

**В. Ю. КИЛИННИК, О. В. ТИШКОВЕЦЬ, Д. В. КРЮТЧЕНКО, Ю. В. НАУМЕНКО**

### **КОЛИВАННЯ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНО-КОНІЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ПІД ДІЄЮ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЗБУДЖЕННЯ**

Досліджено коливання ідеальної нестисливої рідини в оболонках обертання, які складаються з циліндричної та конічної частин. Оболонка піддана дії вертикального збудження. Вважається, що рідина в оболонці є ідеальною та нестисливою. Припускається, що рух рідини є потенціальним. В цих умовах існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівнянню Лапласа. Тиск рідини як функція потенціалу швидкостей знаходиться за допомогою рівняння Бернуллі. Задача визначення тиску на стінки оболонки зводиться до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Числовий розв'язок цього рівняння отриманий методом дискретних особливостей.

**Ключові слова:** складені оболонки обертання, ідеальна нестислива рідина, метод граничних елементів, метод дискретних особливостей, частоти і форми коливань.

**В. Ю. КИЛИННИК, Е. В. ТИШКОВЕЦ, Д. В. КРЮТЧЕНКО, Ю. В. НАУМЕНКО**

### **КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКО-КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕРТИКАЛЬНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ**

Исследованы колебания идеальной несжимаемой жидкости в оболочках вращения, которые состоят из цилиндрических и конических частей. Оболочка подвержена действию вертикального возбуждения. Считается, что жидкость идеальная и несжимаемая. Предполагается, что движение жидкости является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Давление жидкости как функция потенциала скоростей находится с помощью интеграла Бернулли. Задача определения давления жидкости на стенку оболочки сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Численное решение этого уравнения получено методом дискретных особенностей.

**Ключевые слова:** составные оболочки вращения, идеальная несжимаемая жидкость, метод граничных элементов, метод дискретных особенностей, частоты и формы колебаний.

**V. YU. KYLYNNYK, YE. V. TISHKOVETZ, D. V. KRIUTCHENKO, YU. V. NAUMENKO**

### **FLUID VIBRATIONS IN CYLINDRICAL-CONICAL SHELL UNDER VERTICAL EXCITATION**

Vibrations of an ideal incompressible fluid in shells of revolution are under consideration. These shells of revolution include cylindrical and conical parts. It is assumed that the shell is subjected to vertical excitations. The liquid in the shells is supposed to be an ideal and incompressible one. The fluid flow in the shell is irrotational. So, there exists the velocity potential that satisfies the Laplace equation. The non-penetration conditions are applied to the wetted surfaces of the shell, and on the free surface the kinematic and dynamic conditions are considered. The liquid pressure as the function of the velocity potential is found using the Bernoulli equation. The problem of determining the fluid pressure is reduced to solving a singular integral equation. The numerical solution of this equation is obtained by the method of discrete singularities. The method of calculating the free and forced oscillations of the fluid in the shells of revolution is developed.

**Key words:** compound shells of revolution, ideal incompressible fluid, method of boundary elements, method of discrete singularities, frequencies and modes of vibrations.

**Вступ.** Герметичні оболонкові конструкції для зберігання і транспортування рідини є предметом інтенсивних наукових досліджень. Ці оболонкові конструкції використовують як корпуси енергетичних установок, насосів, колони випарних апаратів нафтохранилища, тощо. Велика кількість різних типів задач стосовно міцності та коливань оболонкових конструкцій була розглянута в останні десятиріччя.

**Аналіз останніх досліджень.** Проблема інтенсивних плескань рідини в резервуарах, ємностях, паливних баках знаходиться в центрі уваги багатьох дослідників. Огляд наукових праць, присвячених проблемам плескання рідини в циліндричних, конічних, сферичних резервуарах, надано в роботах *R. A. Ibrahim* [1, 2]. Але оболонкам, що складаються з циліндричних і конічних частин, в науковій літературі приділено менше уваги, незважаючи на те, що такі тонкостінні конструкції широко використовуються в різних галузях техніки. Огляд досліджень по цій темі [2, 3] показує, що на динамічні характеристики резервуарів значно впливають плескання рідини та коливання пружних стінок. Вільні і вимушені коливання циліндричних резервуарів з рідиною розглянуті в роботах [4 – 7]. Відзначимо, що в більшості досліджень не враховується вплив сили тяжіння, що викликає плескання.

**Постановка задачі.** У цій роботі розглянуто задачу про коливання рідини в складеній оболонці обертання, що має циліндричну та конічну частину. Позначимо змочену частину поверхні оболонки  $S_1$ , а вільну поверхню  $S_0$ . Припустимо, що декартова система координат  $Oxuz$  пов'язана з оболонкою, вільна поверхня збігається з площиною  $z = H = H_1 + H_2$ . в стані спокою (рис. 1).

Вважаємо, що  $H_1$  – це довжина циліндричної частини, а  $H_2$  – висота конічної частини,  $R_1, R_2$  – радіуси нижньої та верхньої частин оболонки, рис. 1.

Для моделювання області, зайнятої рідким середовищем, розроблено математичну модель, засновану на наступних гіпотезах: рідина є нестисливою і нев'язкою, рух рідини безвихровий, розглядаються лише малі ко-

ливання (лінійна теорія). Тому можна ввести скалярний потенціал швидкостей  $\Phi(x, y, z, t)$ , що задовольняє рівнянню Лапласа. Тиск рідини  $p = p(x, y, z, t)$ , що діє на змоченій поверхні, отримано з лінеаризованого рівняння Бернуллі для потенціального потоку

$$p - p_0 = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz + a_z(t)z \right), \quad (1)$$

де  $g$  – гравітаційне прискорення;  $z$  – вертикальна координата точки в рідині;  $\rho_l$  – густина рідини;  $p_0$  – атмосферний тиск;  $a_z(t) = a_0 \cos \omega t$  – вертикальне прискорення сили, що збуджує;  $a_0$  – амплітуда вимушеного впливу;  $\omega$  – частота сили, що збуджує.

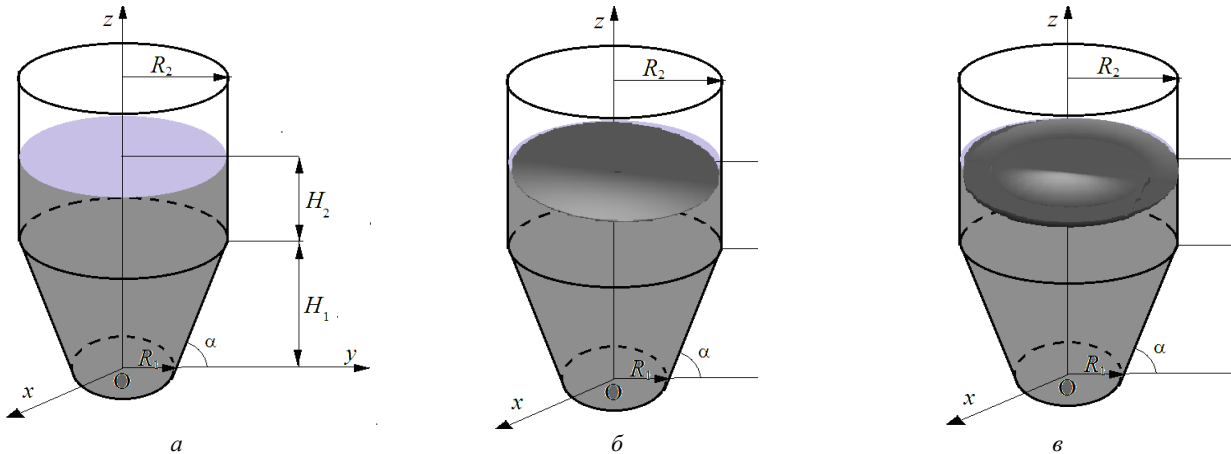


Рис. 1 – Оболонки обертання з рідиною і форми коливань вільної поверхні: а – форми коливань вільної поверхні при  $\omega = 0$  Гц; б – форми коливань вільної поверхні при  $\omega = 7.019$  Гц; в – форми коливань вільної поверхні при  $\omega = 10.18$  Гц.

Зауважимо, що припущення відносно потенціальності потоку є цілком природним, оскільки згідно з теоремою Кельвіна, якщо рух ідеальної нестисливої рідини був потенціальним в початковий момент часу, він залишатиметься потенційним протягом усього наступного періоду руху.

Розглянемо спочатку задачу про вільні коливання оболонки. Сформулюємо граничні умови для розв'язання рівняння Лапласа. На змочених поверхнях оболонки ставимо граничну умову непротікання [8]. На вільній поверхні рідини повинні бути задоволені наступні граничні умови:

$$p - p_0|_{S_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

де  $\mathbf{n}$  – одинична зовнішня нормаль до поверхні  $S_0$ . Функція  $\zeta$  тут описує форму і положення вільної поверхні.

Перша з цих умов є динамічною і полягає в тому, що тиск на поверхні рідини дорівнює атмосферному, друга умова є кінематичною. Її зміст в тому, що точки, які знаходились на вільній поверхні в початковий момент руху, залишаються на ній у всі наступні моменти часу. При цьому рівняння Бернуллі набуває вигляду:

$$p - p_0 = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) = 0.$$

Зробивши перетворення в зазначених граничних умовах, аналогічні [8], для знаходження потенціалу швидкостей в задачі вільних коливань рідини маємо наступну крайову задачу:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \Big|_{S_0} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0. \quad (2)$$

Тут  $\mathbf{n}$  – зовнішня одинична нормаль до розглянутої поверхні.

Для виконання умов розв'язності крайової задачі необхідно також задовольнити умову Неймана [8]:

$$\int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0.$$

Таким чином, сформульована мішана крайова задача для рівняння Лапласа.

**Викладення основного матеріалу дослідження.** Розглянемо потенціал  $\Phi$  у вигляді ряду:

$$\Phi = \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \dot{d}_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, z). \quad (3)$$

Тут функції  $\varphi_k$  є розв'язками крайової задачі (2), яка згідно з [3, 8] зводиться до проблеми власних значень.

Щоб визначити функції  $\varphi_k$ , використовуємо метод граничних елементів в прямому формулюванні. Запишемо основне інтегральне співвідношення в формі [9]

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S q \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS,$$

де  $S = S_1 \cup S_0$ ; точки  $P$  і  $P_0$  належать поверхні  $S$ . Через  $|P-P_0|$  позначимо декартову відстань між точками  $P$  і  $P_0$ . Функція  $\Phi$ , яка визначена на поверхні  $S_1$ , являє собою тиск на змоченій поверхні, а функція  $q = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}$ , що визначена на  $S_0$ , – це потік. З використанням граничних умов

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} + \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_{S_0} = 0$$

та припущення, що  $\Phi(t, x, y, z) = \exp(i\omega t)\varphi(x, y, z, t)$ , приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь у формі [7, 11]:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi_1 + \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\chi_k^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) dS_0 = 0; \\ -\iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_0 + \frac{\chi_k^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 = 0. \end{cases}$$

Тут  $\varphi_0$  – значення потенціалу на поверхні  $S_0$ ,  $\varphi$  – значення потенціалу на поверхні  $S_1$ . Числовий розв’язок отриманої системи сингулярних інтегральних рівнянь здійснено методом дискретних особливостей. В [6] показано, що ядра інтегральних рівнянь містять повні еліптичні інтеграли 1-го і 2-го роду. Оскільки еліптичний інтеграл 2-го роду є регулярною функцією, то для його обчислення використовується *стандартна квадратурна формула Гаусса*. Для еліптичного інтеграла 1-го роду застосовується підхід, заснований на характеристичних властивостях середнього арифметичного-геометричного значення AGM ( $a, b$ ), [12 – 13]. Зовнішні інтеграли мають логарифмічну особливість. Для їх обчислення застосовані спеціальні квадратурні формули Гауса [9]. Розроблений метод був застосований далі для аналізу вільних та вимушених коливань оболонкових конструкцій.

Переходимо до розв’язання задачі про вимушені коливання. Розглянемо *рівняння Бернуллі* (1) на вільній поверхні. Потенціал швидкостей зобразимо у вигляді (2), а функцію, яка описує положення вільної поверхні, запишемо таким чином:

$$\zeta = \sum_{k=1}^m d_k(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}}. \tag{4}$$

Тут функції  $\varphi_k$  є формами вільних коливань рідини в жорсткому резервуарі. Їх отримано при розв’язанні крайової задачі (2). Підставимо вирази (3) і (4) в інтеграл Бернуллі (1), враховуючи, що

$$\left. \frac{\partial \varphi_{\alpha k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\chi_{\alpha k}^2}{g} \varphi_{\alpha k} \tag{5}$$

та отримаємо співвідношення

$$\sum_{k=1}^M d_k \varphi_k + \sum_{k=1}^M d_k \varphi_k \chi_k^2 \left( 1 + \frac{a_x(t)}{g} \right) = 0. \tag{6}$$

Тут значення  $\chi_k$  є частотами вільних коливань рідини в жорсткому резервуарі. Зауважимо, що згідно з [7, 10] розглядаємо частоти та форми коливань рідини, що відповідають окремим гармонікам, а саме, вважаємо, що потенціал швидкостей та функція, що описує рівень підйому вільної поверхні, подаються в такій засіб

$$\Phi = \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \dot{d}_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, z), \quad \zeta = \frac{1}{g} \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \chi_{\alpha k}^2 d_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, z). \tag{7}$$

В рівності (7) хвильове число  $\alpha$  характеризує номер гармоніки, або кількість вузлових діаметрів [7, 10].

Надалі нас будуть цікавити значення  $\alpha = 0$ , що визначає осесиметричні коливання рідини в жорсткому резервуарі, а також  $\alpha = 1$ , що відповідає антисиметричним коливанням.

Знайдемо скалярний добуток рівності (6) на функції  $\varphi_l (l = \overline{1, M})$  і скористаємося ортогональністю власних форм. Отримуємо *незв’язану систему диференціальних рівнянь 2-го порядку типу Мат’є*:

$$\ddot{d}_{1k} + \chi_{1k}^2 \left( 1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{1k} + a_x(t) F_{1k} = 0; \quad \ddot{d}_{0k} + \chi_{0k}^2 \left( 1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{0k} = 0; \quad F_{1k} = \frac{(\rho, \varphi_{1k})}{(\varphi_{1k}, \varphi_{1k})}; \quad k = \overline{1, M},$$

$$a_z(t) = a_1 \cos(\omega t), \quad a_x(t) = a_2 \cos(\omega t). \quad (8)$$

Для отримання однозначного розв'язку системи (8) треба задати початкові умови.

**Чисельний аналіз і обговорення результатів.** Спочатку розглянемо задачу про власні осесиметричні коливання циліндричної оболонки з розмірами  $R = 1$  м,  $H = 1$  м. При цьому вважалось, що  $\alpha = 0$ . Ці дані, а саме частоти та форми вільних коливань, необхідні для подальшого розв'язання задачі про вимушені коливання.

В табл. 1 наведено порівняння результатів, отриманих запропонованим методом граничних елементів, з аналітичним розв'язком [1].

Таблиця 1 – Частотний параметр осесиметричних коливань

Метод	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
МГЕ	3.815	7.019	10.180	13.333	16.480
Аналітичний метод [1]	3.815	7.016	10.173	13.324	16.470

Під частотним параметром згідно з [1,7] розуміємо таку величину  $\chi^2 / g$ . В таблиці наведені значення частотного параметру для 5 перших форм коливань при  $\alpha = 0$ .

При виконанні цього розрахунку було використано 150 елементів вздовж меридіану оболонки та 75 елементів вздовж радіусу вільної поверхні. Застосовувались граничні елементи зі сталою апроксимацією густини. Це відповідає ідеології методу дискретних особливостей [11]. Результати, що наведені в табл. 1, свідчать про добру узгодженість чисельного та аналітичного розрахунків та доводять вірогідність запропонованого методу.

На рис. 1 наведені форми власних антисиметричних коливань рідини, а саме  $\alpha = 1$ ,  $n = 1$ , та  $\alpha = 1$ ,  $n = 2$ .

Аналогічно роботі [12] розглянемо вільні осесиметричні коливання циліндрично-конічних оболонок при перевантаженнях. Результати наведені в табл. 2. При цьому вважалось, що  $\alpha = 0$ .

Таблиця 2 – Частоти осесиметричних коливань при перевантаженнях

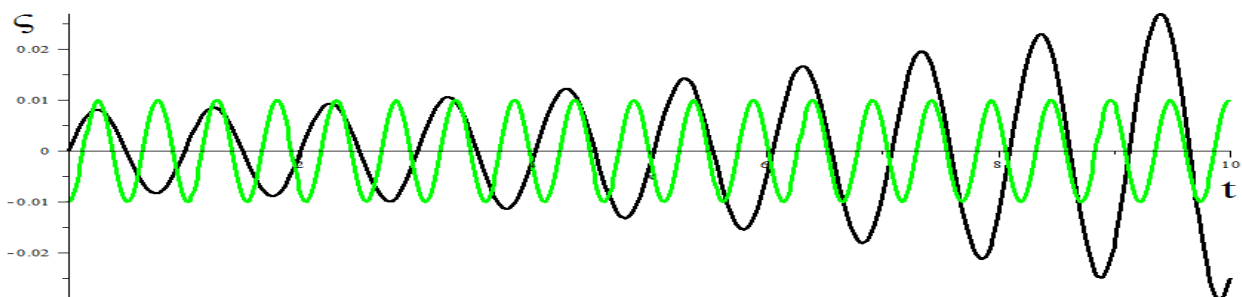
$a$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
1	6.13	8.37	9.45	10.24	10.88	11.42	11.89
2	8.67	11.84	13.37	14.48	15.38	16.14	16.81
3	10.61	14.50	16.37	17.74	18.87	19.77	20.59
7	16.21	22.15	25.01	27.10	28.78	30.20	31.45

В табл. 2 параметр  $a$  означає величину перевантаження,  $n$  – номер форми. Тобто, дані отримані при таких значеннях гравітаційного прискорення  $ag : g, 2g, 3g, 7g$ . Бачимо зростання частот зі збільшенням параметра перевантаження.

Далі розглянемо вимушені коливання циліндрично-конічної оболонки, частково заповненої рідиною. Вимушені коливання розглянуті для  $a = 0$ . Початкові умови для розв'язання диференціального рівняння 2-го порядку обираються наступним чином:

$$d_{1k}(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad \dot{d}_{11}(0) = 0.05, \quad \dot{d}_{1k}(0) = 0, \quad k = \overline{2, M}, \quad d_{0k}(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad \dot{d}_{0k}(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}.$$

Розглянуто вертикальне збудження  $a_z(t) = a_0 \cos \omega t$  з параметрами  $a_0 = 0.1$ ,  $\omega = 12.26$ . Ця частота є подвійною частотою власних осесиметричних коливань. На рис. 2 (а, б, в, г) показані зміни в часі форми вільної поверхні при різних значеннях перевантаження  $a = 1, 2, 3, 7$ , відповідно.



а

Рис. 2 – Амплітуди вимушених коливань рідини в кінцічному резервуарі: а – перевантаження  $a = 1$ .

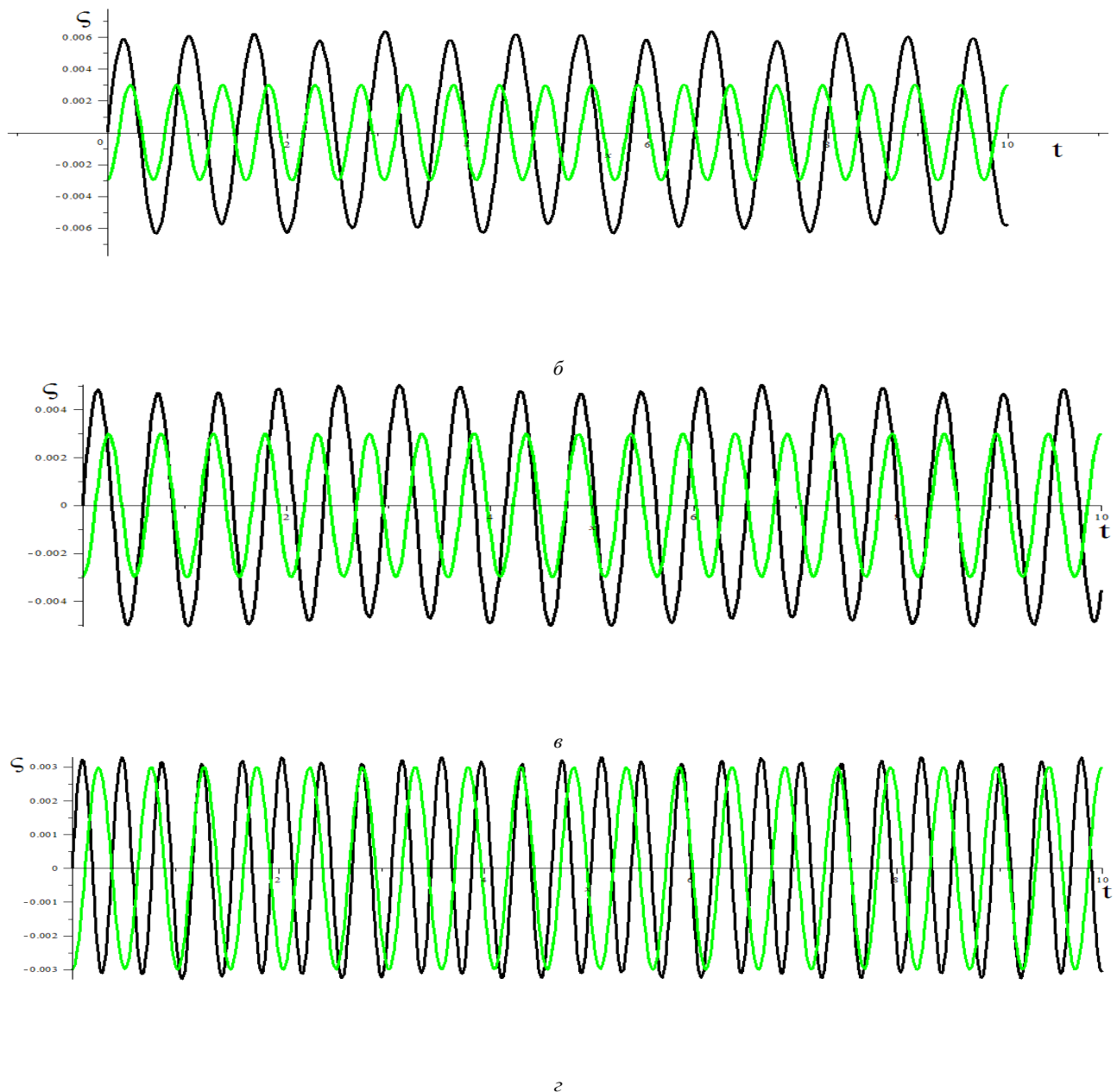


Рис. 2 – Амплітуди вимушених коливань рідини в кінчному резервуарі: б – перевантаження  $a = 2$ ;  
в – перевантаження  $a = 3$ ; з – перевантаження  $a = 7$ .

При  $a = 1$  (рис. 2, а) спостерігається явище параметричного резонансу, яке полягає в необмеженому зростанні амплітуди коливання вільної поверхні. Зауважимо, що при зростанні параметру перевантаження коливання рідини в резервуарі мають стійкий гармонічний характер (рис. 2, б, в, з).

**Висновки.** Розроблено метод розрахунку вільних і вимушених коливань рідини в оболонках обертання, заснований на використанні методу граничних інтегральних рівнянь та розкладенні в ряд Фур'є. Розв'язання інтегральних рівнянь здійснено за допомогою методу дискретних особливостей. Аналіз результатів довів, що при збільшенні параметру перевантаження явище параметричного резонансу не спостерігається. Надалі передбачається розглянути спільну дію вертикальних і горизонтальних збуджень.

#### Список літератури

1. Ibrahim R. A., Pilipchuck V. N., Ikeda T. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics // Applied Mechanics Reviews. – 2001. – Vol. 54. – No. 2. – P. 133 – 199.
2. Ibrahim R. A. Liquid Sloshing Dynamics // Cambridge University Press. – New York, 2005. – 948 p.
3. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles // Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences. – 2016. – V. 1. – No. 1. – P. 14 – 27.

4. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2016. – № 67. – P. 13 – 25.
5. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks // *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. – 2018. – № 6(6). – P. 976 – 988.
6. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid // *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. – 2010. – Vol. 50. – P. 203 – 211.
7. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumenko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles // *J. Modern Technology & Engineering*. – 2018. – Vol. 3. – No. 1. – P. 15 – 52.
8. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load // *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. – 2011. – Vol. 52. – P. 285 – 296.
9. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. – Springer-Verlag : Berlin and New York, 1984. – 478 p.
10. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles // *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. – 2017. – Vol. 5(3). – P. 317 – 328.
11. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating // *Problems, Differ. Equ.* – 2003. – № 39:9. – pp. 1295 – 1307.
12. David A. Cox. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss // *L'Enseignement Mathématique*. – 1984. – t. 30. – P. 275 – 330.
13. Кьльннык В. Ю., Гнетько В. И., Науменко Ю. В., Розова Л. В. Численное моделирование колебаний жидкости в составных оболочках вращения при перегрузках // *Прикладні питання математичного моделювання*. – 2018. – № 1. – С. 115 – 121.

#### References (transliterated)

1. Ibrahim R. A., Pilipchuck V. N., Ikeda T. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics. *Applied Mechanics Reviews*. 2001, vol. 54, no. 2, pp. 133–199.
2. Ibrahim R. A. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2005, 948 p.
3. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016, vol. 1, no. 1, pp. 14–27.
4. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016, vol. 67, pp. 13–25.
5. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018, vol. 6(6), pp. 976–988.
6. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid. *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2010, vol. 50, pp. 203–211.
7. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumenko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *J. Modern Technology & Engineering*. 2018, vol. 3, no. 1, pp. 15–52.
8. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2011, vol. 52, pp. 285–296.
9. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984, 478 p.
10. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2017, vol. 5(3), pp. 317–328.
11. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating. *Problems, Differ. Equ.* 2003, vol. 39:9, pp. 1295–1307.
12. David A. Cox. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss. *L'Enseignement Mathématique*. 1984, no. 30, pp. 275–330.
13. Kylynyk V. Yu., Gnitko V. I., Naumenko Yu. V., Rozova L. V. Численне моделювання коливань жидкості в складних оболочках обертання при перевантаженнях [Numerical simulation of liquid vibration in composite shells of revolution under overloads]. *Прийкладні питання математичного моделювання* [Applied problems of mathematical modeling]. 2018, no. 1, pp. 115–121.

Надійшла (received) 07.04.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Килинник Влада Юрійвна (Килинник Влада Юрьевна, Кульпнык Vlada Yurievna)** – бакалавр, студентка, Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, м. Харків; e-mail: vladakylynyk@gmail.com.

**Тишковець Олена В'ячеславівна (Тишковец Елена Вячеславовна, Tishkovetz Yelena Viacheslavna)** – кандидат технічних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; e-mail: yelena.tishkovets@gmail.com.

**Крютченко Денис Володимирович (Крютченко Денис Владимирович, Krutchenko Denys Vladimirovich)** – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, м. Харків; тел.: (093) 288-67-53; e-mail: wollydenis@gmail.com.

**Науменко Юрій Віталійович (Науменко Юрий Виталиевич, Naumenko Yury Vyatlievich)** – магістр, аспірант, Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, м. Харків; e-mail: strelea@ukr.net.