tematyka i mekhanika [Bulleting of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Series : Mathematics, applied mathematics, and mechanics]. 2018, vol. 88, pp. 58–83.

2. Zhuchenko S. V. Numerical Simulation of Gas Dynamics and Heat Exchange Tasks in Fuel Assemblies of the Nuclear Reactors. *Sixth International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences; Albena (Bulgaria); 26 June – 1 July 2014. AIP Conference Proceedings.* 2014, vol. 1629(1), pp. 135 – 145. DOI : 10.1063/1.4902267.

Поступила (received) 26.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Жученко Станіслав Володимирович (Жученко Станислав Владимирович, Zhuchenko Stanislav Volodymyrovych) **–** кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (057) 364-47-08; e-mail: stanislavzhuchenko@ukr.net.

УДК 532.5

В. А. КАТАН

ПРИМЕНЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В СМЫСЛЕ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ ПО АДАМАРУ ДЛЯ УДАРНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОМЕХАНИКИ

Предлагается новый подход для определения положения зон отрыва жидкости от поверхности тела (одной или нескольких) с использованием трансцендентных уравнений с сингулярными интегралами в смысле конечной части по Адамару, полученных вследствие вариационного принципа Огазо. Общая постановка ударной плоской задачи для тела любого профиля конформным отображением приводится к смешанной задаче Келдыша-Седова и ее решение представляется в виде квадратур.

Ключевые слова: ударное взаимодействие жидкости с твердым телом, отрыв потока, сингулярные интегралы в смысле конечной части по Адамару.

В. О. КАТАН

ЗАСТОСУВАННЯ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛІВ В СЕНСІ СКІНЧЕННОЇ ЧАСТИНИ ЗА АДАМАРОМ ДЛЯ УДАРНИХ ЗАДАЧ ГІДРОМЕХАНІКИ

Запропоновано новий підхід до визначення положення зон відриву рідини від поверхні тіла (одної або декількох) за допомогою трансцендентних рівнянь із сингулярними інтегралами в сенсі скінченної частини за Адамаром, отриманих в результаті застосування варіаційного принципу Огазо. Загальну постановку ударної плоскої задачі для тіла будь-якого профілю конформним відображенням зведено до мішаної задачі Келдиша-Сєдова та її розв'язок подано у виді квадратур.

Ключові слова: ударна взаємодія рідини з твердим тілом, відрив потоку, сингулярні інтеграли в сенсі скінченної частини за Адамаром.

V. A. KATAN

USING SINGULAR INTEGRALS IN THE SENSE OF HADAMARD FINITE PART FOR WATER ENTRY PROBLEMS OF GYDROMECHANICS

A new approach for determining the location of separation areas of liquid from the surface of a body (one or more) using transcendental equations with singular integrals in the sense of the Hadamard finite part, derived by applying the Ogazo principle, is proposed. The formulation of two-dimensional water entry problem for a body with any profile is reduced to a Keldysh–Sedov boundary value problem using conformal mapping and its solution is obtained in the form of quadrature.

Key words: impact fluid interaction with solids, flow separation, singular integrals in the sense of the Hadamard finite part.

Введение. Мгновенный характер протекания удара является основной особенностью задач ударного взаимодействия тел с жидкостью со свободной границей, что классифицирует их как задачи математической физики и теории функций, допускающие аналитические решения. Кроме того, полное исследование решений указанных задач является предельным случаем при рассмотрении неустановившихся течений, и характеристики ударных течений могут быть предельными для аналогичных характеристик, зависящих от времени [1 – 4]. Следует отметить, что ударная задача гидромеханики сводится к нелинейной смешанной задаче теории потенциала с неизвестной заранее границей раздела областей с различными типами граничных условий. Для решения поставленной задачи существуют множество методов, из которых наиболее распространенными являются методы разделения переменных для конфигураций с границами в виде координатных поверхностей некоторой криволинейной системы координат, методы теории функций комплексного переменного для решения плоских задач, методы разложения в ряды различной природы (степенные, асимптотические и другие), метод граничных интегральных уравнений, метод вариационных неравенств и другие. Основным принципиальным вопросом, с точки зрения теоретической гидродинамики, является вопрос формирования отрывных зон и их расположения на поверхности тела в зависимости от геометрических и кинематических характеристик. Результаты теоретических исследований получают практическое воплощение в расчетах и оценке значений динамических характеристик – коэффициентов присоединенных масс и моментов, а также распределения импульсивного давления по поверхности тела.

Постановка задачи. Пусть твердое цилиндрическое тело произвольного сечения плавает на свободной поверхности несжимаемой идеальной жидкости, находящейся первоначально в покое, и пусть система импульсивных сил такова, что возникшее течение является плоскопараллельным.

Рассмотрим любую плоскость поперечного сечения тела и примем ее за координатную плоскость декартовой системы xOy, представленную на рис. 1. Ось Oy направим по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутрь последней, а ось Ox расположим в плоскости свободной поверхности. Для простоты будем рассматривать случай, когда жидкость занимает всю полуплоскость $y \ge 0$. В общем случае жидкость может быть ограничена плоскостью $y = h$ (слой жидкости толщиной h), по оси Ox жидкость может быть или неограниченной, или ограниченной некоторыми «бортами» (бассейн конечного размера). Контур тела, находящийся в жидкости, обозначим через $L = BCD$. Действие ударного импульса предполагается таким, что тело после удара получает положительную компоненту скорости вдоль оси Oy V_0, некоторую компоненту скорости вдоль оси Ox U_0 и угловую скорость вращения ω_z вокруг оси, перпендикулярной плоскости Oxy. С целью упрощения постановки предположим, что $\omega_z > 0$, поскольку знак угловой скорости существенен для правильного моделирования положения зоны отрыва.

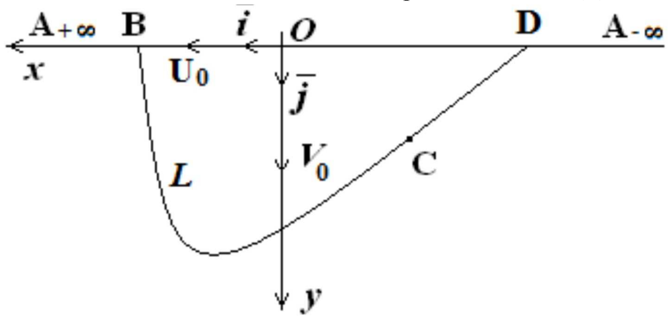

Рис. 1 – Схема к постановке плоской задачи.

Таким образом, в результате удара элементы поверхности тела приобретают скорость:

$$\bar{V} = \left(U_0 - \omega_z y\right)\bar{i} + \left(V_0 + \omega_z x\right)\bar{j} \qquad (1)$$

и тогда задача сводится к определению мгновенного поля скоростей жидкости, вызванного ударом контура L со скоростью (1).

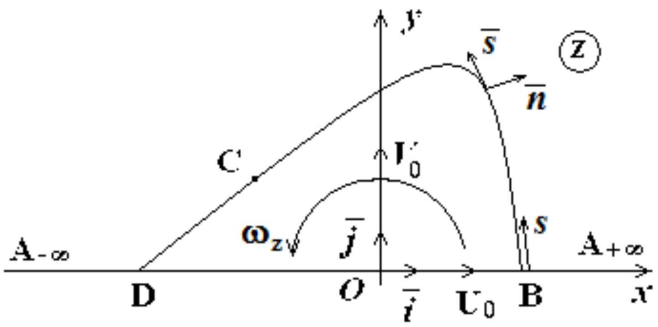

Рис. 2 – Схема к постановке краевой задачи для комплексного потенциала.

Возникшее в результате удара течение жидкости является потенциальным и описывается комплексным потенциалом

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \qquad (2)$$

где $z = x + iy$ – комплексное переменное; $\varphi(x, y)$ – потенциал течения; $\psi(x, y)$ – функция тока.

Сформулируем граничную задачу для комплексного потенциала $w(z)$ в плоскости комплексного переменного z (рис. 2) в предположении, что на контуре тела L в результате удара возникает один сплошной участок отрыва DC с заранее неизвестным положением крайней точки зоны отрыва C.

Следовательно, условие безотрывности распространяется только на дугу границы тела CB и имеет вид:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{CB} = n_x U_0 + n_y V_0 + \omega_z\left(x n_y - y n_x\right), \qquad (3)$$

где $\vec{n}\left(n_x, n_y\right)$ – единичный вектор нормали к контуру CB, направленной внутрь области течения.

В зоне отрыва – на участке DC – выполняется условие

$$\left.\varphi\right|_{DC} = 0. \qquad (4)$$

На свободной границе – участках $A_{-\infty}D$ и $BA_{+\infty}$ – выполняется также условие

$$\varphi = 0. \qquad (5)$$

Согласно известным результатам [4 – 5], граничное условие (3) на участке CB представим через функцию тока

$$\psi = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2}\left(x^2 + y^2\right). \qquad (6)$$

Введем в области течения комплексной плоскости $z = x + iy$ характеристическую функцию

$$\chi = -iw = \psi - i\varphi, \qquad (7)$$

для которой получим смешанную задачу Келдыша-Седова в следующем виде:

– на участке границы CB задана действительная часть характеристической функции

$$\operatorname{Re}\chi\big|_{CB} = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2}\left(x^2 + y^2\right), \tag{8}$$

– на участках границы $A_{-\infty}D$, DC, $BA_{+\infty}$ известна мнимая часть характеристической функции

$$\operatorname{Im}\chi\big|_{A_{-\infty}D} = 0,\ \operatorname{Im}\chi\big|_{DC} = 0,\ \operatorname{Im}\chi\big|_{EA_{+\infty}} = 0. \tag{9}$$

Математическая модель. С помощью аналитической функции $z = F(t)$ область течения конформно отображаем в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $t = \xi + i\eta$ так, чтобы граница области $A_{-\infty}DCBA_{\infty}$ перешла в действительную ось, причем точка А перешла в бесконечность, точка B – в точку $\xi_B = 1$, точка D – в точку $\xi_D = -1$, и предположим соответствие точки $\xi_C = -q$ для неизвестной точки C (рис. 3).

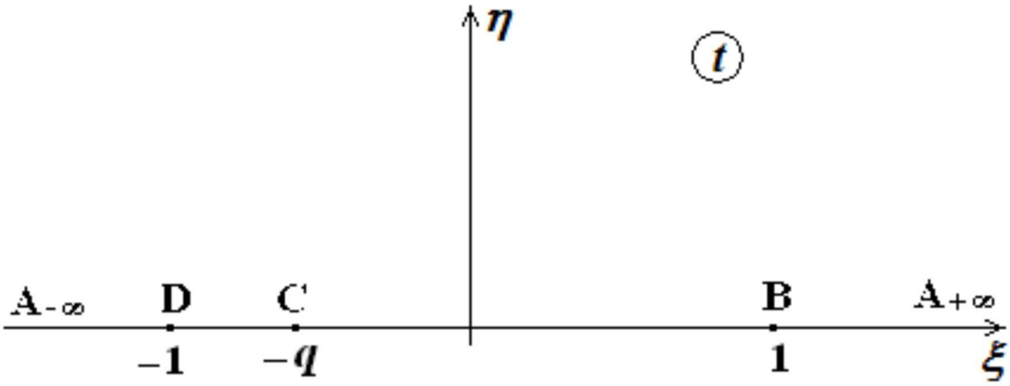

Рис. 3 – Комплексная плоскость $t = \xi + i\eta$.

В таком случае для искомой функции

$$\chi\left(F(t)\right) \equiv \Theta(t) = \psi - i\varphi$$

в верхней полуплоскости комплексной плоскости t получим *задачу Келдыша – Седова* со следующими граничными условиями:

– на участке границы CB $(-q,1)$ задана действительная часть искомой функции:

$$\operatorname{Re}\Theta\big|_{CB} \equiv \Pi(\xi) = \left[U_0 v(\xi) - V_0 u(\xi) - \frac{\omega_z}{2}\left(u^2(\xi) + v^2(\xi)\right)\right], \tag{10}$$

где

$$u(\xi) = \operatorname{Re}F(\xi), \quad v(\xi) = \operatorname{Im}F(\xi),$$

– на участках границы $A_{-\infty}D(-\infty,-1)$, $DC(-1,-q)$ и $BA_{+\infty}(1,+\infty)$ известна мнимая часть искомой функции, равная нулю:

$$\operatorname{Im}\Theta\big|_{A_{-\infty}D} = 0,\ \operatorname{Im}\Theta\big|_{DC} = 0,\ \operatorname{Im}\Theta\big|_{BA_{+\infty}} = 0. \tag{11}$$

Для решения полученной смешанной задачи, следуя *Мусхелишвили* [6], составим функцию граничных условий

$$h(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \xi \in D'(-q,1); \\ ig(\xi), & \xi \in D''(-\infty,-1)\cup(-1,-q)\cup(1,+\infty), \end{cases}$$

где $f(\xi) = \Pi(\xi), \quad \xi \in (-q,1) \quad (D')$; $g(\xi) = 0, \begin{cases} \xi \in (-\infty,-q), \\ \xi \in (1,+\infty). \end{cases} \quad (D'')$.

Отметим, что данная постановка содержит только один отрезок с известной вещественной частью CB и два полубесконечных промежутка с известной мнимой частью, следовательно, параметрами задачи являются $a_1 = -q$ и $b_1 = 1$. И далее вводим функции [6]

$$R(t) = (t - a_1)(t - b_1) = (t + q)(t - 1) \text{ и } Z(t) = \sqrt{R(t)}, \tag{12}$$

причем ветвь $\sqrt{R(t)}$ на оси ξ принимает положительное значение при $\xi > 1$.

Таким образом, с учетом выражений для функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$ решение задачи сводится к вычислению интеграла

$$\mathrm{I}(t) = -i\int\limits_{-q}^{1}\frac{\Pi(\xi)}{\sqrt{(\xi+q)(1-\xi)}}\frac{d\xi}{\xi-t}. \tag{13}$$

Подынтегральную функцию $\Pi(\xi)$ представим в виде соотношения с явно выделенными в качестве множителей компонентами поступательной и угловой скоростей:

$$\Pi(\xi) = U_0\Pi_1(\xi)+V_0\Pi_2(\xi)+\omega_z\Pi_3(\xi), \tag{14}$$

где $\Pi_1(\xi)=v(\xi)$, $\Pi_2(\xi)=-u(\xi)$, $\Pi_3(\xi)=-\frac{1}{2}\left(u^2(\xi)+v^2(\xi)\right)$.

В результате получаем следующее представление искомой функции для решения поставленной задачи

$$\Theta(t) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{(t+q)(t-1)}\left(U_0J_1(t)+V_0J_2(t)+\omega_zJ_3(t)\right), \tag{15}$$

где

$$J_k(t) = \int\limits_{-q}^{1}\frac{\Pi_k(\xi)}{\sqrt{(\xi+q)(1-\xi)}}\frac{d\xi}{\xi-t}, \quad k=\overline{1,3}. \tag{16}$$

Обобщим полученную математическую модель поставленной задачи: если известно конформное отображение $z=F(t)$ области течения на верхнюю полуплоскость переменного t, то общее решение задачи об ударе (с одной зоной отрыва) представляется в явном виде в форме квадратур (15), (16) и содержит один неизвестный числовой параметр q, который определяет положение крайней точки C области отрыва DC.

Определение местоположения точки отрыва жидкости от гладкого контура. Предлагаемый автором способ определения параметра q основан на приложении *принципа Огазо* к общему решению, полученному в виде квадратур (15), (16).

Если известен потенциал $\varphi(t)$ на гладком участке безотрывного обтекания контура как функция $t=\xi+i0$, $\xi\in(-q,1)$, то согласно принципу Огазо, в точке $\xi=-q$ должно выполняться условие

$$\lim_{\xi\to -q+0}\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial q} = 0. \tag{17}$$

Выражение (17) как раз и является уравнением для определения параметра q.

Для определения функции $\varphi(\xi)$ в выражении (15) уже выполнен переход из верхней полуплоскости t в точку ξ_0, принадлежащую отрезку $CB(-q<\xi_0<1)$ с учетом *формулы Племеля – Сохоцкого* [6], для предельных значений интегралов $J_k^+(\xi_0)$. Далее приходим к следующим формулам для функции тока и потенциала течения на участке безотрывного обтекания поверхности тела (в плоскости t):

$$\psi(\xi_0) = U_0\Pi_1(\xi_0)+V_0\Pi_2(\xi_0)+\omega_z\Pi_3(\xi_0) \tag{18}$$

и

$$\varphi(\xi_0) = \frac{1}{\pi}\sqrt{(\xi_0+q)(1-\xi_0)}\left(U_0J_1(\xi_0)+V_0J_2(\xi_0)+\omega_zJ_3(\xi_0)\right). \tag{19}$$

Тогда для вычисления производной $\dfrac{\partial\varphi(\xi_0)}{\partial q}$ запишем следующее выражение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q}(\xi_0) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1-\xi_0}{\xi_0+q}}\left(U_0J_1(\xi_0)+V_0J_2(\xi_0)+\omega_zJ_3(\xi_0)\right)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sqrt{(\xi_0+q)(1-\xi_0)}\left(U_0\frac{\partial J_1(\xi_0)}{\partial q}+V_0\frac{\partial J_2(\xi_0)}{\partial q}+\omega_z\frac{\partial J_3(\xi_0)}{\partial q}\right). \tag{20}$$

В предельном переходе $\xi_0\to -q+0$ из интегралов в *смысле Коши* $J_k(\xi_0)$, $k=\overline{1,3}$ получаем особые интегралы вида

$$J_k(-q) = \int\limits_{-q}^{1}\frac{\Pi_k(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\xi+q)^3(1-\xi)}}, \quad k=\overline{1,3}, \tag{21}$$

которые при $\xi=-q$ имеют неинтегрируемую особенность порядка $(\xi+q)^{-3/2}$, из-за чего их следует понимать в *смысле конечной части по Адамару* [7 – 8].

Аналогичным образом для производных от интегралов $J_k(\xi_0)$, $k=\overline{1,3}$

$$\frac{\partial J_k(\xi_0)}{\partial q},\quad k=\overline{1,3}, \tag{22}$$

в указанном предельном переходе $\xi_0 \to -q+0$ получим особые интегралы с более высокой особенностью в точке $\xi=-q$ (порядка $(\xi+q)^{-5/2}$), значения которых также следует рассматривать в смысле конечной части по Адамару.

Отметим, что в смысле конечной части по Адамару интегралы (21) и (22) при $\xi_0 \to -q+0$ имеют вполне определенные конечные значения, благодаря чему условие Огазо приводит к следующему уравнению для вычисления параметра *q*, определяющего местоположение граничной точки области отрыва:

$$U_0 J_1(-q)+V_0 J_2(-q)+\omega_z J_3(-q)=0, \tag{23}$$

где все интегралы $J_k(-q)$, $k=\overline{1,3}$, понимаются в смысле конечной части.

Для вычисления интегралов в смысле конечной части по Адамару следуем алгоритму [7 – 8]:

$$\int_a^x \frac{A(y)\,dy}{(x-y)^{3/2}}=\int_a^x \frac{A(y)-A(x)}{(x-y)^{3/2}}dy-\frac{2}{\sqrt{x-a}}A(x). \tag{24}$$

Согласно соотношению (24) получим выражение для конечных частей интегралов $J_k(-q)$

$$J_k(-q)=\tilde{J}_k(-q)-2\frac{\Pi_k(-q)}{1+q},\quad k=\overline{1,3}, \tag{25}$$

где

$$\tilde{J}_k(-q)=\int_{-1}^{q}\frac{\left(\dfrac{\Pi_k(-y)}{\sqrt{1+y}}-\dfrac{\Pi_k(-q)}{\sqrt{1+q}}\right)dy}{\sqrt{(q-y)^3}}.$$

С помощью замены $y=-\cos^2\varphi+q\sin^2\varphi$ и $t=\cos\varphi$ в выражениях (25) окончательно запишем

$$\tilde{J}_k(-q)=\frac{2}{1+q}\int_0^1\frac{\left[\Pi_k\left(t^2-q\left(1-t^2\right)\right)-\Pi_k(-q)\sqrt{1-t^2}\right]dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}\equiv\frac{2}{1+q}\tilde{\tilde{J}}_k(-q),\quad k=\overline{1,3}.$$

Отметим, что в каждом из последних интегралов имеется интегрируемая особая точка при $t=1$ и устранимая особая точка при $t=0$. Поэтому для вычисления $\tilde{\tilde{J}}_k(-q)$ выделим особые точки малыми окрестностями размера ε:

$$\tilde{\tilde{J}}_k(-q)=\int_0^1\frac{\left(\Pi_k\left(t^2-q\left(1-t^2\right)\right)-\Pi_k(-q)\sqrt{1-t^2}\right)dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\int_0^{\varepsilon}\frac{\left(\Pi_k\left(t^2-q\left(1-t^2\right)\right)-\Pi_k(-q)\sqrt{1-t^2}\right)dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}+\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{\left(\Pi_k\left(t^2-q\left(1-t^2\right)\right)-\Pi_k(-q)\sqrt{1-t^2}\right)dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}+$$

$$+\int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{\left(\Pi_k\left(t^2-q\left(1-t^2\right)\right)-\Pi_k(-q)\sqrt{1-t^2}\right)dt}{t^2\sqrt{1-t^2}},\quad k=\overline{1,3}, \tag{26}$$

и в этом случае интеграл $\tilde{\tilde{J}}_k(-q)$ будем понимать как предел суммы последних трех интегралов при условии, что $\varepsilon\to 0$. Причем первый и третий интегралы вычисляются непосредственно путем разложения подынтегральных функций в окрестности особых точек $t=0$ и $t=1$; вторые интегралы вычисляются численно для значений $k=\overline{1,3}$.

Таким образом, следуя указанной процедуре, все интегралы $J_k(-q)$, $k=\overline{1,3}$ рассчитываются для любого наперед заданного значения q (из априорно известного множества значений q), и тогда условие (23) рассматривается как трансцендентное уравнение, определяющее значение параметра *q* через значения кинематических параметров U_0, V_0, ω_z.

Вследствие вышеизложенного, уравнение (23) представим в виде

$$J_1(-q) + S J_2(-q) + Q\frac{1}{L} J_3(-q) = 0, \tag{27}$$

где $S = \dfrac{V_0}{U_0}$ и $Q = \dfrac{\omega_z L}{U_0}$ – два безразмерных кинематических параметра; L – некоторый характерный размер тела. Далее преобразуем соотношение (27) в явную зависимость параметра Q от параметров S и q:

$$Q = -\frac{L}{J_3(-q)}\left(J_1(-q) + S J_2(-q)\right). \tag{28}$$

Таким образом, при заданных значениях величины q (во всем физически возможном диапазоне) по формуле (28) получаем зависимость $Q(q)$ для некоторого набора значений параметра S; далее по полученным данным строим *аппроксимационные зависимости*, удобные для реализации в инженерной практике в виде наглядных графических зависимостей.

По описанному выше алгоритму выполнены расчеты положения и размера зоны отрыва для различной ориентации пластинки относительно свободной поверхности. Для отдельных случаев ориентации пластинки проведены сравнения результатов с результатами аналитического решения, которые показали их хорошее совпадение [5].

Выводы. Решение ударной задачи гидромеханики получено согласно авторскому алгоритму: по известной аналитической функции $z = F(t)$, реализующей конформное отображение области течения на верхнюю полуплоскость вспомогательной плоскости комплексной переменной t, получено решение задачи об ударном взаимодействии цилиндрического тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, для произвольного набора кинематических параметров в условиях образования одной зоны отрыва с заранее неизвестным параметром q, определяющим положение зоны отрыва; определен неизвестный параметр q. При этом интегралы, которые входят в полученные формулы, следует понимать в смысле конечной части по Адамару.

Список литературы

1. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение). – Л. : Судостроение, 1976. – 200 с.
2. *Короткин А. И.* Присоединенные массы судна. – Л. : Судостроение, 1986. – 312 с.
3. *Коробкин А. А.* Соударение жидких и твердых масс. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1997. – 200 с.
4. *Норкин М. В.* Смешанные задачи гидродинамического удара. – Ростов-на-Дону : Изд. ЦВВР, 2007. – 136 с.
5. *Катан В. А.* Об одном способе определения положения зоны отрыва течения при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости // Вісник ДНУ. Серія : «Механіка». – 2014. – № 5/22. – Вип. 18. – Том 1. – С. 63 – 71.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – Москва : Наука, 1968. – 512 с.
7. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – Москва : Наука, 1978. – 352 с.
8. *Гандель Ю. В.* Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учебное пособие. – Харьков, ХНУ, 2002. – 92 с.

References (transliterated)

1. Grigolyuk *E. I.*, Gorshkov A. G. *Vzaimodeystvie uprugikh konstruktsiy s zhidkoctyu (udar i pogruzhenie)* [Interaction of elastic structures with fluid (impact and immersion)]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1976. 200 p.
2. Korotkin A. I. *Prisoedinennie massy sudna* [Added masses of a ship]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1986. 312 p.
3. Korobkin A. A. *Soudarenie zhidkikh i tverdykh mass* [Impact of liquid and solid masses]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN Publ., 1997. 200 p.
4. Norkin M. V. *Smeshannye zadachi gidrodinamicheskogo udara* [Mixed problem of hydrodynamic impact]. Rostov-na-Donu, Izd. TsVVR Publ., 2007. 136 p.
5. Katan V. A. Ob odnom sposobe opredeleniya polozheniya zony otryva techeniya pri udarnom vzaimodeystvii tverdogo tela i zhidkosti [On a method for determining location of flow separation area under impact interaction of solid and fluid]. *Visnyk DNU. Seriya : "Mekhanika"* [Bulletin of Dnipro National University. Series: “Mechanics”]. 2014, no. 5/22, issue 18, vol. 1, pp. 63–71.
6. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 512 p.
7. Adamar Zh. *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chasnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [Cauchy problem for hyperbolic type linear partial differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 352 p.
8. Gandel' J. V. *Vvedenie v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Uchebnoe posobie* [Introduction to the methods of computation of singular and hyper-singular integrals. Textbook]. Kharkov, KhNU Publ., 2002. 92 p.

Поступила (received) 06.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Катан Володимир Олександрович (Катан Владимир Александрович, Katan Vladimir Alexandrovich) – кандидат фізико-математичних наук, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро; тел.: (067) 710-66-37; e-mail: vlad_aleks@i.ua.