

- Berlin Heidelberg: Springer–Verlag, 1980, pp. 325–338.
39. Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Publisher: Springer. 1984, 276p.
40. Newell A. C. *Solitons in mathematics and physics* - Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985, 244 p.
41. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. The Ostrovsky – Vakhnenko equation : a Riemann – Hilbert approach. *Math. Acad. Sci. Paris Ser. I*. 2014, vol. 352, pp. 189–195.
42. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. The Ostrovsky – Vakhnenko equation by a Riemann – Hilbert approach. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2015, vol. 48, pp. 035204.
43. Xu J., Fan E. The initial-boundary value problem for the Ostrovsky-Vakhnenko equation on the half-line. *Math. Phys. Anal. Geom.* 2016, vol. 19, pp. 20.

Надійшла (received) 19.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Вахненко В'ячеслав Олексійович (Вахненко Вячеслав Алексеевич, Vakhnenko Vyacheslav Oleksiyovych) – доктор фізико-математичних наук, головний науковий співробітник, Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, м. Київ; тел.: (063) 428-42-16; e-mail: vakhnenko@ukr.net.

УДК 530.145, 550.344.094

Д. Б. ВЕНГРОВИЧ

ДОСЛІДЖЕННЯ КОМПАКТОНІВ В НАПРУЖЕНИХ ЛАНЦЮГАХ КУЛЬ

Проведено чисельне моделювання розповсюдження усамітненої хвилі в однорідних та неоднорідних ланцюгах гранул сферичної форми, котрі перебувають в стані попереднього стиснення. Задача розв'язувалась методом прямих, після зведення рівнянь руху гранул до системи нелінійних рівнянь першого порядку. Для верифікації розв'язку було проведено паралельне експериментальне дослідження розповсюдження солітоноподібної хвилі в ланцюгах сферичних сильно намагнічених гранул. Магнітна взаємодія гранул призводила до попереднього стиснення всього ланцюга і регулювалась в процесі експеримента шляхом перемагнічування гранул, а також використанням гранул двох різних розмірів (в цих випадках попереднє стиснення ланцюгів теж відрізнялось). Наведено результати роботи програми та аналіз результатів проведеного обчислювального експерименту і ці результати співставлені з експериментальними даними.

Ключові слова: усамітнені хвилі, нелінійні рівняння, компактон, солітоноподібна хвиля, дискретне середовище.

Д. Б. ВЕНГРОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПАКТОНОВ В НАПРЯЖЁННЫХ ЦЕПЯХ ШАРОВ

Проведено численне моделювання розповсюдження уединённой волни в однородных и неоднородных цепочках гранул сферической формы, которые находятся в состоянии предварительного сжатия. Задача решалась методом прямых, после сведения уравнений движения гранул к системе нелинейных уравнений первого порядка. Для верификации решения было проведено параллельное экспериментальное исследование распространения солитоноподобной волни в цепях сферических сильно намагнитенных гранул. Магнитное взаимодействие гранул приводило к сжатию всей цепи, которое регулировалось в процессе эксперимента путём перемагничивания гранул, а также использованием гранул двух разных размеров (в этих случаях предварительное сжатие цепей тоже отличалось). Приведены результаты работы программы и анализ результатов проведенного вычислительного эксперимента и эти результаты сопоставлены с экспериментальными данными.

Ключевые слова: уединённые волны, нелинейные уравнения, компактон, солитоноподобная волна, дискретная среда.

D. B. VENGROVICH

INVESTIGATION OF COMPACTONS IN PRESTRESSED CHAINS OF BALLS

A numerical simulation of the propagation of a solitary wave in homogeneous and inhomogeneous chains of spherical granules, which are in a state of pre-compression, has been carried out. The problem was solved by the method of lines, after reducing the equations of motion of the granules to a system of first-order nonlinear equations. To verify the solution, a parallel experimental study of the propagation of a soliton-like wave in spherical chains of strongly magnetized granules was carried out. The magnetic interaction of the granules resulted in the compression of the whole chain, which was regulated during the experiment by reversing the granules, as well as using granules of two different sizes (in these cases the preliminary compression of the chains was also different). The results of the program and the analysis of the results of the computational experiment are presented and these results are compared with the experimental data.

Key words: solitary waves, nonlinear equations, compacton, soliton-like wave, discrete medium.

Вступ. Дослідження присвячене моделюванню поширення *нелінійних збурень* в *дискретному середовищі*, яке проводилось паралельно чисельними методами та в ряді випадків безпосереднім експериментальним вимірюванням. В цьому напрямку така робота проводиться нами в зв'язку з дослідженням поведінки геофізичного середовища, а конкретніше верхніх шарів земної кори, з точки зору не суцільного середовища, а сукупності блоків, елементів, структурованих певним чином. Блоковість та структурованість признана в польовій геофізиці, з іншого боку стає очевидним, що їх врахування привносить в теорію динаміки літосфери широке поле нових можливостей. Сучасні дослідження нелінійних хвиль в природних середовищах актуальні зокрема в області нелінійної геофізики, коли, наприклад, моделюють виникнення та розповсюдження хвилі в околі джерела землетру-

© Д. Б. Венгровиц, 2019

су і цей окіл розглядається не з точки зору теорії суцільного середовища, а як середовище дискретне, складене з окремих блоків. Якщо розглядати такі природні середовища, як *літосферу Землі*, а особливо земну кору, як структуровані, складені з окремих взаємодіючих між собою блоків системи, то виникає бажання змодельовати динаміку таких систем з точки зору розповсюдження в них нелінійних хвиль як в ланцюгах гранул.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [1 – 3] на основі підходу до моделювання тектонічних процесів у земній корі з точки зору динаміки контактуючих блоків побудовано теорію тектонічних рухів літосфери, котра добре пояснює широкий спектр таких явищ, як *рифтові процеси* та *субдукція*, *соляна тектоніка* та інші довготривалі рухи *геосередовища*. Було помічено, що в певні моменти на фоні дуже повільних процесів у таких структурованих середовищах відбувається швидка перебудова, основну роль в її перебігу грають хвильові процеси. Так в роботах [2, 11 – 13] було встановлено, що в динаміці земна кора деформується з виникненням напружених ланцюгів блоків, виникає локалізація напружень і розриви, у місцях розривів формуються джерела нелінійних хвиль, котрі потім трансформуються в звичайні сейсмічні хвилі. Тому надалі в рамках розробленої моделі елементної динаміки окремо досліджувалось виникнення та поширення нелінійних хвиль в ланцюгах гранул, поширення звукових хвиль в суцільних середовищах з *гранулоподібними включеннями*, в композитних матеріалах [6, 7, 8].

Постановка задачі. Отже, дослідимо поведінку *солітоноподібної хвилі* в однорідних і неоднорідному ланцюжках пружних куль, що взаємодіють за законом Герца, при цьому знаходячись в стані попереднього стиснення вздовж усього ланцюга, або таке стиснення відсутнє. Ланцюжок в розрахунках складався з 1000 сталевих куль однакового радіусу $r_0 = 2.06$ см, $m_0 = 284.9$ г (в експериментах використовувались ланцюги 40 – 300 куль з різних матеріалів). Наводяться результати чисельного моделювання цих процесів з їх експериментальним підтвердженням.

Як відомо [6, 9], удар кулею по ланцюжку таких же куль викликає поширення в ній солітоноподібної хвилі. Ці хвилі поведуться подібно до класичних солітонів суцільних середовищ – взаємно розсіюються майже пружно зі зсувом фази. Поряд з цим вони мають ряд особливостей, викликаних відсутністю суцільності середовища, в якому вони поширюються. Слід підкреслити, що у випадку ланцюжка куль, має місце нелінійність двох видів. Перша викликана нелінійним законом силової взаємодії. Але, як відомо в механіці, до нелінійної поведінки систем призводить і наявність зазорів, розривів суцільності, тобто зникнення взаємодії між кулями за їх розходження. Таким чином, остання обставина призводить до відмінностей в поведінці солітоноподібних хвиль в такому середовищі від класичних солітонів суцільних середовищ [6], такі хвилі можна вважати *компактонами*.

Математичне моделювання контактної взаємодіючих куль (всі контакти ідентичні) проведене чисельним рішенням системи диференціальних рівнянь:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_j F_{ij}, \quad (1)$$

де *сила Герца*: $F_{ij} = \frac{2\theta}{3} \sqrt{\frac{r}{2}} \varepsilon_{ij}^{3/2}$ і зникає при зникненні контакту; $\theta \equiv \frac{E}{1-\sigma^2}$; $\varepsilon_{ij} = 2r - \left(\sum_{k=1,2} (x_i^k - x_j^k)^2 \right)^{1/2}$; властивості матеріалу ланцюжка (сталь): $\rho = 7.78 \cdot 10^3$ кг/м³; $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\sigma = 0.29$.

Початковою умовою вважатимемо удар крайньою кулею по ланцюгу з початковою швидкістю:

$$\left. \frac{dx_{1000}}{dt} \right|_{t=0} = V_0. \quad (2)$$

У випадку моделювання стисненого ланцюга куль в початкових умовах фіксувались положення крайніх гранул, а відстані між гранулами зменшувались (тоді удар здійснювала гранула 999):

$$x_{1000} = C_1, \quad x_1 = C_2, \quad x_i - x_{i-1} = 2(1-\varepsilon) \cdot r_0. \quad (3)$$

Неоднорідність вносилася зміною маси одної кулі (як, наприклад, № 150 на рис. 6, *a*, *b* [10]) без зміни їх контактів. Внесення неоднорідності в ланцюг задавалось зміною маси однієї з куль з номером n :

$$m_{x_n} = m_0 \pm \Delta. \quad (4)$$

Система нелінійних диференціальних рівнянь (1 – 3) розв'язана *методом прямих* чисельно з використанням *адаптивного методу* і дотриманням максимальних відносних похибок в результатах до 10^{-13} , в якості верифікації використано співставлення з аналогічними експериментами.

Зазначимо одну особливість експериментального моделювання – для ненапружених ланцюгів хвиля генерувалась ударом граничної кулі зі швидкістю до 1 м/с за допомогою маятникового механізму, тобто швидкість масивної ударяючої кулі точно задавалась її відхиленням у маятнику. В роботах [4] досліджувалось розповсюдження звукових хвиль в ланцюжках сталевих кульок в подібній постановці, де було встановлено, що в експерименті тяжко досягнути значного стиснення ланцюга, втримуючи гранули на одній осі. Тому ми вдалися до

дослідження напружених ланцюгів, складених з магнітних куль, оскільки такі ланцюги стійкі, в той час як при стисненні ланцюгів із сталевих куль вони швидко втрачають стійкість. Напруження в таких ланцюгах створюється силами взаємного тяжіння сильно намагнічених неодимових гранул.

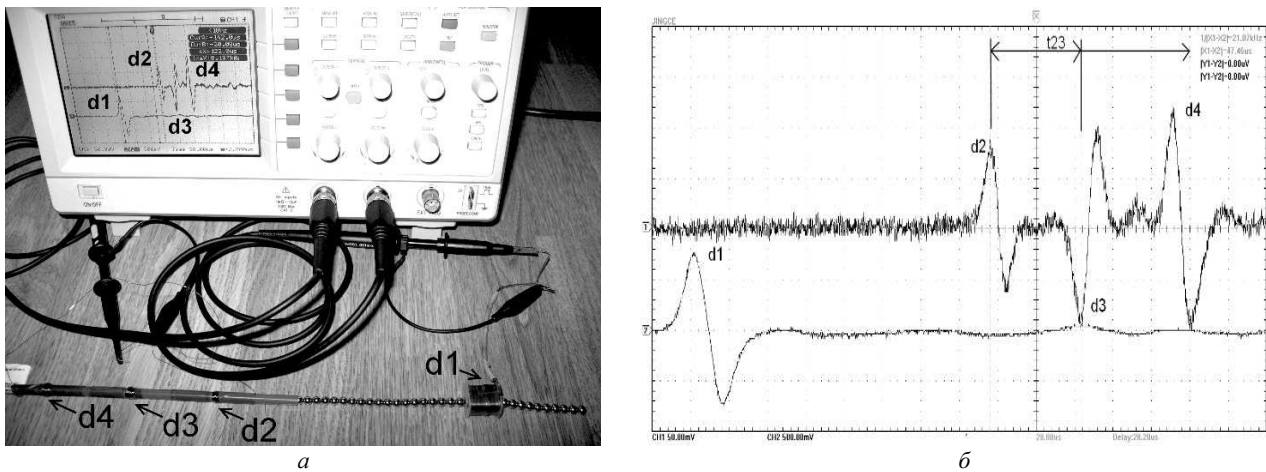


Рис. 1 – Розміщення: *a* – датчиків та *б* – осцилограми 4-х імпульсів, отриманих від удару кулею з відстані 3 см до ланцюга: *d1* – датчик на 1-му каналі та 3 послідовно включені датчики *d2*, *d3*, *d4* на 2-му каналі осцилографа.

На рис. 1 приведено зовнішній вигляд ланцюга магнітних куль, розміщення на ланцюгу датчиків та осцилограми імпульсів від удару однією кулею (що примагнічується до ланцюга справа з боку давача *d1*). В даному випадку датчиками слугують зовнішні котушки. Рух намагнічених гранул всередині них призводить до наведених імпульсів струму, що реєструє осцилограф. Таким чином, ланцюг не зазнає додаткових спотворюючих впливів від розміщення давачів.

Таблиця 1 – властивості магнітних гранул двох наборів

Параметри	Значення
Діаметр гранул №1	5.028 ± 0.002 мм
Діаметр гранул №2.	4.75 ± 0.005 мм
Маси гранул №1	0.49108 ± 0.00038 г
Маси гранул №2	0.3322 ± 0.0006 г
Густина гранул №1	7.3917 ± 0.003 г/см ³
Густина гранул №2	7.401 ± 0.009 г/см ³
Коефіцієнт Пуассона	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$
Модуль Юнга	$E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^6$ ГПа
Сплав (Furlani [2001])	NdFeB 37 MGOe з лінійним <i>B-N</i> співвідношенням
Магнітний потік	12.2–12.6 KGs
Коерцитивна сила H_c	>11.0 KOe (950000 A/m)
Температура Кюр'є	310° C робоча температура (макс. 80° C)

У випадку дослідження намагнічених гранул здавалось, що буде складно точно задати швидкість удару магнітною кулею по ланцюгу таких же намагнічених куль через їх невеликий розмір. Виявилось, що це не так, одна намагнічена куля, наближена до ланцюга, притягується до нього та розганяється до однієї швидкості, з дуже високою точністю, коли її рух починається з відстані 3 – 12 см. Щоб проілюструвати це, розв'яжемо задачу магнітостатики, визначивши сили, що діють на намагнічену кулю з боку намагніченого ланцюга куль методом скінчених елементів (застосовано програму FEMM– пакет моделювання взаємодії магнітних матеріалів, відносна точність розрахунків $1 \cdot 10^{-8}$). На рис. 2, *a* приведено осесиметричне розташування неодимових кульок (сплав NdFeB), котрі використовувались в експерименті. Розташовуючи ударяючу кулю на різних відстанях від ланцюга, ми чисельно визначали силу тяжіння F , інтегруючи чисельно розраховані польові величини по об'єму кулі. (рис. 2, *б*) і таким чином отримали інтерпольовану функціональну залежність сили тяжіння гранули від відстані до ланцюга (рис. 2, *в*).

На рис. 2 приведено послідовність розв'язку задачі магнітостатики – обраховано методом скінчених елементів силу, що діє на намагнічену гранулу, яка перебуває на певній відстані x в полі магнітного ланцюга.

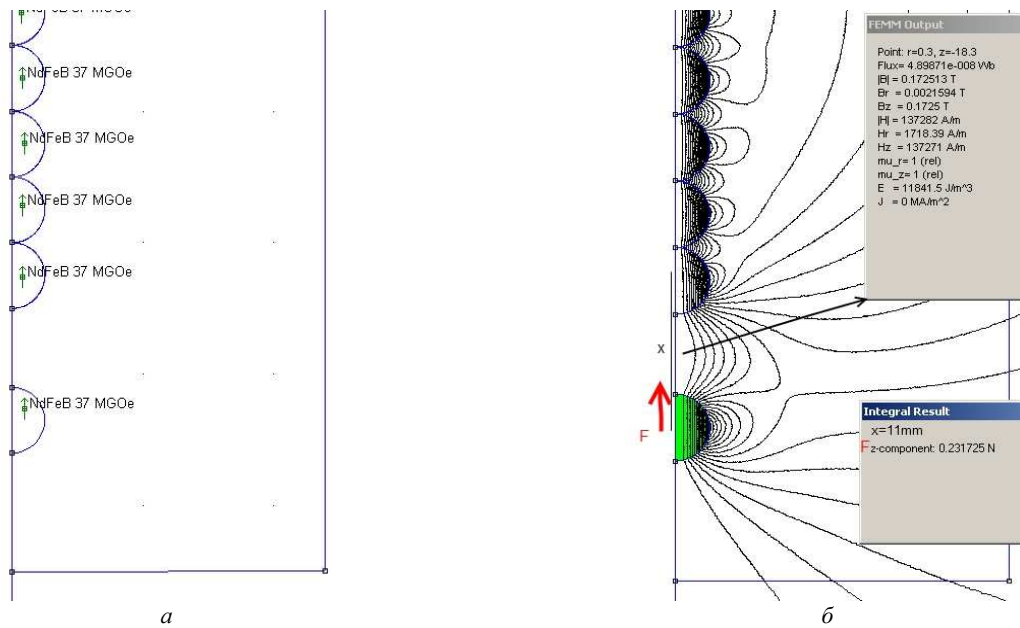
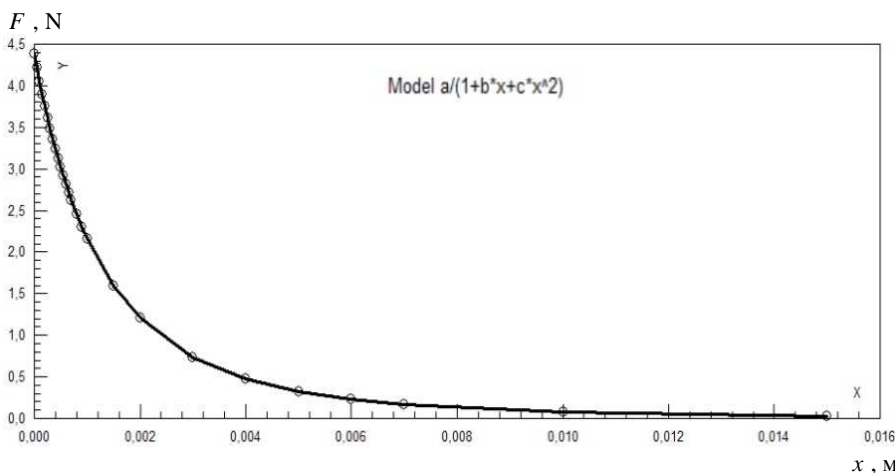


Рис. 2 – Моделювання взаємодії намагнічених сфер методом скінченних елементів:
 а – область моделювання ланцюга неодимових сферичних магнітів в осесиметричній постановці;
 б – величини полів та визначена інтегральна сила F , що діє на одну гранулу на відстані x до ланцюга.



$$\vec{F}_0(x[M]) = Y^{\text{model fit.}} = a / (1 + bx + cx^2), \quad (a = 4,3604, b = 729,5656, c = 306969,87)$$

Рис. 2 – Моделювання взаємодії намагнічених сфер методом скінченних елементів:
 в – сила притягування гранули, що знаходиться на відстані x , м до ланцюга.

$$= 0, x[0] == 15, x'[0] == 0, x, \{t, 0, 1.35\}; \text{Plot[Evaluate}[x[t]/. \%], \{t, 0, 1.35\}, \text{Filling} \rightarrow \text{Axis}]. \quad (5)$$

На рис. 3 приведено розв'язки (5) в пакеті Mathematica 9.0, які показують зростання швидкості ударяючої гранули, що розганяється з різних відстаней. В обох випадках отримано швидкість удару 1 м/с.

Отже, в експериментах, котрі проводились для верифікації розв'язків нелінійних рівнянь, для фіксації хвиль в ланцюгах куль використовувались давачі трьох типів. Для визначення швидкостей хвиль в однорідних ланцюгах сталевих куль достатньо у якості давача використати гранулу ланцюга, розрізавши її та помістивши всередину п'єзокристал, що генерує сигнал при проходженні через нього хвилі стиснення. В експериментах з використанням магнітних куль давачем служить котушка навкруг гранули, де останню генерується імпульс струму при її рухах. В експериментальному дослідженні неоднорідних ланцюгів [10], де генеруються додаткові імпульси складної природи і необхідно виключити можливість внесення додаткових спотворень від датчиків, вимірювалась швидкість руху точки на поверхні куль в ланцюжку. У цій точці до куль прикріплювалась тонка пластинка нехтовно малої маси, коливання якої фіксувалися оптичним методом. За цими коливаннями чисельно відновлювалась швидкість руху точки кріплення. (Виявилось [10], що неоднорідність в ненапруженому ланцюгу у вигляді дефекту або межі розділу є джерелом вторинних солітонів, відображених U_i або заломлених D_i , що мають різні швидкості, а іноді, різні часові моменти генерації. Цей результат (рис. 6, а, б) ми приводимо для порівняння з новими даними, отриманими для аналогічних але попередньо напружених ланцюгів).

Приведена на рис. 2, б залежність сили, що діє на гранулу з боку ланцюга, дає можливість обчислити в околі ланцюга інтерполяційну функцію

$$\vec{F}_0(x[M]) = Y^{\text{model fit.}} = a / (1 + bx + cx^2).$$

Цю силу в подальшому використовуємо для розв'язання рівняння динаміки (1) примагнічування кулі № 1: в пакеті Mathematica 9.0, застосувавши команди:

```
NDSolve[{x''[t]+ 8879.84/(1+
+72957x[t]+306968.8 x[t] x[t])=
=0,x[0] ==0.035,x'[0] ==0},x,
{t,0,0.135}];
Plot[Evaluate[x[t]/. \%],{t,0,1.35}];
NDSolve[{x''[t]+905.31/(1+
+0.73x[t]+0.31 x[t] x[t])=
```

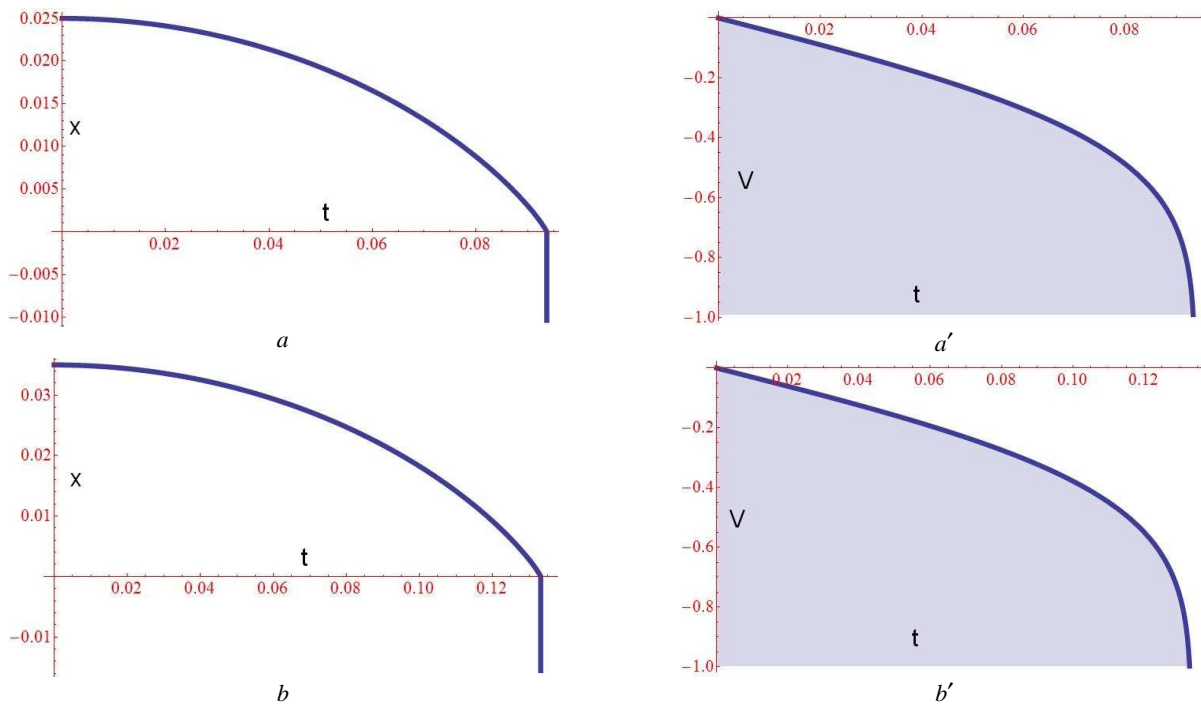


Рис. 3 – Удари гранулами з відстані: $a - 25$ мм; $b - 35$ мм. Час до зіткнення: $a - 0.09$ с; $b - 0.13$ с.
В обох випадках a' та b' – результуюча швидкість удару – 1.0 м/с.

Результати чисельного та експериментального моделювання. Проведене комп'ютерне моделювання на базі системи рівнянь (1 – 3) з необхідними граничними умовами процесу поширення хвилі деформації в структурах, утворених попереднім напруженням модельного блокового середовища. Його експериментальне підтвердження, показало (рис. 4 – 5), що зі збільшенням стиснення ланцюга куль зростає швидкість нелінійної усамітненої хвилі в ньому:

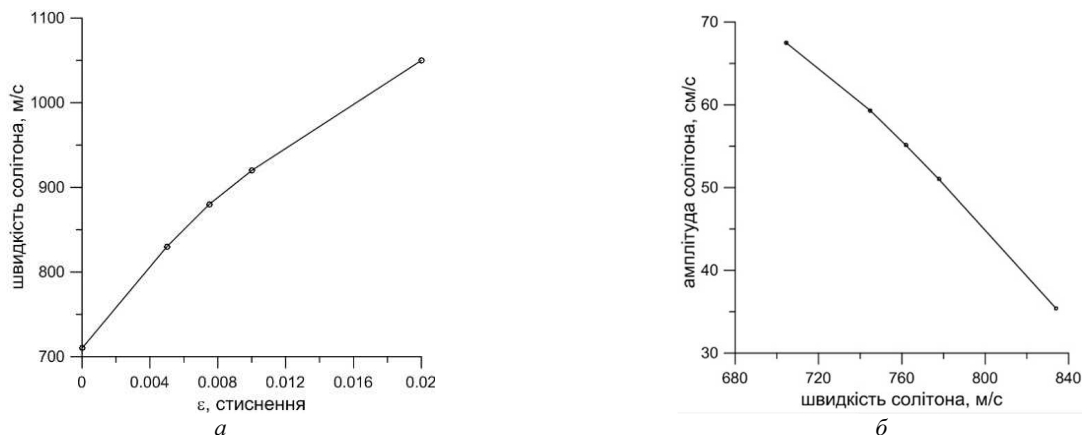


Рис. 4 – Амплітудно-фазові характеристики солітона в попередньо-стисненому ланцюгу сталених куль ($d = 4.12$ см):
 a – зростання фазової швидкості солітона при збільшенні деформації ε ланцюга, $V_0 = 1$ м/с;
 b – падіння амплітуди солітона при збільшенні стиснення і фазової швидкості.

Однак неочевидною є залежність фазової швидкості хвилі від її амплітуди - у випадку стиснених ланцюгів швидші хвилі (зі збільшенням стиснення) мають все меншу амплітуду. Для нестиснених ланцюгів, навпаки, хвилі більшої амплітуди мають більшу швидкість [6]. Виявилось, що у випадку стисненого ланцюга в ньому розповсюджується вже не локалізований компактон, а компактон з великим хвостом (рис. 7 – 5, 7), котрий зростає зі збільшенням стиснення, тому амплітуда першої «солітонної» його частини зменшується, перерозподіляючись до хвостової частини. Докладніше прояв такої структури нелінійної хвилі можна проаналізувати, розглянувши проходження солітона через дефект ланцюжка.

Як видно з результатів моделювання (рис. 6), дефект ланцюжка на шляху солітона стає джерелом вторинних солітонів. Розсіювання на такому дефекті в залежності від його маси породжує спектр взаємодіючих вторинних солітоноподібних хвиль (рис. 6, $a - b$) та ще більш складну але якісно схожу картину взаємодіючих солітоноподібних та періодичних хвиль для стиснених ланцюгів (рис. 6, $c - f$).

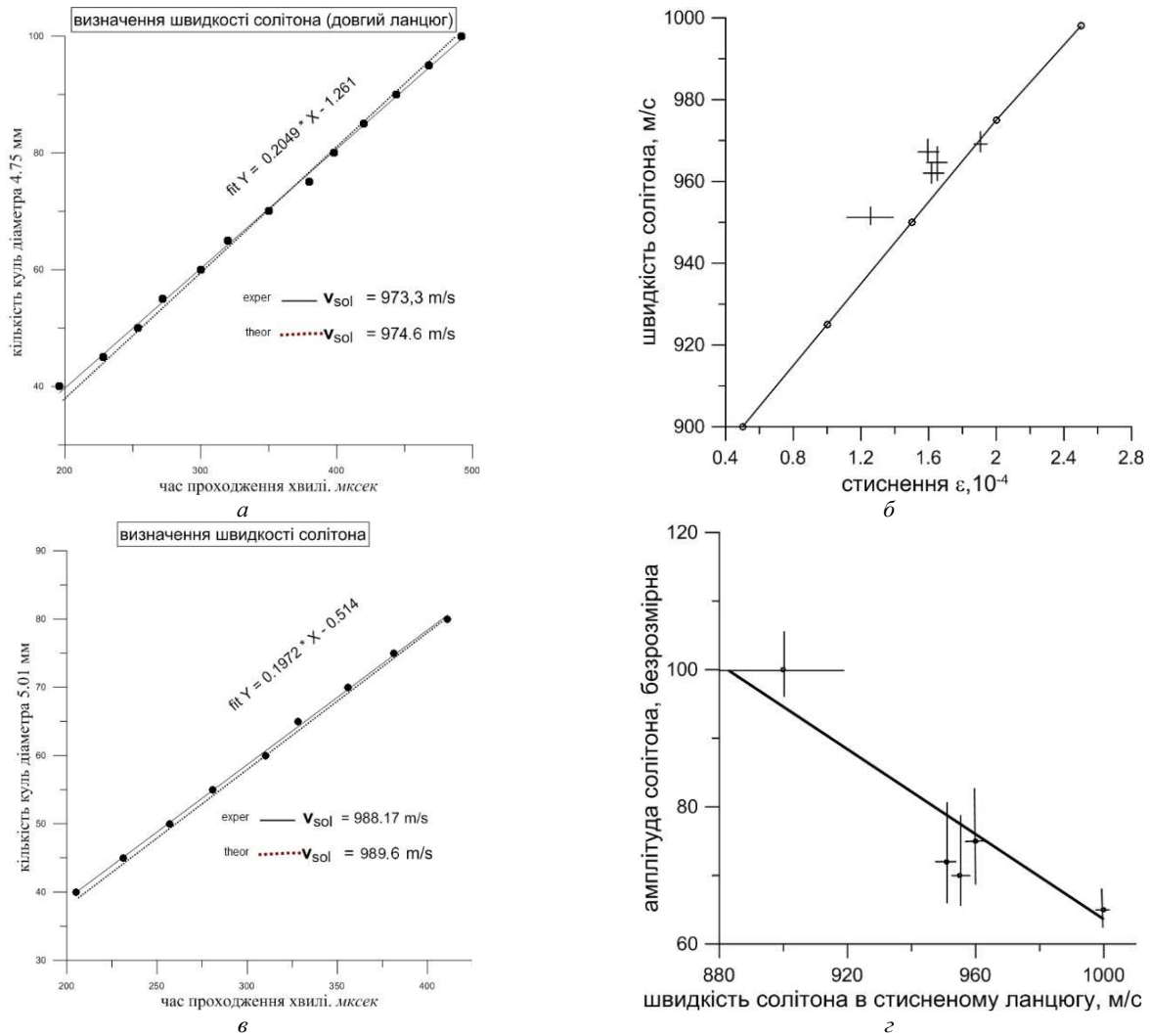


Рис. 5 – Чисельно та експериментально встановлені (по часу проходження імпульсів – *a*, *б*) швидкості солітонів в попередньо-стисненому ланцюгу куль-магнітів: *a* – діаметр куль 0.475 см; *б* – діаметр куль 0.501 см; Експериментально встановлені амплітудно-фазові характеристики солітона в попередньо-стисненому ланцюгу магнітних куль ($d = 4.75$ мм): *в* – суцільна лінія – розрахунок, хрестики – дані з експеримента з похибками; *г* – падіння амплітуди солітона при підвищенні фазової швидкості.

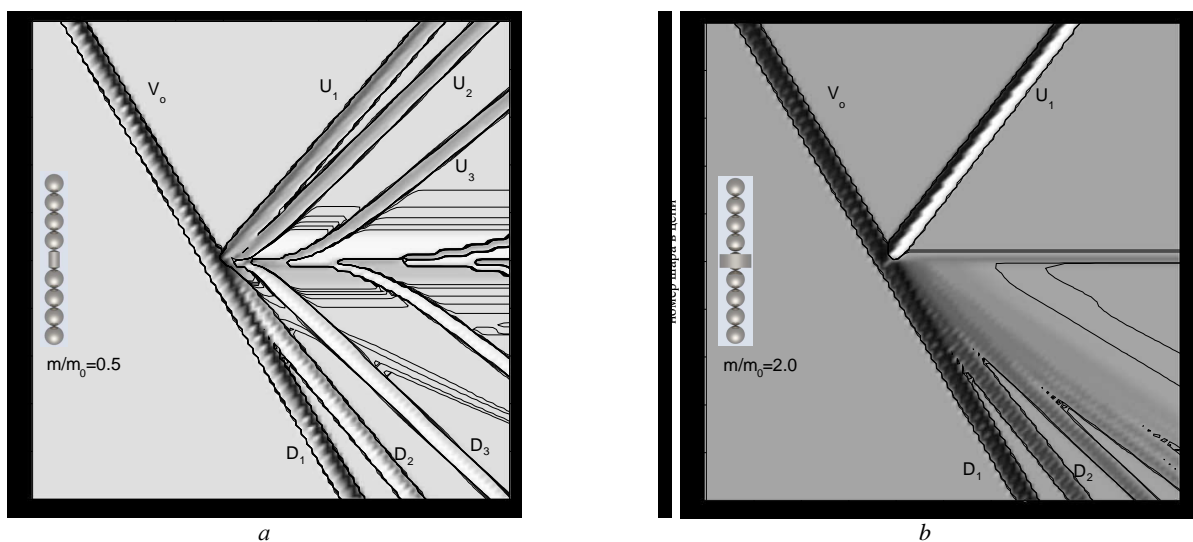


Рис. 6 – Ізолінії масової швидкості куль в ланцюжку з дефектом (*a*, *б* [10] – куля № 150 має масу m в 2 рази меншу або більшу за інші; *с* – *г* – куля № 950 має масу m в 5 раз меншу або більшу); по осях абсцис – час, 10^{-3} с; $a - b - \epsilon = 0$.

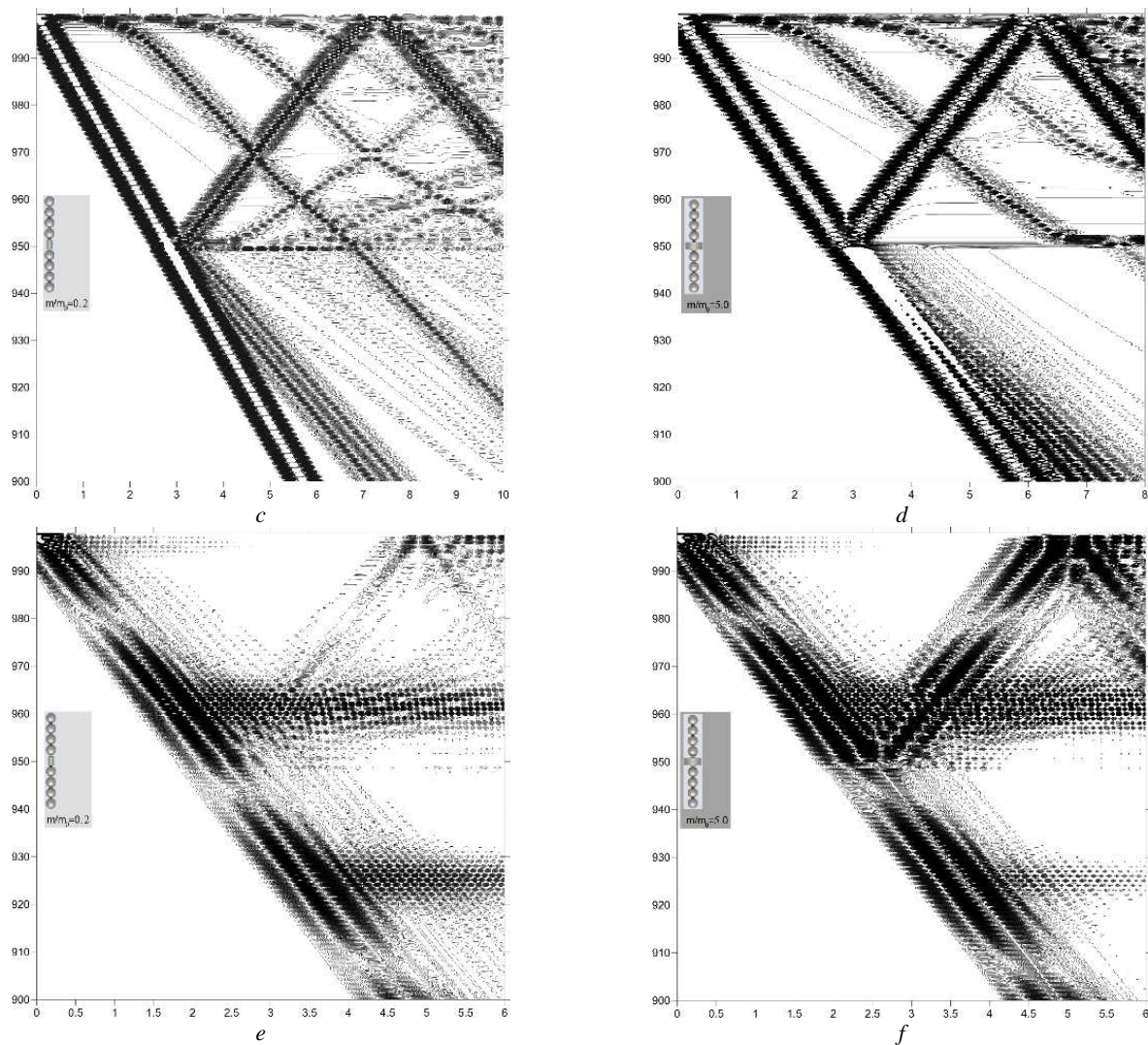


Рис. 6 – Ізолінії масової швидкості куль в ланцюжку з дефектом (*a, b* [10] – куля № 150 має масу m в 2 рази меншу або більшу за інші; *c – f* – куля № 950 має масу m в 5 раз меншу або більшу); по осях абсцис – час, 10^{-3} с; $c – d – \varepsilon = 0.001$; $e – f – \varepsilon = 0.03$.

На рис. 6 приведені розрахункові значення швидкостей солітонів, породжених дефектом в ланцюжку. Залежно від маси дефекту вихідний солітон V_0 розсіюється на певне число відбитих U_i та прохідних D_i солітонів. Причому деяка їх частина випромінюється дефектом значно пізніше самого акту розсіювання. Таким чином, дискретне середовище навколо неоднорідності є збуджуючим і випромінюючим джерелом. На рис. 7 для стиснутих ланцюгів приведено більш детально імпульси швидкості (позначення c, d, e, f відповідають таким же на рис. 6), що проходять через окремі гранули до та після дефектної гранули № 950.

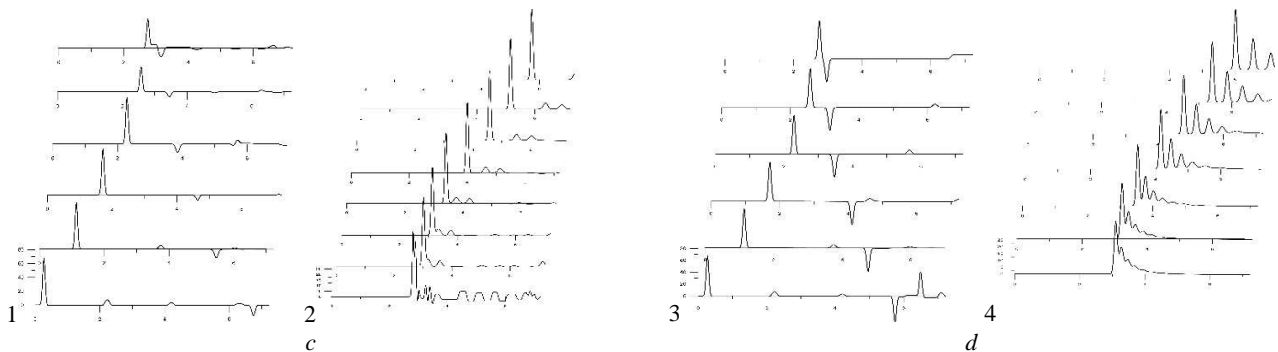


Рис. 7 – Масової швидкості куль в ланцюжку з дефектом, (*c, e* – дефектна куля № 950 має масу в 5 раз меншу або *d, f* – більшу); по осях абсцис – час, 10^{-3} с; $c – d – \varepsilon = 0.001$.

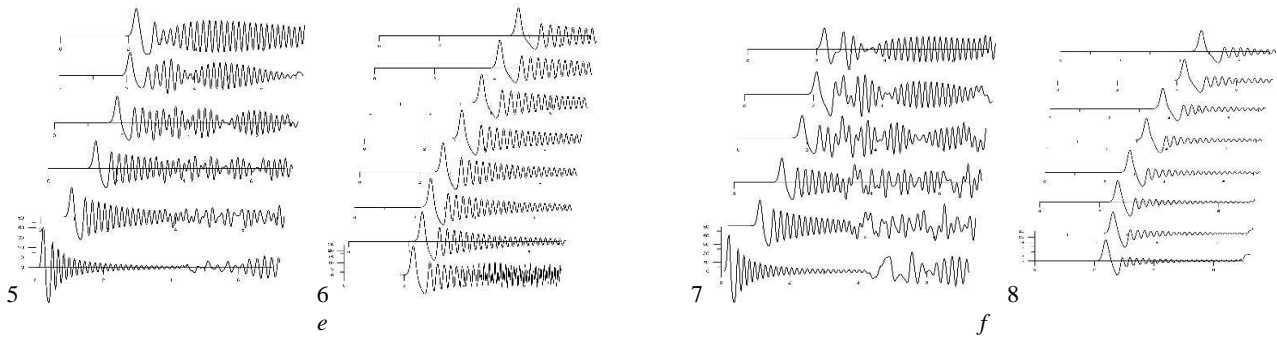


Рис. 7 – Масової швидкості куль в ланцюжку з дефектом, (с, е – дефектна куля № 950 мас масу в 5 раз меншу або d, f – більшу); по осях абсцис – час, 10^{-3} с; e – f – $\epsilon = 0.03$; позначки 1, 3, 5, 7 – графіки для куль до дефекту, розміщені знизу вверх для куль – № 995, № 980, № 970, № 960, № 955, № 952; позначки 2, 4, 6, 8 – графіки для куль після дефекту, розміщені знизу вверх для куль – № 950, № 947, № 945, № 940, № 930, № 920, № 910, № 900.

Висновки. Таким чином ми продовжили дослідження розповсюдження нелінійних хвиль особливого класу (компактонів) в одновимірних ланцюгах гранул, котрі перебувають в стані попереднього стиснення. Отримано нові результати, суттєво відмінні від таких для нестиснених ланцюгів. Виявляється, що в даній моделі природним чином виникають збурення, котрі одразу мають солітоноподібні та хвилеподібні властивості. Тому для геофізичного застосування це дає можливість побудувати механізм перетворення інтенсивної нелінійної хвилі поблизу джерела в сейсмічну хвилю.

Список літератури

1. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Poplavskii K. N. A fully dynamic model of continental rifling applied to the syn-rift evolution of sedimentary basins // *Tectonophysics*. – 1996. – V. 268. – P. 211 – 220.
2. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Kutas R. I., Stovba S. M., Stephenson R. A., Kharitonov O. M. A new geodynamical-thermal model of rift evolution, with application to the Dnieper-Donets Basin // *Tectonophysics*. – 1999. – V. 313. – P. 29 – 40
3. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Kutas R. I., Stovba S. M., Stephenson R. A. Modeling of the Evolution of Sedimentary Basins Including the Structure of the Natural Medium and Self-Organization Processes // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. – 2001. – Vol. 37. – No. 12. – P. 1004 – 1014.
4. Коробов А. И., Бажкин Ю. А., Ширгина Н. В. Нелинейные упругие свойства модели одномерной гранулированной неконсолидированной структуры // *Акустический журнал*. – 2012. – Т. 58. – № 1. – С. 103 – 111.
5. Венгрович Д. Б., Губар І. М., Шеремет Г. П. Дослідження поля напружень в фотопружних структурних елементах моделей геосередовища // Труды научно-технической конференции с международным участием «Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях». – Ч. 2. – Харьков : Харьковский национальный ун-т им. В.Н. Каразина, 2010. – С. 40 – 42.
6. Венгрович Д. Б. Исследование нелинейных процессов динамики структурированных сред // Диссертация к.ф.-м.н.: 01.04.12 – Киев, 1996. – 144с.
7. Венгрович Д. Б. Особенности солитонов дискретных сред // Тезисы докладов Международной конференции «Современные проблемы математики и её приложение в естественных науках и информационных технологиях» (17 – 22 апреля 2011 г.). – Харьков : Харьковский национальный ун-т им. Каразина В.Н., 2011. – С. 199.
8. Венгрович Д. Б. Численное моделирование деформации природных композитных материалов // Труды научно-технической конференции с международным участием «Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях» (24 – 27 апреля 2012 г.). – Харьков : Харьковский национальный университет им. Каразина В.Н., 2012. – С. 71 – 72.
9. Nesterenko V. F. Propagation of nonlinear compression pulses in granular media // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 1983. – V. 24 (5). – P. 733 – 743.
10. Венгрович Д. Б. Взаимодействие солитона с неоднородностями дискретных сред // ДАН НАН Украины. – 2005. – № 4. – С. 100 – 109.
11. Vengrovitch D. B. Tectonic and seismological settings of subduction // 16th International Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects, 2017 (15-17 May 2017, Kiev, Ukraine). – European Association of Geoscientists and Engineers (EAGE), 2017. – pp. 314 – 317. DOI: 10.3997/2214-4609.201701858.
12. Vengrovitch D. B. Computer simulation related to salt tectonics in the Dnieper-Donets basin // *Геофизический журнал*. – 2010. – Т. 32. – № 4. – С. 198 – 200.
13. Vengrovitch D. B., Sheremet G. P. Irregularity of lithospheric stress as a result of plates structure // 18th International Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects, 2019 (13-16 May 2019, Kiev, Ukraine) (to appear).

References (transliterated)

1. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Poplavskii K. N. A fully dynamic model of continental rifling applied to the syn-rift evolution of sedimentary basins. *Tectonophysics*. 1996, vol. 268, pp. 211–220.
2. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Kutas R. I., Stovba S. M., Stephenson R. A., Kharitonov O. M. A new geodynamical-thermal model of rift evolution, with application to the Dnieper-Donets Basin. *Tectonophysics*. 1999, vol. 313, pp. 29–40
3. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Kutas R. I., Stovba S. M., Stephenson R. A. Modeling of the Evolution of Sedimentary Basins Including the Structure of the Natural Medium and Self-Organization Processes. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2001, vol. 37, no. 12, pp. 1004–1014.
4. Korobov A. I., Bazhkin Yu. A., Shirgina N. V. Nelineynye uprugie svoystva modeli odnomernoy granulirovannoy nekonsolidirovannoy struktury [Nonlinear elastic properties of one-dimensional granulated non-consolidated structure model]. *Akusticheskiy zhurnal* [Acoustic journal]. 2012, vol. 58, no. 1, pp. 103–111.
5. Vengrovich D. B., Gubar I. M., Sheremet G. P. Doslidzhennya polya napruzhen' v fotopruznykh strukturykh elementakh modeley geoseredovishha [Studying stress field of geomedium model photoelastic structural units]. *Trudy nauchno-tehnicheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem «Kompyuternoe modelirovanie v naukoymkikh tekhnologiyakh»*. Ch. 2. [Proceedings of the Scientific and Technical Conference with International Participation “Computer Modeling in Knowledge – Intensive Technologies”. Part 2]. Kharkov, Kharkovskiy natsional'nyy un-t im. V.N. Karazina Publ., 2010. pp. 40–42.

6. Vengrovich D. B. *Issledovanie nelineynykh protsessov dinamiki strukturirovannykh sred. Dissertatsiya k.f.-m.n.: 01.04.12* [Studying dynamical processes in structured media : Candidate of Physical and Mathematical Sciences Dissertation Paper 01.04.12]. Kiev, 1996. 144 p.
7. Vengrovich D. B. Osobennosti solitonov diskretnkh sred [Features of discrete media solitons]. *Tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii «Sovremennye problemy matematiki i eyo prilozhenie v estestvennykh naukakh i informatsionnykh tekhnologiyakh» (17 – 22 aprelya 2011 g.)* [Proceedings of the International Conference “Contemporary Problems of Mathematics and its Application to Natural Sciences and Informational Technologies” (17 – 22 April, 2011)]. Kharkov, Kharkovskiy natsional'nyy un-t im. Karazina V.N. Publ., 2011. p. 199.
8. Vengrovich D. B. Chislennoe modelirovanie deformatsii prirodnykh kompozitnykh materialov [Numerical modeling of deformations of composite natural materials]. *Trudy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem «Komp'yuternoe modelirovanie v naukoemkikh tekhnologiyakh» (24 – 27 aprelya 2012 g.)* [Proceedings of the Scientific and Technical Conference with International Participation “Computer Modeling in Knowledge – Intensive Technologies” (24 – 27 April, 2012)]. Kharkov, Kharkovskiy natsional'nyy un-t im. V.N. Karazina Publ., 2012. pp. 71–72.
9. Nesterenko V. F. Propagation of nonlinear compression pulses in granular media. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1983, vol. 24 (5), pp. 733–743.
10. Vengrovich D. B. Vzaimodeystvie solitona s neodnorodnostyami diskretnykh sred [Interaction of soliton with inhomogeneous discrete media]. *DAN NAN Ukrainy* [Reports of the Academy of Science of Ukraine]. 2005, no. 4, pp. 100–109.
11. Vengrovich D. B. Tectonic and seismological settings of subduction. *16th International Conference Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects* (15-17 May 2017, Kiev, Ukraine). European Association of Geoscientists and Engineers (EAGE), 2017. pp. 314 – 317. DOI: 10.3997/2214-4609.201701858.
12. Vengrovich D. B. Computer simulation related to salt tectonics in the Dnieper-Donets basin. *Geofizicheskiy zhurnal* [Geophysical journal]. 2010, vol. 32, no. 4, pp. 198–200.
13. Vengrovich D. B., Sheremet G. P. Irregularity of lithospheric stress as a result of plates structure. *18th International Conference Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspect (13-16 May 2019, Kiev, Ukraine)* (to appear).

Надійшла (received) 26.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Венгрович Дмитро Богданович (Vengrovich Dmitriy Bogdanovich, Vengrovich Dmitri Bogdanovich) – кандидат фізико-математичних наук, завідувач відділенням геодинаміки вибуху, Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, м. Київ; e-mail: vengrovich@gmail.com.

UDC 519:537.81

P. P. VOROBIYENKO, I. YU. DMITRIEVA

ANALYTIC SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL MAXWELL SYSTEM AND ITS NUMERICAL IMPLEMENTATION

The differential Maxwell equations are solved constructively under the specific requirements in the spatial Cartesian coordinate system. The expressions of the unknown electromagnetic field vector intensities are found explicitly as the solutions of the general wave equation regarding all scalar components of the initially unknown vector field functions. The aforesaid equation is equivalent to the original Maxwell system. The present results are obtained using two new efficient operator analytical methods which application is shown also for the heterogeneous media. The numerical implementation for the particular case of the considered electrodynamic mathematical model is proposed here as well.

Key words: general wave equation, analytic operator methods, constructive solution, mathematical model.

П. П. ВОРОБІЄНКО, І. Ю. ДМИТРИЄВА

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАКСВЕЛЛА ТА ЙОГО ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ

Запропоновано конструктивне розв'язання диференціальних рівнянь Максвелла за певних умов у просторовій декартовій системі координат. Явні вирази шуканих вектор-функцій напруженості електромагнітного поля знайдено як розв'язки загального хвильового рівняння, еквівалентного вихідній максвелловській системі. Дані результати отримано завдяки двох нових ефективних операторних аналітичних методів, застосування яких продемонстровано також для неоднорідних середовищ. Частковий випадок розглянутої математичної моделі електродинаміки реалізовано чисельно.

Ключові слова: загальне хвильове рівняння, аналітичні операторні методи, конструктивне розв'язання, математична модель.

П. П. ВОРОБИЕНКО, И. Ю. ДМИТРИЕВА

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Предложено конструктивное решение дифференциальных уравнений Максвелла при определенных условиях в пространственной декартовой системе координат. Явные выражения искомого вектор-функций напряженностей электромагнитного поля найдены как решения общего волнового уравнения, эквивалентного исходной максвелловской системе. Данные результаты получены с помощью двух новых эффективных операторных аналитических методов, применение которых продемонстрирована также для неоднородных сред. Частный случай рассмотренной математической модели электродинамики реализован численно.

Ключевые слова: общее волновое уравнение, аналитические операторные методы, конструктивное решение, математическая модель.

© P. P. Vorobiyenko, I. YU. Dmitrieva, 2019