XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. 2010, vol. 50, pp. 203–211.

3. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018, vol. 6(6), pp. 976–988.

4. Veremeenko I. S., Kantor B. Ya., Naumenko V. V. Raschet gidrouprugikh kolebaniy rabochikh kolies radial'no-osevykh gidroturbin [Computation of hydroelastic vibrations of radial-axial turbine impeller]. *Vestnik NTU "KhPI"* [Bulletin of NTU "KhPI"]. 2002, vol. 12, no. 9, pp. 58–68.

5. Avramov K. V., Strelnikova E. A., Pierre C. Resonant many–mode periodic and chaotic self–sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*. 2012, no. 70, pp. 1335–1354.

6. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation.* 2011, vol. 52, pp. 285–296.

7. Gandel' Yu. V. *Vvedenie v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov* [Introduction to the computational methods of singular and hypersingular integrals]. Kharkov, Izd. Hark. natsional'nogo un-ta im. V. N. Karazina, 2000. 92 p.

8. Strel'nikova E. A. Gipersingulyarnye integral'nye uravneniya v dvumernykh kraevykh zadachakh dlya uravneniya Laplasa i uravneniy Lame [Hypersingular integral equations in the two dimensional boundary value problems for the Laplace and Lame equations]. *Dop. NAN Ukrayiny* [Reports of the National Academy of Science of Ukraine]. 2001, no. 3, pp. 27–31.

9. Muthuveerappan G., Ganesan N., Veluswami M. A. Vibration of square cantilever plate immersed in water. *Journal of Sound and Vibration*. 1978, vol. 61, issue 3, pp. 467–470.

10. Ganchin E. V., Rzhevskaya I. E., Strel'nikova E. A. Issledovanie dinamicheskikh kharakteristik lopastey rabochikh koles povorotno-lopastnykh gidroturbin pri vzaimodeystvii s zhidkostyu [Study of dynamical characteristics of Kaplan turbine impeller blades interacting with liquid]. *Visnik Kharkivs'kogo natsional'nogo universitetu* [Bulletin of the Kharkiv National University]. 2009, no. 847, pp. 79–86.

Надійшла (received) 23.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Москаленко Роман Павлович (Москаленко Роман Павлович, Moskalenko Roman Pavlovich) **–** аспірант, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 598-76-82; e-mail: rimancamomile@gmail.com.

Пальчіков Роман Георгієвич (Пальчиков Роман Георгиевич, Palchikov Roman Georgievich) **–** аспірант, Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А. М. Підгорного, м. Харків; тел.: (050) 519-31-05; e-mail: 19palchikovroman@gmail.com.

Стрельнікова Олена Олександрівна (Стрельникова Елена Александровна, Strelnikova Elena Alexandrovna) **–** доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А. М. Підгорного, м. Харків; тел.: (050) 519-31-05; e-mail: elena15@gmx.com.

УДК 519.6

А. О. ОСТАПЕНКО, Г. Г. БУЛАНЧУК

МОДЕЛЮВАННЯ ОБТІКАННЯ ПЕРЕШКОД МЕТОДОМ ГРАТКОВИХ РІВНЯНЬ БОЛЬЦМАНА ПРИ ВЕЛИКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Розглядається застосування кінетичного підходу до моделювання динаміки в'язкої рідини. Запропоновано метод регуляризації для отримання стійких та фізичних розв'язків при великих числах Рейнольдса до 20000. В основі методу регуляризації закладена медіана фільтрація, що ефективно згладжує аномальні пульсації. Верифікація методу проведена на класичній тестовій задачі про обтікання кругового циліндра. Проведені чисельні експерименти із моделювання течії довкола профілю Nasa 0012 під різними кутами атаки.

Ключові слова: в'язка рідина, рівняння Больцмана, регуляризація, круговий циліндр, профіль Nasa 0012.

А. А. ОСТАПЕНКО, Г. Г. БУЛАНЧУК

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЙ ПРЕПЯТСТВИЙ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Рассматривается применение кинетического подхода к моделированию динамики вязкой жидкости. Предложен метод регуляризации для получения устойчивых и физических решений при больших числах Рейнольдса до 20000. В основе метода регуляризации заложена медиана фильтрация, которая эффективно сглаживает аномальные пульсации. Верификация метода проведена на классической тестовой задаче об обтекании кругового цилиндра. Проведены численные эксперименты по моделированию течения около профиля Nasa 0012 под разными углами атаки.

Ключевые слова: вязкая жидкость, уравнение Больцмана, регуляризация, круговой цилиндр, профиль Nasa 0012.

A. A. OSTAPENKO, G. G. BULANCHUK

SIMULATION OF THE FLOW OVER OBSTACLES WITH THE LATTICE BOLTZMANN METHOD AT LARGE REYNOLDS NUMBERS

The application of the kinetic approach for the viscous fluid flow modeling is considered. A regularization method is proposed for obtaining stable and physical numerical solutions at large Reynolds numbers up to 20,000. The basis of the regularization method is the median filtration that effectively smoothes abnormal ripples and, at the same time, preserves the boundaries of sharp transitions and the structure of the flow. The verification of the method was carried out on the classical test task of the flow around circular cylinder at the Reynolds numbers from 500 to 20000. Numerous experiments were conducted to simulate the flow around the profile of Nasa 0012 at different angles of attack. The results of numerical solutions, namely,

the distribution diagram of the velocity magnitude, streamlines, hydrodynamic coefficients, are presented.
Key words: viscous flow, Boltzmann equation, regularization, circular cylinder, Nasa 0012 profile.

Вступ. *Метод граткових рівнянь Больцмана* або *LBM* (від. англ. Lattice Boltzmann Method) – метод обчислювальної гідродинаміки, розроблений італійськими вченими *G. R. McNamara*, *F. Higuera* та *S. Succi* у 90-х роках, як розвиток клітинно-автоматної гідродинаміки [1, 2]. Ідея методу аналогічна ідеї *методу крупних частинок*, розробленого *Білоцерковським* та *Давидовим* у 1965 році [3]. Обчислювальна область розбивається нерухомою ейлеревою сіткою, комірки якої трактуються як крупні частинки. Однак за методом LBM динаміка таких частинок описується не *рівняннями Ейлера* або *Нав'є – Стокса*, а кінетичним рівнянням *Больцмана*. Характеристики крупних частинок є усередненими характеристиками всієї сукупності мікроскопічних частинок в цій комірці і описуються статистично за допомогою функції розподілу частинок за координатами та швидкостями.

Аналіз останніх досліджень. Останнім часом метод граткових рівнянь Больцмана набуває значного поширення, особливо серед європейських вчених. На сьогодні область застосування методу вже включає моделювання багатофазних і багатокомпонентних течій, мікротечій, течій із вільними границями, течій у пористих середовищах, моделювання теплопереносу [4 – 6]. Однак, незважаючи на зростаючу популярність, ще існують такі проблеми як:

– значний час розрахунків, що істотно збільшується зі зростанням *числа Рейнольдса* [7];

– умовна стійкість чисельної схеми [8].

Ці проблеми ускладнюють отримання чисельних розв'язків для течій із помірними числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10^2$ та унеможливлюють моделювання при великих числах $\mathrm{Re} > 10^3$. Для їх часткового усунення при малих числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \sim 10$) використовують, наприклад, схеми із декількома параметрами релаксації в інтегралі зіткнень частинок або неявні схеми [9]. Проте ці проблеми до кінця не розв'язані і визначають актуальність теми статті, а також її наукове і практичне значення.

Постановка задачі. Постановка задачі для моделювання течій в'язкої ізотермічної нестисливої рідини за відсутності зовнішніх сил складається із рівняння руху Нав'є – Стокса, рівняння нерозривності, відповідних початкових та граничних умов:

$$\frac{\partial \vec{u}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} + \left(\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\cdot\nabla\right)\vec{u}\left(\vec{r},t\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p\left(\vec{r},t\right) + \nu\Delta\vec{u}\left(\vec{r},t\right); \tag{1}$$

$$div\vec{u} = 0; \tag{2}$$

$$\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\Big|_{t=t_0} = \vec{u}\left(\vec{r},t_0\right); \tag{3}$$

$$\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\Big|_{\vec{r}\in L} = 0; \tag{4}$$

$$\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\Big|_{\left|\vec{r}\right|\to\infty} = \overrightarrow{u_\infty}, \tag{5}$$

де $\vec{u}$ – вектор швидкості рідини; $\vec{r}$ – радіус-вектор точки простору; ρ – густина; p – тиск; ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості; t_0 – початковий момент часу; L – контур обтічного тіла.

Рівняння (1) та (2), початкові та граничні умови (3) – (5) описують динаміку рідини на макроскопічному рівні абстракції. Розкривається сутність *мезоскопічного рівня абстракції* в описі рідини [8, 10]. Суцільне середовище розбивається на деякі малі області, що складаються з великої кількості частинок. Кожна така мала область розглядається як крупна частинка, характеристики якої відповідають усередненим характеристикам усієї сукупності. Такі великі частинки описуються статистично за допомогою апарату кінетичної теорії газів через функцію розподілу частинок за координатами і швидкостями $f(\vec{r},\vec{u},t)$, що є розв'язком рівняння Больцмана [11]. Тому на мезоскопічному рівні абстракції динаміка рідини моделюється кінетичним рівнянням Больцмана таким чином, щоб на макроскопічному рівні виконувалися рівняння (1) – (5) [8, 10, 11].

Математична та чисельна модель. Математична модель складається із рівняння Больцмана (6), у якому інтеграл зіткнення частинок замінюється *наближенням Бхатнагара – Гросса – Крука* (7), що будується за законами збереження маси, імпульсу та енергії [10 – 13]:

$$\partial_t f + \vec{\upsilon}\partial_x f + \frac{\vec{F}}{m}\partial_\upsilon f = \int\left|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2\right|\left(f_1^{'} f_2^{'} - f_1 f_2\right) d\sigma d\vec{\upsilon}_2; \tag{6}$$

$$I_{coll} = \int\left|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2\right|\left(f_1^{'} f_2^{'} - f_1 f_2\right) d\sigma d\vec{\upsilon}_2 \approx \frac{f^{eq} - f}{\tau}. \tag{7}$$

Чисельна модель – система граткових рівнянь (8), отримується шляхом дискретизації математичної моделі (6) – (7) із урахуванням відсутності зовнішніх сил $\vec{F} \equiv 0$:

$$\underbrace{f_k(\vec{r} + \vec{V}_k\Delta t, t + \Delta t) = f_k(\vec{r},t)}_{переміщення} \underbrace{-\frac{1}{\tau}[f_k(\vec{r},t) - f_k^{eq}(\vec{r},t)]}_{зіткнення}, \tag{8}$$

де $f_k(\vec{r},t)$ – дискретна функція розподілу частинок за швидкостями; $\vec{V}_k$ – дискретний набір швидкостей частинок; Δt – крок за часом; τ – безрозмірний параметр релаксації; $f_k^{eq}(\vec{r},t)$ – дискретне наближення локальної рівноважної *функції розподілу Максвела – Больцмана*.

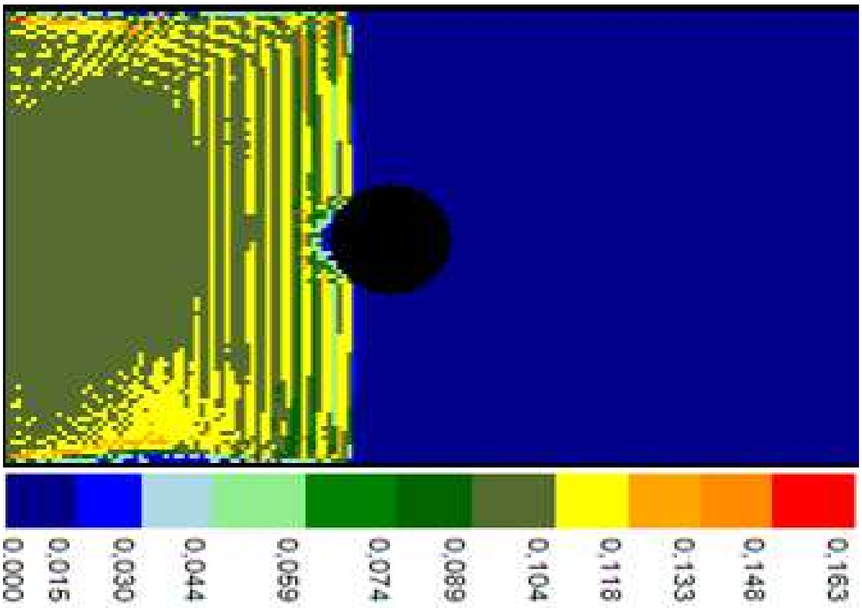


Рис. 1 – Пульсації у полі швидкостей $(\mathrm{Re}=1000)$.

Обґрунтування того, що метод граткових рівнянь Больцмана може застосовуватись для моделювання в'язких течій викладено в роботі [14]. Показано, що в ході розкладу рівнянь (8) за *методом Чепмена – Енського* можна отримати рівняння Нав'є – Стокса та рівняння нерозривності для нестисливої ізотермічної рідини (9) та формули, що пов'язують макроскопічні та граткові параметри (10) – (13).

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u}=-\nabla p+\nu\Delta\vec{u}+o(\Delta t)+o(M_p^2);\;\; \nabla\cdot\vec{u}=0+o(\Delta t)+o(M_p)\,. \tag{9}$$

Кінематична в'язкість рідини:

$$\nu=c_s{}^2\Delta t\left(\tau-0,5\right). \tag{10}$$

Швидкість звуку в комірці:

$$c_s=\frac{c}{\sqrt{3}}\;. \tag{11}$$

Граткова швидкість частинок:

$$c=\frac{d}{\Delta t}, \tag{12}$$

де d – розмір комірки розрахункової області.

Граткове *число Маха*:

$$M_p=\frac{U_{\max}}{c_s}, \tag{13}$$

де $U_{\max}$ – максимальна швидкість рідини в області.

Стійкість чисельної схеми методу LBM досліджувалась аналітично в роботах [10, 14, 15]. В цих роботах доведено, що метод є умовно стійким за параметром релаксації та значеннями швидкості, та збігається до рівнянь Нав'є – Стокса та нерозривності при малих величинах кроку по часу та граткового числа Маха (13). Нестійкість чисельного розв'язку може бути викликана одним із факторів:

- збільшення граткового числа Маха. Кінетичне рівняння Больцмана апроксимує рівняння Нав'є – Стокса тільки за малими числами Маха $M_p<0,3$;
- зменшення параметра релаксації. «Безпечним» значенням (за *S. Sucop*) є $\tau=1$. Зменшення τ викликає нестійкість: частинки скупчуються у деяких комірках, що приводить до виникнення пульсацій у полі швидкостей (рис. 1);
- збільшення швидкості. Чисельна модель передбачає моделювання течій лише за малими швидкостями $U_{\max}<c_s$;

- зростання числа Рейнольдса. Із збільшенням числа Рейнольдса $\mathrm{Re} > 10^3$ течії стають турбулентними (згідно досліджень *Г. Шліхтинга*, *Л. Г. Лойцянського*).

Макроскопічні параметри рідини: густина, швидкість та тиск визначаються як моменти функції розподілу відповідно до формул [8, 10, 12]:

$$\rho\left(\vec{r},t\right)=\sum_{k=0}^{8} f_k\left(\vec{r},t\right);\quad \vec{u}\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{\rho\left(\vec{r},t\right)}\sum_{k=0}^{8}\vec{V}_k f_k\left(\vec{r},t\right);\quad p\left(\vec{r},t\right)=c_s^2\rho\left(\vec{r},t\right). \qquad (14)$$

Рис. 2 – Згладжування розв'язку.

Аналогічно методу частинок у *комірках Харлоу* та методу крупних частинок Білоцерковського та Давидова, система граткових рівнянь Больцмана розщеплюється за *методом Яненко* – розщеплення за фізичними процесами [4]. Таким чином, один крок по часу розкладається на три етапи:

1 Етап. Переміщення частинок за рахунок переносу значень функції розподілу частинок у відповідних до вибраної моделі напрямках. В роботі використовується двовимірна дев'ятишвидкістна модель (D2Q9).

2 Етап. Отримання нових значень функції розподілу в результаті зіткнення частинок.

3 Етап. Перехід від мезоскопічного опису рідини через функцію розподілу частинок до макроскопічних параметрів, таких як густина, швидкість та тиск.

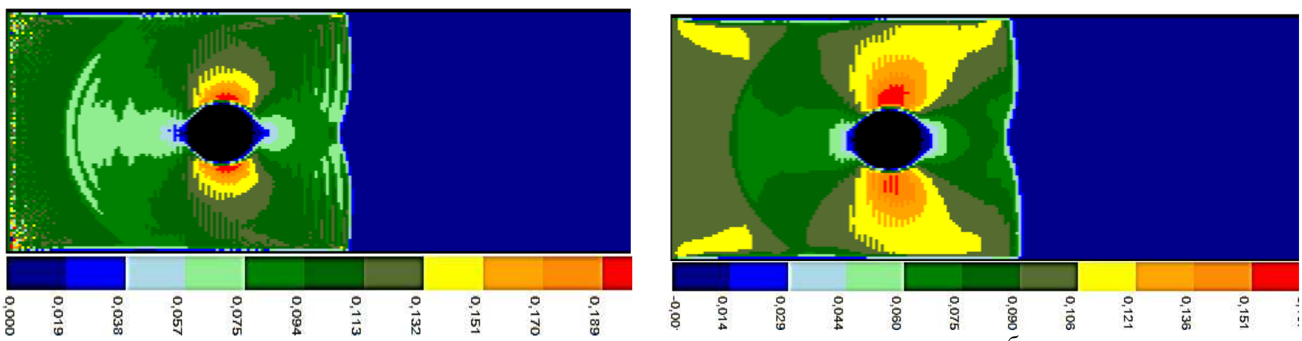
Для розв'язку задач із великими числами Рейнольдса запропоновано метод регуляризації чисельного розв'язку. Методи регуляризації застосовуються при виникненні пульсацій різного походження при розв'язку рівнянь переносу, теплопровідності, рівняння Больцмана для моделювання газової динаміки та плазми.

Для моделювання течії в'язкої рідини була використана схема за аналогом *згладження А. Л. Чудова* [17]. Метод заснований на корекції значення функції в точці простору відповідно до сусідніх значень. В основі такої корекції лежить медіанна фільтрація:

$$u_x(i,\ j)=med(u_x(i,\ j-2), u_x(i,\ j-1), u_x(i,\ j), u_x(i,\ j+1), u_x(i,\ j+2))\,. \qquad (15)$$

Особливістю медіанного фільтра є нелінійність: після згладження зберігаються різкі границі областей розв'язку, і в той же час ефективно пригнічуються некорельовані або слабокорельовані перешкоди, зменшуються аномальні викиди та згладжуються пульсації (рис. 2). Після згладження поля швидкостей, функції розподілу частинок перераховуються за локальною рівноважною функцією *розподілу Максвелла – Больцмана.*

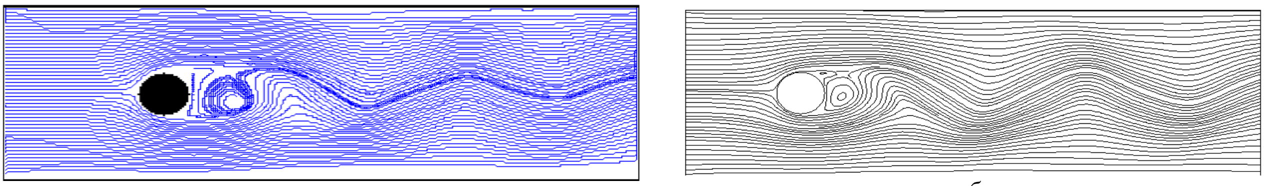
Результати моделювання. Схема згладжування протестована на класичній тестовій задачі про обтікання кругового циліндра в діапазоні чисел Рейнольдса $500 < \mathrm{Re} < 20000$. Порівняння діаграм швидкостей для $\mathrm{Re} = 500$ у момент часу $t = 2{,}5$ показане на рис. 3.



а *б*

Рис. 3 – Порівняння діаграм модуля швидкості: *а* – без згладження; *б* – із згладженням.

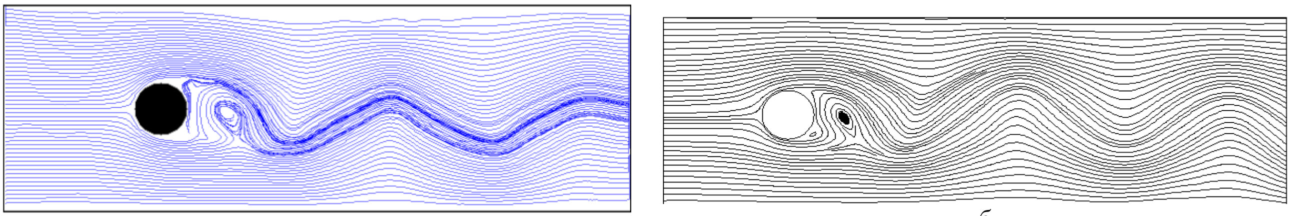
На рис. 3, *а* видно початок збурень – подальший чисельний розв'язок розбігається. Стійкий розв'язок із згладженням (рис. 4, *а*) порівнюється із розв'язком, що був отриманий методом скінченних елементів (рис. 4, *б*).



а *б*

Рис. 4 – Порівняння ліній течії при $\mathrm{Re} = 500$, $t = 50$: *а* – метод LBM зі згладженням; *б* – метод FEM.

Аналогічні порівняння проведено для інших чисел Рейнольдса з діапазону $500 < \mathrm{Re} < 20000$ (рис. 5).



а *б*

Рис. 5 – Порівняння ліній течії при $\mathrm{Re} = 20000$, $t = 50$: *а* – метод LBM зі згладженням; *б* – метод FEM.

В роботі отримані чисельні розв'язки задачі про обтікання кругового циліндра із застосуванням запропонованого методу регуляризації. Проведено порівняння результатів моделювання, що були отримані методом граткових рівнянь Больцмана зі згладженням та методом скінченних елементів, а саме: діаграм модуля швидкості, ліній течії, коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили (рис. 6) порівнювалися із результатами інших відомих чисельних експериментів. Порівняння розв'язків показало добру відповідність результатів моделювання у діапазоні чисел Рейнольдса $500 < \mathrm{Re} < 20000$.

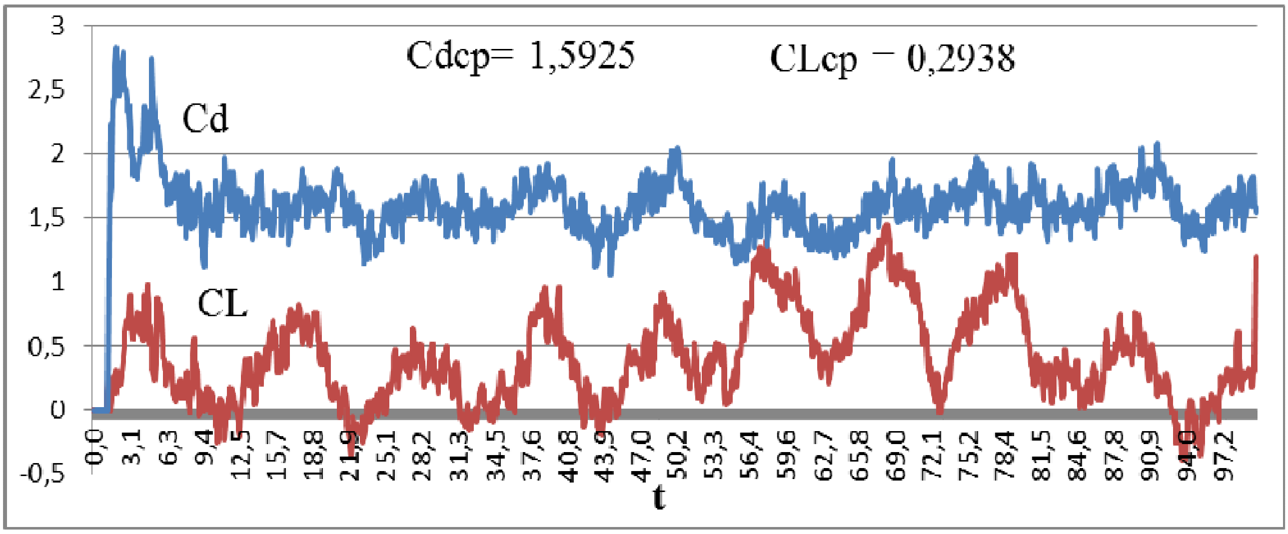


Рис. 6 – Графіки зміни коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили з часом, а також їх середні значення при $\mathrm{Re} = 20000$.

Проведено моделювання обтікання профілю Nasa 0012 при різних кутах атаки течією в'язкої рідини із числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1000$. Досліджувався вплив кута атаки на динаміку течії, на значення коефіцієнтів лобового опору і підйомної сили крила (рис. 7).

Проведені чисельні експерименти свідчать про зростання гідродинамічних коефіцієнтів та утворення вихорів за профілем при збільшенні кута атаки. Чисельні розв'язки поставленої задачі із кутами атаки більше $\alpha > 30^{\circ}$ є нестійкими і потребують подальшого вивчення.

Перспективи подальших досліджень. Однією із переваг методу граткових рівнянь Больцмана є можливість застосувати до алгоритму технології паралельних обчислень. В роботі вже була використана *технологія OpenMP* для розпаралелювання обчислень на центральному процесорі. Подальшого вивчення потребує застосування *технології CUDA*, що потенційно може збільшити швидкість розрахунків від 10 до 100 разів.

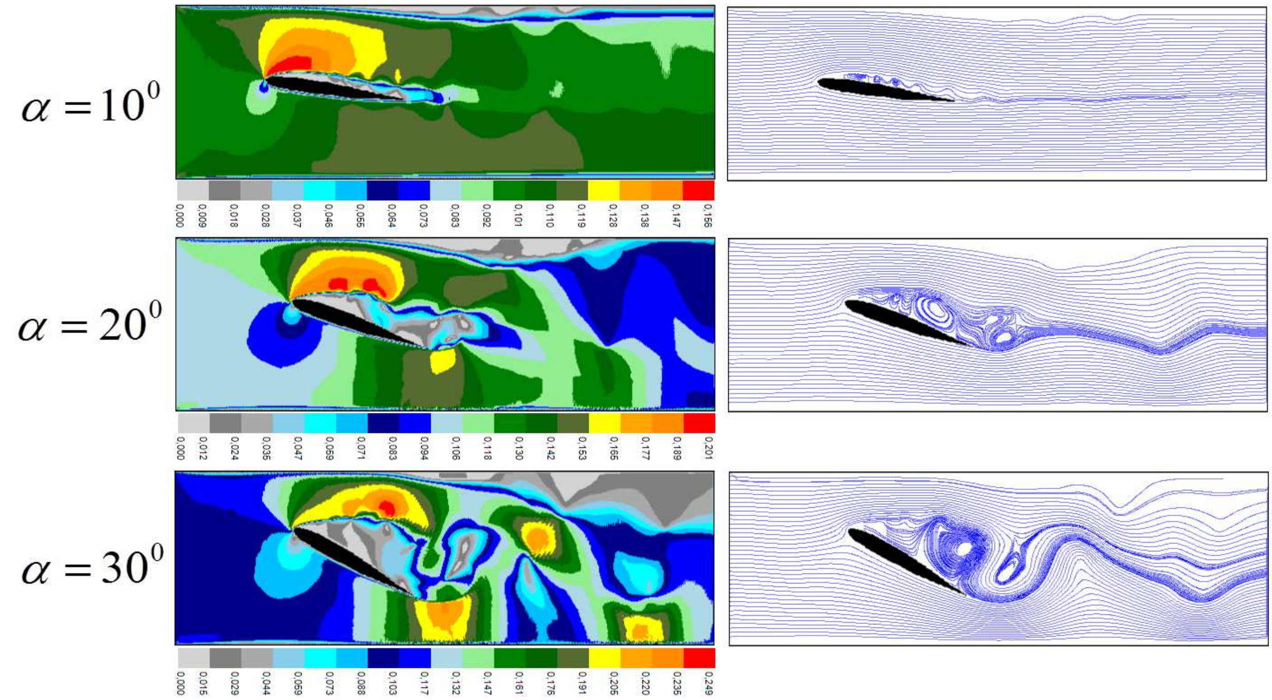


Рис. 7 – Зміна характеру течії за умови збільшення кута α атаки профілю Nasa 0012.

Висновки. В роботі розглянуті можливості методу граткових рівнянь Больцмана для моделювання течій в'язкої рідини. Запропонований та протестований метод регуляризації чисельних розв'язків для отримання стійких та фізичних результатів при великих числах Рейнольдса до 20000. В основу метода закладена медіана фільтрація, що ефективно згладжує аномальні пульсації і, при цьому, залишає без змін структуру течії. Тестування методу проводилося на класичній задачі про обтікання кругового циліндра і показало добру відповідність результатів моделювання із результатами, що були отримані методом скінченних елементів у пакеті Comsol Multiphysics. Досліджена течія в'язкої рідини довкола профілю Nasa 0012 під різними кутами атаки. Показано утворення вихорів за крилом із зростанням кута атаки.

Список літератури

1. *Succi S., Benzi R., Higuera F.* The lattice Boltzmann equation: a new tool for computational fluid-dynamics // Physica D. – 1991. – 47 – P. 219 – 230.
2. *Mcnamara G. R., Zanetti G.* Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata // Rev. Letter. – 1988. – Vol. 61. – P. 23 – 32.
3. *Белоцерковский О. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 392 с.
4. *Anderl D., Bogner S., Rauh C., Rude U., Delgado A.* Free surface lattice Boltzmann with enhanced bubble model // Computers and Mathematics with Applications. – 2014. – Vol. 67. – № 2. – P. 331 – 339.
6. *Coupanec E.* Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. Mass conserving boundary conditions for moving walls. – Trondheim : Norwegian University of Science and Technology. Department of Energy and Process Engineering, 2010. – 39 p.
7. *Grazyna K.* The numerical solution of the transient heat conduction problem using the lattice Boltzmann method // Scientific Research of the Institute of Mathematic and Computer Science. – 2006. – № 11. – P. 23 – 30.
8. *Куперштох А. Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – № 13. – С. 130 – 138.
9. *Sucop M.* Lattice Boltzmann Modeling. An Introduction for Geoscientists and Engineers. – Miami : Springer, 2006. – 171 p.
10. *Rettinger C.* Fluid Flow Simulation using the Lattice Boltzmann Method with multiple relaxation times. – Erlanger : Friedrich-Alexander University of Erlanger-Nurnberg, 2013. – 38 p.
11. *Wolf-Gladrow D.* Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models – An Introduction. – Bremerhaven : Alfred Wegener Institute for Polar and Marine, 2005. – 273 p.
12. *Succi S.* The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. – Oxford University Press, 2001. – 288 p.
13. *Ляпин И. И.* Введение в теорию кинетических уравнений: Учебное пособие. – Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2003. – 205 с.
14. *Mussa M.* Numerical Simulation of Lid-Driven Cavity Flow Using the Lattice Boltzmann Method // Applied Mathematics. – 2008. – Vol. 13. – P. 236 – 240.
15. *He X.* Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier – Stokes Equation // Journal of statistical physics. – 1997. – Vol. 88. – P. 927 – 944.
16. *Skordos P.* Initial and Boundary conditions for the lattice Boltzmann method // Physical review E. – 1993. – 48(6). – P. 4823 – 4842.
17. *Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А.* Численное моделирование процессов тепло и массообмена. – М. : Наука, 1984. – 288 с.

References (transliterated)

1. Succi S., Benzi R., Higuera F. The lattice Boltzmann equation: a new tool for computational fluid-dynamics. *Physica D.* 1991, no. 47, pp. 219–230.
2. Mcnamara G. R., Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Rev. Letter*. 1988, vol. 61, pp. 23–32.

3. Belocerkovskiy O. M. *Metod krupnukh chastits v gazovoy dinamike* [Large particles method in gas dynamics]. Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1982. 392 p.
4. Anderl D., Bogner S., Rauh C., Rude U., Delgado A. Free surface lattice Boltzmann with enhanced bubble model. *Computers and Mathematics with Applications*. 2014, vol. 67, no. 2, pp. 331–339.
6. Coupanec E. *Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. Mass conserving boundary conditions for moving walls*. – Trondheim, Norwegian University of Science and Technology. Department of Energy and Process Engineering, 2010. 39 p.
7. Grazyna K. The numerical solution of the transient heat conduction problem using the lattice Boltzmann method. *Scientific Research of the Institute of Mathematic and Computer Science*. 2006. no. 11, pp. 23–30.
8. Kupershtokh A. L. Triokhmernoe modelirovanie dvukhphaznykh system tipa zhudkost'-par metodom reshotochnykh uravneniy Boltz'mana na GPU [Three dimensional modeling of the two phase fluid-steam systems with the lattice Boltzmann method on GPU]. *Vychislitel'nye metody i programirovanie* [Numerical methods and programming]. 2012, no. 13, pp. 130–138.
9. Sucop M. *Lattice Boltzmann Modeling. An Introduction for Geoscientists and Engineers*. Miami, Springer, 2006. 171 p.
10. Rettinger C. *Fluid Flow Simulation using the Lattice Boltzmann Method with multiple relaxation times*. Erlanger : Friedrich-Alexander-University of Erlanger-Nurnberg, 2013. 38 p.
11. Wolf-Gladrow *D. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models – An Introduction*. Bremerhaven, Alfred Wegener Institute for Polar and Marine, 2005. 273 p.
12. Succi S. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press, 2001. 288 p.
13. Liapin I. I. *Vvedenie v teoriyu kineticheskikh uravneniy* [Introduction to the theory of kinetic equations]. Ekaterinburg, UGTU-UPI Publ., 2003. 205 p.
14. Mussa M. Numerical Simulation of Lid-Driven Cavity Flow Using the Lattice Boltzmann Method. *Applied Mathematics.* 2008, vol. 13, pp. 236–240.
15. He X. Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier – Stokes Equation. *Journal of statistical physics*. 1997, vol. 88, pp. 927–944.
16. Skordos P. Initial and Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. *Physical review E*. 1993, no. 48(6), pp. 4823–4842.
17. Paskonov B. M., Poleszhaev V. I., Chudov L. A. *Chislennoe modelirovanie protsesov teplo i masoobmena* [Numerical modeling of the heat and mass transfer processes]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 288 p.

Надійшла (received) 18.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Остапенко Артем Олексійович (Остапенко Артём Алексеевич, Ostapenko Artem Alekseevich) – асистент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь; тел.: (098) 176-98-24; e-mail: ostapt5@gmail.com.

Буланчук Галина Григорівна (Буланчук Галина Григориевна, Bulanchuk Galina Grigorievna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь; тел.: (098) 201-83-08; e-mail: ggbulan7@gmail.com.

УДК 519.6, 539.3

Б. Е. ПАНЧЕНКО

О ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА И С НЕОПРЕДЕЛЯЕМЫМ ИНДЕКСОМ С УЧЕТОМ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ СЛАУ

Путем сведения к двум разным типам систем сингулярных интегральных уравнений (СИУ) численно исследуется краевая задача математической физики для бесконечной упругой изотропной области, содержащей неподвижное включение с поперечным сечением произвольной формы, находящееся под воздействием плоских гармонических стационарных волн. Задача решается с использованием систем СИУ 1-го и 2-го рода (но с неопределяемым индексом). С использованием кластерных высокоточных вычислительных схем исследуется зависимость числа обусловленности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) от волнового числа. Наряду с исследовательскими задачами, разработанные методы и алгоритмы могут использоваться для подготовки специалистов в области «дата майнинга».

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, индекс уравнения, число обусловленности СЛАУ, численный эксперимент, дифракция плоских волн, неподвижное включение (защемленное отверстие).

Б. Є. ПАНЧЕНКО

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ ТА З НЕВИЗНАЧАЄМИМ ІНДЕКСОМ З УРАХІВАННЯМ ЧИСЛА ОБУМОВЛЕНОСТІ СЛАР

Шляхом зведення до двох різних типів систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) проведено чисельне дослідження крайової задачі математичної фізики для нескінченного пружного ізотропного середовища, що містить нерухоме включення з поперечним перерізом довільної форми, яке знаходиться під впливом плоских гармонічних стаціонарних хвиль. Задачу розв’язано з використанням систем СІР 1-го та 2-го роду (але з невизначаємим індексом). Завдяки кластерним високоточним обчисленням досліджено залежність числа обумовленості СЛАР від хвильового числа. Окрім дослідницьких задач, розроблені методи і алгоритми можуть використовуватися для підготовки фахівців в галузі «дата майнінга».

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, індекс рівняння, число обумовленості СЛАР, чисельний експеримент, дифракція плоских хвиль, нерухоме включення (затиснений отвір).