЗР, з врахуванням змінення незалежних змінних (перехід в інші координати) в [6, 7] побудовані двопетлеві та багатопетлеві розв'язки рівняння VE, які також утримують властивість *солітонів*. Ця властивість явно вказує на інтегрованість VE методом ОЗР. Крім того, інтегрованість рівняння VE була доведена в роботі [8], де було показано, що воно пов'язане з *рівнянням Цицейка* [9 – 12], (інколи цитується як *рівняння Додда – Буллафа* [13]). *Перетворення Беклунда* і пара Лакса для рівняння VPE наводяться в [18]. В той же час, так звані *бризерні розв'язки* для рівняння VE були знайдені тільки в роботі [5]. В цій роботі формули (63), (85) – (88) визначають параметрично 1-бризерний розв'язок рівняння VE. Графіки 1-бризерного розв'язку для деяких значень параметрів, які взяті з роботи [5], подані на рис. 1.

Таким чином в [5] доведено, що обмежений 1-бризерний розв'язок рівняння VE являється неоднозначним при довільних значеннях своїх параметрів. Як показало дослідження в роботі [5], умову однозначності задовольняють тільки скінченнозонні розв'язки, що відповідають періодичним стаціонарним розв'язкам скалярної версії VE.

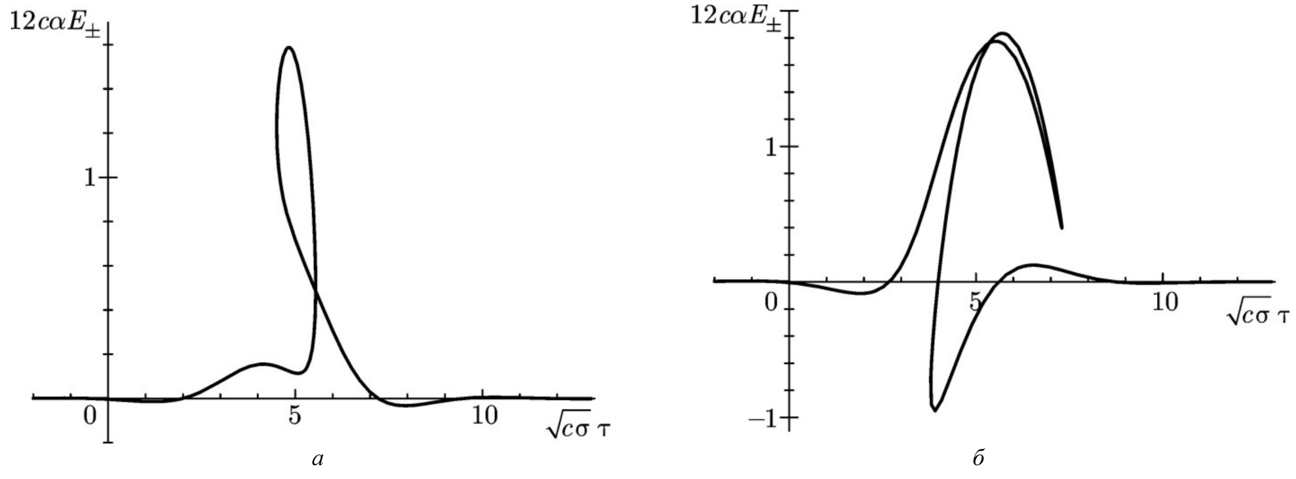

Рис. 1 – Бризерні розв'язки для VE з [5].

Постановка задачі. Звертаємо увагу, що для рівняння VPE (2) досліджено тільки випадок полюсів у зв'язаній (дискретній) частині спектру, а також подібний (в математичному сенсі) сингулярний спектр, що утримує δ – функції у неперервній частині спектру [18 – 21]. Нам вдалося дослідити не тільки прості полюси, якими, як правило, обмежені відомі дослідження, а також полюси другого порядку [22, 23].

Все ж таки, в недавніх дослідженнях [24] знайдені розв'язки для VPE (відмітимо, що не методом ОЗР) не вдається звести до розв'язків, що відповідають дослідженим на цей час спектральним даним. Розглянемо *гомоклінний підхід* [14 – 17] та застосуємо його до VPE.

Результати дослідження. Рівняння VPE (2) потрібно переписати у білінійній формі Хіроти [18]

$$\left(D_X^3 D_T + D_X^2\right) f \cdot f = 0 \tag{3}$$

через W, що визначається як $W_X = u$, $W = 6\left(\ln f\right)_X$. Білінійний оператор похідної D_X, D_T був запропонований *Хіротою*

$$D_X^m D_T^n f(X,T)\cdot g(X,T) = \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial T'}\right)^n \left(f(X,T) g(X',T')\right)\Big|_{X'=X,\,T'=T}. \tag{4}$$

Виконуються співвідношення

$$\left(D_X^3 D_T\right) f \cdot f = 2\left(f_{XXX} f - 3 f_{XXT} f_X + 3 f_{XT} f_{XX} - f_{XXX} f_T\right), \quad \left(D_X^2\right) f \cdot f = 2\left(f_{XT} f - f_X f_T\right). \tag{5}$$

Розв'язуючи початкове рівняння (2) через гомоклінну функцію, яка подається у вигляді

$$f(X,T) = \exp\left[-p_1(X - w_1 T)\right] + c_1 \cos\left[p_2(X + w_2 T)\right] + c_2 \exp\left[p_1(X - w_1 T)\right] \tag{6}$$

можемо отримати співвідношення між p_i, c_i, w_i для $i = 1,2$. Підстановка функції (6) в рівняння (3), враховуючи (5), дає співвідношення, в якому, прирівнявши коефіцієнти при

$$\exp\left[jp_1(X - w_1 T)\right], \quad j = -1, 0, +1, \quad \cos\left[p_2(X + w_2 T)\right], \quad \sin\left[p_2(X + w_2 T)\right]$$

до нуля, отримуємо співвідношення для p_i, c_i, w_i для $i = 1,2$. Якщо визначальними змінними вважати p_1, p_2, c_1, тоді згідно з [25] маємо функціональні залежності для інших змінних

$$w_1 = w_2 = \left(p_2^2 + p_1^2\right)^{-1}, \quad c_2 = -c_1 \frac{p_2^2(-3p_2^2 + p_1^2)}{4p_1^2(3p_1^2 - p_2^2)}. \tag{7}$$

Таким чином, гомоклінна тестова функція дає можливість знайти розв'язки VPE, зокрема, бризерні розв'язки. На рис. 2 поданий графік бризера.

В граничному випадку наведені розв'язки переходять у блукаючу хвилю (інколи її ще називають як величезна хвиля, *хвиля-вбивця* (rogue wave або huge wave)). Значні зусилля було прикладено, щоб зрозуміти та вивчити природу утаємниченого явища, яким вважається блукаюча хвиля. Зараз відомо, що блукаючі хвилі виникають не тільки в океані, але також і в нелінійно фізичних системах, таких як плазма [26], *Бозе – Ейнштейнівський конденсат* [27], нелінійна оптика [28 – 31], гідродинаміка [32 – 35]. Дослідження блукаючої хвилі вказує, що вона виникає нізвідки та дисипує безслідно [36]. Амплітуда таких хвиль значно перевищує амплітуду відомих хвиль. Розв'язки для блукаючих хвиль вказують на локалізацію хвиль як в просторі, так і в часі. Це зумовлює їх непередбачуваність.

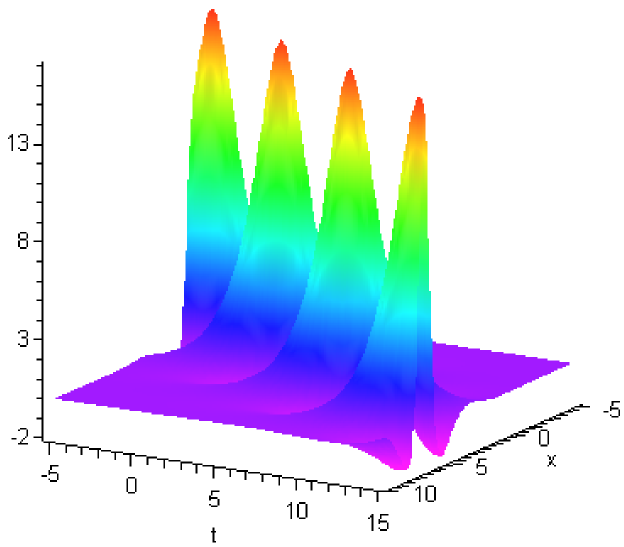

Рис. 2 – Бризерні хвилі для VPE з $p_1 = 0.95$, $p_2 = 1.23$, $c_1 = 0.5$.

Розв'язок (6) з (7) не вдається записати у вигляді

$$f = 1 + a_1 \exp(\theta_1) + a_2 \exp(\theta_2) + a_3 \exp(\theta_3) + b_{12} a_1 a_2 \exp(\theta_1 + \theta_2) + b_{23} a_2 a_3 \exp(\theta_2 + \theta_3) +$$
$$+ b_{13} a_1 a_3 \exp(\theta_1 + \theta_3) + b_{23} a_2 a_3 \exp(\theta_2 + \theta_3) + b_{12} b_{13} b_{23} a_1 a_2 a_3 \exp(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \tag{8}$$

З $\theta_i = \xi_i X + \dfrac{1}{\xi_i} T$, a_i – сталі, $b_{ij} = \dfrac{(a_i - a_j)^2}{(a_i + a_j)^2} \dfrac{a_i^{\,2} + a_j^{\,2} - a_i a_j}{a_i^{\,2} + a_j^{\,2} + a_i a_j}$ – однозначні відомі залежності від a_i, ξ_i – величини зі спектральних даних. Причому для зв'язаного спектру $\operatorname{Im}(\xi_i) = 0$, а для неперервного спектру $\operatorname{Re}(\xi_i) = 0$.

Таким чином, з'ясувалось, що розв'язок для (6), (7) [25] не може бути зведений до спектру тільки полюсів у зв'язаному спектрі та δ – функцій у неперервному спектрі. Саме такі спектри та розв'язки для цих спектрів нами були раніше вивчені [19 – 21].

Тут доречно звернутися до досліджень рівняння KdV. Дослідження, що пов'язані з скінченнозонними розв'язками для KdV, вказують на суттєве розширення класу можливих розв'язків. Для скінченнозонних розв'язків KdV одержано формули через θ – *функції Рімана* [37 – 39].

Тут ми звертаємо увагу на співвідношення (4). Ось в чому ключове твердження: для (2) складна залежність розв'язку від координат та часу можливо може бути подібною до співвідношень для розв'язків KdV, отриманих для скінченнозонних потенціалів.

Скінченнозонні розв’язки пов’язані з рімановими поверхнями, що виникають як важливий атрибут в *підході Рімана – Гільберта*. В [40] стверджується, що ріманова поверхня відіграє таку ж саму роль для скінченнозонних розв’язків, що і спектр для початкової задачі (мається на увазі спектр в методі ОЗР).

В [41 – 43] розвивається підхід Рімана – Гільберта для VE, який базується на парі Лакса. Цей підхід дав можливість оперувати реальними, в фізичному сенсі, змінними так, що початкові дані є функціями фізичних координат, які еволюціонують з часом. Особливим результатом, отриманим в цих роботах, можна вважати, що в розвинутому підході вдалося отримати довгочасову асимптотику розв’язків *задачі Коши*.

Висновки. Відкритим залишається питання про встановлення спектру для бризерного розв’язку [5, 24]. З’ясування цього питання дало б можливість проаналізувати гомоклінний метод [11], за допомогою якого знайдені бризерні розв’язки, з точки зору ОЗР.

Який з підходів: чи підхід Рімана – Гільберта, пов’язаний з *поверхнею Рімана*, чи, можливо, підхід, в якому потрібно розглядати скінченнозонні потенціали, виявиться більш придатним? З вирішенням цього питання ми пов’язуємо можливості дослідження взаємодії солітонів, бризерів та періодичних хвиль.

Таким чином, зрозуміло, що вивчення бризерних хвиль, зокрема блукаючих хвиль, для рівняння VE (або VPE) набуває важливого значення з точки зору їх взаємодії з іншими збуреннями, які вже вивчені для VE.

Список литературы

1. *Hunter J. K.* Numerical solutions of some nonlinear dispersive wave equations // Lectures in Applied Mathematics. – 1990. – Vol. 26. – P. 301 – 316.
2. *Vakhnenko V. A.* Solitons in a nonlinear model medium // J. Phys. A : Math.Gen. – 1992. – Vol. 25. – P. 4181 – 4187.
3. *Kraenkel R. A., Leblond H., Manna M. A.* An integrable evolution equation for surface waves in deep water // J. Phys. A : Math. Theor. – 2014. – Vol. 47. – No. 2. – P. 025208 (17p).
4. *Sazonov S. V., Ustinov N. V.* Extremely short vector solitons under the conditions of conical refraction // JETP Letters. – 2014. – Vol. 99, no. 9. – P.503 – 507.
5. *Sazonov S. V., Ustinov N. V.* Nonlinear Propagation of Vector Extremely Short Pulses in a Medium of Symmetric and Asymmetric Molecules // JETP. – 2017. – Vol. 124, no. 2. – P. 213 – 230.
6. *Vakhnenko V. O., Parkes E. J.* The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation // Nonlinearity. – 1998. – Vol.11. – P.1457 – 1464.
7. *Morrison A. J., Parkes E. J., Vakhnenko V. O.* The N loop soliton solution of the Vakhnenko equation // Nonlinearity. – 1999. – Vol. 12. – P. 1427 – 1437.
8. *Manna M. A., Neveu A.* Short-wave dynamics in the Euler equations // Inverse Problems. – 2001. – Vol. 17. – P. 855 – 861.
9. *Tzitzéica G.* Sur une nouvelle classe de surfaces // Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences Paris. – 1907. – Vol. 144. – P. 1257 – 1259.
10. *Dodd R. K., Bullough R. K.* Bäcklund transformations for the sine-Gordon equations // Proc. Roy. Soc. London. – 1976. – Ser. A 351. – P. 499 – 523.
11. *Жибер А. В., Шабат А. Б.* Уравнения Клейна – Гордона с нетривиальной группой // ДАН СССР. – 1979. – Т. 247. – No. 5. – С. 1103 – 1107.
12. *Mikhailov, A.V.* Integrability of a two-dimensional generalization of the Toda chain // JETP Letters. – 1979. – Vol. 30, no. 7. – P. 414 – 418.
13. *Dodd, R. K., Eilbeck, J. C., Gibbon, J. D., Morris, H. C. Solitons and Nonlinear Wave Equations.* – London et al.: Academic Press, 1982. – 630 p.
14. *Dai Z. D., Jiang M. R., Dai Q. Y., Li S. L.* Homoclinic bifurcation for the Boussinesq equation with even constraints // Chin. Phys. Lett. – 2006. – Vol. 23. – No. 5. – P. 1065 – 1067.
15. *Dai Z. D., Liu Z. J., Li D. L.* Exact periodic solitary-wave solutions for the KdV equation // Chin. Phys. Lett. – 2008. – Vol. 25. – No. 5. – P. 1531 – 1533.
16. *Dai Z. D., Liu J., Zeng X. P., Liu Z. J.* Periodic kink-wave and kinky periodic-wave solutions for the Jimbo–Miwa equation // Phys. Lett. A. – 2008. – Vol. 372. – No. 38. – P. 5984 – 5986.
17. *Dai Z. D., Song L., Fu H., Zeng X.* Exact three wave solutions for the KP equation // Appl. Math. Comput. – 2010. – Vol. 216. – No. 5. – P. 1599 – 1604.
18. *Vakhnenko V. O., Parkes E. J.* Approach in theory of nonlinear evolution equations : the Vakhnenko–Parkes equation // Advances in Mathematical Physics. – 2016. – Vol. 2016. – Article ID 2916582. – 39 p.
19. *Vakhnenko V. O., Parkes E. J.* Solutions Associated with Discrete and Continuous Spectrums in the Inverse Scattering Method for the Vakhnenko – Parkes Equation // Progr. Theor. Phys. – 2012. – Vol. 127. – No. 4. – P. 593 – 613.
20. *Vakhnenko V. O., Parkes E. J.* Special singularity function for continuous part of the spectral data in the associated eigenvalue problem for nonlinear equations // JMP. – 2012. – Vol. 53. – No. 6. – P. 063504.
21. *Vakhnenko V. O., Parkes E. J.* The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method // Chaos, Solitons and Fractals. – 2012. – Vol. 45. – P. 846 – 852.
22. *Vakhnenko V. O., Parkes E. J.* The inverse problem for some special spectral data // Chaos, Solitons and Fractals. – 2016. – V. 82. – P. 116 – 124.
23. *Вахненко В. О.* Простий полюс та полюс другого порядку в оберненій задачі розсіяння // Допов. НАН Укр. – 2017. – № 7. – С. 10 – 17.
24. *Mukam S. P. T., Kuetche V. K., Bouetou T. B.* Localized waves in a general coupled nonlinear Schrödinger equation // *Eur. Phys. J. Plus*. – 2017. – Vol. 132. – P. 182 – 188.
25. *Abdou M. A., Soliman A. A., Elgarayhi A.* New periodic solitary wave solutions for an extended generalization of Vakhnenko equation. // Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences. – 2015. – Vol. 18. – P. 99 – 101.
26. *Bailung H., Sharma S. K., Nakamura Y.* Observation of Peregrine Solitons in a Multicomponent Plasma with Negative Ions // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 107. – P. 255005.
27. *Bludov Y. V., Konotop V. V., Akhmediev N.* Matter rogue waves // Phys. Rev.A. – 2009. – Vol. 80. – P. 033610.
28. *Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Akhmediev N.* Super Rogue Waves: Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves // Phys. Rev. X. – 2012. – Vol. 2. – P. 011015.
29. *Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Slunyaev A., Sergeeva A., Pelinovsky E., Akhmediev N.* Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank // Phys. Rev. E. – 2012. – Vol. 86. – P. 056601.
30. *Lecaplain C., Grelu Ph., Soto-Crespo J. M., Akhmediev N.* Dissipative Rogue Waves Generated by Chaotic Pulse Bunching in a Mode-Locked Laser // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 108. – P. 233901.
31. *Pisarchik A. N., Jaimes-Retegui R., Sevila-Escoboza R., Cuellar G., Taki M.* Rogue Waves in a Multistable System. // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 107. – P. 274101.
32. *Onorato M., Residori S., Bortolozzo U., Montina A., Arecchi F. T.* Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts // Phys. Rep. – 2013. – Vol. 528. – P.47.

33. *Solli D. R., Ropers C., Koonath P., Jalali B.* Optical rogue waves // Nature. – 2007. – Vol. 450. – P. 1054 – 1057.
34. *Chabchoub A., Hoffmann N. P., Akhmediev N.* Rogue Wave Observation in a Water Wave Tank // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 106. – P. 204502.
35. *Kibler B., Fatome J., Finot C., Millot G., Dias F., Genty G., Akhmediev N., Dudley J. M.* Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre // Nat. Phys. – 2010. – Vol. 6. – P. 790 – 795.
36. *Akhmediev N., Ankiewicz A., Taki M.* Waves that appear from nowhere and disappear without a trace // Phys. Lett. A – 2009. – Vol. 373. – P. 675 – 678.
37. *Dubrovin B A*. Theta functions and non-linear equations // *Russian Mathematical Surveys*. – 1981. – Vol.36, no. 2. – P. 11 – 92.
38. *Novikov S. P.* A Method of Solving the Periodic Problem for the KDV Equation and Its Generalization. *Solitons /* Eds: Bullough R.K., Caudrey P. – Berlin Heidelberg: Springer–Verlag, 1980. – P. 325 – 338.
39. *Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Publisher: Springer, 1984. – 276 p.
40. *Newell A. C. Solitons in mathematics and physics* - Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985. – 244 p.
41. *Boutet de Monvel A., Shepelsky D.* The Ostrovsky–Vakhnenko equation: a Riemann–Hilbert approach // C. R. Math. Acad. Sci. Paris Ser. I, – 2014. – Vol. 352. – P. 189 – 195.
42. *Boutet de Monvel A., Shepelsky D.* The Ostrovsky-Vakhnenko equation by a Riemann-Hilbert approach // J. Phys. A: Math. Theor. – 2015. – Vol. 48. – P. 035204.
43. *Xu J., Fan E.* The initial-boundary value problem for the Ostrovsky-Vakhnenko equation on the half-line // Math. Phys. Anal. Geom. – 2016. – Vol. 19. – P. 20.

References (transliterated)

1. Hunter J. K. Numerical solutions of some nonlinear dispersive wave equations. *Lectures in Applied Mathematics.* 1990, vol. 26, pp. 301–316.
2. Vakhnenko V. A. Solitons in a nonlinear model medium. *J. Phys. A : Math.Gen.* 1992, vol. 25, pp. 4181–4187.
3. Kraenkel R. A., Leblond H., Manna M. A. An integrable evolution equation for surface waves in deep water. *J. Phys. A : Math. Theor.* 2014, vol. 47, no. 2, pp. 025208 (17p).
4. Sazonov S. V., Ustinov N. V. Extremely short vector solitons under the conditions of conical refraction. *JETP Letters.* 2014, vol. 99, no. 9, pp.503–507.
5. Sazonov S. V., Ustinov N. V. Nonlinear Propagation of Vector Extremely Short Pulses in a Medium of Symmetric and Asymmetric Molecules. *JETP*. 2017, vol. 124, no. 2, pp. 213–230.
6. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation. *Nonlinearity*. 1998, vol. 11, pp.1457–1464.
7. Morrison A. J., Parkes E. J., Vakhnenko V. O. The N loop soliton solution of the Vakhnenko equation. *Nonlinearity.* 1999, vol. 12, pp.1427–1437.
8. Manna M. A., Neveu A. Short-wave dynamics in the Euler equations. *Inverse Problems.* 2001, vol. 17, pp. 855–861.
9. Tzitzéica G. Sur une nouvelle classe de surfaces. *Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences Paris.* 1907, vol. 144, pp. 1257–1259.
10. Dodd R. K., Bullough R. K. Bäcklund transformations for the sine-Gordon equations. *Proc. Roy. Soc. London*. 1976, Ser. A 351, pp. 499–523.
11. Zhiber A. V., Shabat A. B. Uravneniya Kleyna – Gordona s netrivial'noy gruppoy [The Klein–Gordon equation with nontrivial group]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1979, vol. 247, no. 5, pp.1103–1107.
12. Mikhailov, A.V. Integrability of a two-dimensional generalization of the Toda chain. *JETP Lett*. 1979, vol. 30, no. 7, pp. 414–418.
13. Dodd, R. K., Eilbeck, J. C., Gibbon, J. D., Morris, H. C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. – London et al.: Academic Press, 1982, 630 p.
14. Dai Z. D., Jiang M. R., Dai Q. Y., Li S. L. Homoclinic bifurcation for the Boussinesq equation with even constraints. *Chin. Phys. Lett*. 2006, vol. 23, no. 5, pp. 1065–1067.
15. Dai Z. D., Liu Z. J., Li D. L. Exact periodic solitary-wave solutions for the KdV equation. *Chin. Phys. Lett*. 2008, vol. 25, no. 5, pp. 1531–1533.
16. Dai Z. D., Liu J., Zeng X. P., Liu Z. J. Periodic kink-wave and kinky periodic-wave solutions for the Jimbo–Miwa equation. *Phys. Lett. A.* 2008, vol. 372, no 38, pp. 5984–5986.
17. Dai Z. D., Song L, Fu H., Zeng X. Exact three wave solutions for the KP equation. *Appl. Math. Comput*. 2010, vol. 216, no. 5, pp. 1599–1604.
18. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Approach in theory of nonlinear evolution equations : the Vakhnenko – Parkes equation. *Advances in Mathematical Physics.* 2016, vol.2016, article ID 2916582, 39 p.
19. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Solutions Associated with Discrete and Continuous Spectrums in the Inverse Scattering Method for the Vakhnenko-Parkes Equation. *Progr. Theor. Phys*. 2012, vol. 127, no. 4, pp. 593–613.
20. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Special singularity function for continuous part of the spectral data in the associated eigenvalue problem for nonlinear equations. *JMP*. 2012, vol. 53, no6, pp. 063504.
21. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2012, vol. 45, pp. 846–852.
22. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The inverse problem for some special spectral data. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2016, vol. 82, pp. 116–124.
23. Vakhnenko V. O. Prostyy polyus ta polyus drugogo poryadku v oberneniy zadachi rozsiyannya [A single pole and a double pole in the inverse scattering transform method]. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr* [Reports of the Academy of Science of Ukraine]. 2017, no. 7, pp. 10–17.
24. Mukam S. P. T., Kuetche V. K., Bouetou T. B. Localized waves in a general coupled nonlinear Schrödinger equation. *Eur. Phys. J. Plus*. 2017, vol. 132: pp. 182–188.
25. Abdou M. A., Soliman A. A., Elgarayhi A. New periodic solitary wave solutions for an extended generalization of Vakhnenko equation. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*. 2015, vol. 18, pp. 99–101.
26. Bailung H., Sharma S. K., Nakamura Y. Observation of Peregrine Solitons in a Multicomponent Plasma with Negative Ions. *Phys. Rev. Lett*. 2011, vol. 107, pp. 255005.
27. Bludov Y. V., Konotop V. V., Akhmediev N. Matter rogue waves. *Phys. Rev A*. 2009, vol. 80, pp. 033610.
28. Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Akhmediev N. Super Rogue Waves: Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves. *Phys. Rev. X*. 2012, vol. 2, pp. 011015.
29. Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Slunyaev A., Sergeeva A., Pelinovsky E., Akhmediev N. Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank. *Phys. Rev E*. 2012, vol. 86, pp. 056601.
30. Lecaplain C., Grelu Ph., Soto-Crespo, J. M., Akhmediev, N. Dissipative Rogue Waves Generated by Chaotic Pulse Bunching in a Mode-Locked Laser. *Phys. Rev. Lett*. 2012, vol. 108, pp. 233901.
31. Pisarchik A. N., Jaimes-Reátegui R., Sevila-Escoboza R., Cuellar G., Taki M. Rogue Waves in a Multistable System. *Phys. Rev. Lett*. 2011, vol. 107, pp.274101.
32. Onorato M., Residori S., Bortolozzo U., Montina A., Arecchi F. T. Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts. *Phys. Rep*. 2013, vol. 528, pp.47.
33. Solli D. R., Ropers C., Koonath P., Jalali B. Optical rogue waves. *Nature*. 2007, vol. 450, pp. 1054–1057.
34. Chabchoub A., Hoffmann N. P., Akhmediev N. Rogue Wave Observation in a Water Wave Tank. *Phys. Rev. Lett*. 2011, vol. 106, pp. 204502.
35. Kibler B., Fatome J., Finot C., Millot G., Dias F., Genty G., Akhmediev N., Dudley J. M. Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre. *Nat. Phys*. 2010, vol. 6, pp. 790 –795.
36. Akhmediev N., Ankiewicz A., Taki M. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace. *Phys. Lett. A.* 2009, vol. 373, pp. 675–678.
37. Dubrovin B A. Theta functions and non-linear equations. *Russian Mathematical Surveys*. 1981, vol.36, no. 2, pp. 11 – 92.
38. Novikov S. P. A Method of Solving the Periodic Problem for the KDV Equation and Its Generalization. *Solitons /* Eds: Bullough R.K., Caudrey P.

– Berlin Heidelberg: Springer–Verlag, 1980, pp. 325–338.
39. Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Publisher: Springer. 1984, 276p.
40. Newell A. C. *Solitons in mathematics and physics* - Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985, 244 p.
41. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. The Ostrovsky – Vakhnenko equation : a Riemann – Hilbert approach. *Math. Acad. Sci. Paris Ser. I.* 2014, vol. 352, pp. 189–195.
42. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. The Ostrovsky – Vakhnenko equation by a Riemann – Hilbert approach. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2015, vol. 48, pp. 035204.
43. Xu J., Fan E. The initial-boundary value problem for the Ostrovsky-Vakhnenko equation on the half-line. *Math. Phys. Anal. Geom*. 2016, vol. 19, pp. 20.

Надійшла (received) 19.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Вахненко В'ячеслав Олексійович (Вахненко Вячеслав Алексеевич, Vakhnenko Vyacheslav Oleksiyovych) – доктор фізико-математичних наук, головний науковий співробітник, Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, м. Київ; тел.: (063) 428-42-16; e-mail: vakhnenko@ukr.net.

УДК 530.145, 550.344.094

Д. Б. ВЕНГРОВИЧ

ДОСЛІДЖЕННЯ КОМПАКТОНІВ В НАПРУЖЕНИХ ЛАНЦЮГАХ КУЛЬ

Проведено чисельне моделювання розповсюдження усамітненої хвилі в однорідних та неоднорідних ланцюгах гранул сферичної форми, котрі перебувають в стані попереднього стиснення. Задача розв'язувалась методом прямих, після зведення рівнянь руху гранул до системи нелінійних рівнянь першого порядку. Для верифікації розв'язку було проведено паралельне експериментальне дослідження розповсюдження солітоноподібної хвилі в ланцюгах сферичних сильно намагнічених гранул. Магнітна взаємодія гранул призводила до попереднього стиснення всього ланцюга і регулювалась в процесі експеримента шляхом перемагнічування гранул, а також використанням гранул двох різних розмірів (в цих випадках попереднє стиснення ланцюгів теж відрізнялось). Наведено результати роботи програми та аналіз результатів проведеного обчислювального експерименту і ці результати співставлені з експериментальними даними.

Ключові слова: усамітнені хвилі, нелінійні рівняння, компактон, солітоноподібна хвиля, дискретне середовище.

Д. Б. ВЕНГРОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПАКТОНОВ В НАПРЯЖЁННЫХ ЦЕПЯХ ШАРОВ

Проведено численное моделирование распространения уединённой волны в однородных и неоднородных цепочках гранул сферической формы, которые находятся в состоянии предварительного сжатия. Задача решалась методом прямых, после сведения уравнений движения гранул к систему нелинейных уравнений первого порядка. Для верификации решения было проведено параллельное экспериментальное исследование распространения солитоноподобной волны в цепях сферических сильно намагниченных гранул. Магнитное взаимодействие гранул приводило к сжатию всей цепи, которое регулировалась в процессе эксперимента путём перемагничивания гранул, а также использованием гранул двух разных размеров (в этих случаях предварительное сжатие цепей тоже отличалось). Приведены результаты работы программы и анализ результатов проведенного вычислительного эксперимента и эти результаты сопоставлены с экспериментальными данными.

Ключевые слова: уединённые волны, нелинейные уравнения, компактон, солитоноподобная волна, дискретная среда.

D. B. VENGROVICH

INVESTIGATION OF COMPACTONS IN PRESTRESSED CHAINS OF BALLS

A numerical simulation of the propagation of a solitary wave in homogeneous and inhomogeneous chains of spherical granules, which are in a state of pre-compression, has been carried out. The problem was solved by the method of lines, after reducing the equations of motion of the granules to a system of first-order nonlinear equations. To verify the solution, a parallel experimental study of the propagation of a soliton-like wave in spherical chains of strongly magnetized granules was carried out. The magnetic interaction of the granules resulted in the compression of the whole chain, which was regulated during the experiment by reversing the granules, as well as using granules of two different sizes (in these cases the preliminary compression of the chains was also different). The results of the program and the analysis of the results of the computational experiment are presented and these results are compared with the experimental data.

Key words: solitary waves, nonlinear equations, compacton, soliton-like wave, discrete medium.

Вступ. Дослідження присвячене моделюванню поширення *нелінійних збурень* в *дискретному середовищі*, яке проводилось паралельно чисельними методами та в ряді випадків безпосереднім експериментальним вимірюванням. В цьому напрямку така робота проводиться нами в зв'язку з дослідженням поведінки геофізичного середовища, а конкретніше верхніх шарів земної кори, з точки зору не суцільного середовища, а сукупності блоків, елементів, структурованих певним чином. Блоковість та структурованість признана в польовій геофізиці, з іншого боку стає очевидним, що їх врахування привносить в теорію динаміки літосфери широке поле нових можливостей. Сучасні дослідження нелінійних хвиль в природних середовищах актуальні зокрема в області нелінійної геофізики, коли, наприклад, моделюють виникнення та розповсюдження хвилі в околі джерела землетру-