delyaemym indeksom [On a numerical study of systems of singular integral equations of the first kind and with an undeterminable index]. *Trudu 5y Megdunarodnoy konferentsii HPC-UA* [Proceedings of the 5-th International Conference HPC-UA]. Kyiv, 2018. pp. 111–114.

16. Panchenko B. E., Sayko I. N. Vusokotochnye maksimal'nue napryageniya v zadache o vzaimodeyastvii uprugikh voln s sistemoy tsylindricheskikh polostey v usloviyakh ploskoy deformatsii [High-precision maximum stresses in the problem of the interaction of elastic waves with a system of cylindrical cavities under plane strain conditions]. *Kibernetika i sistemnuy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2015, vol. 5, pp. 139–148.

17. Panchenko B. E. *Reshenie dvumernykh zadach difraktsii uprugikh voln na tsylundricheskikh neodnorodnostyakh : dissc na soiskan. k.f.-m.n.* [Solving two-dimensional problems of diffraction of elastic waves on cylindrical heterogeneities. Thesis of the Candidate of Physical and Mathematical Science dissertation]. Sumy, 1996. 125 p.

18. Filshtinskiy L. A. Periodicheskie resheniya teorii uprugosti dlya tsylindra v R3 [Periodic solutions of the theory of elasticity for a cylinder in R3]. *Teoretich. i prikl. Mekhanika* [Theoretical and applied mechanics]. Kharkov, Osnova Publ., 1990, vol. 21, pp. 13–20.

19. Nazarenko A. M., Lozhkin A. M., Panchenko B. E. Difraktsiya voln ploskoy deformatsii na zhestkom tsilindricheskom vklyuchenii proizvol'nogo poperechnogo secheniya [Diffraction of plane strain waves on a rigid cylindrical inclusion of an arbitrary cross section]. *Donets'k : Visnyk DonNU. Ser. A : Pryrodnychi nauky* [Donetsk : Bulletin of the Donetsk National University. Series A : Natural science]. 2006, no. 1, pp. 143–147.

20. Sheshko M. A., Shulyaev D. S., Rasolko G. A., Mastyanitsa V. S. K voprosu obuslovlennosti matritsy lineynoy algebraicheskoy sistemy, voznikayushey pri aproksimatsii singulyarnogo integral'nogo uravneniya s yadrom Koshi [On the question of the conditionality of the matrix of a linear algebraic system arising from the approximation of a singular integral equation with a Cauchy kernel]. *Diferenc. Uravneniya* [Differential equations]. 1999, vol. 35, no. 9, pp. 1278–1285.

21. Kalitkin N. N. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Sankt – Pbeterburg, BHV-Peterburg Publ., 2011. 592 p.

22. Selezov I. T. Razvitie i prilozhenie metoda Koshi – Puassona v elastodinamike sloya i uravnenie Timoshenko [Development and application of the Cauchy-Poisson method in elastodynamics of a layer and Timoshenko's equation]. Kibernetika i sistemnuy analiz [Cybernetics and system analysis]. 2018, no. 3, pp. 106–115.

Поступила (received) 16.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Панченко Борис Євгенійович (Панченко Борис Евгеньевич, Panchenko Borys Evgenijovuch) – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор, Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова, м. Одеса, Інститут кібернетики НАН України ім. В.М. Глушкова, старший науковий співробітник, м. Київ; тел.: (067) 449-39-70; e-mail: pr-bob@ukr.net.

УДК 517.968

Т. С. ПОЛЯНСКАЯ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

На основе метода дискретных особенностей построена дискретная математическая модель гиперсингулярного интегрального уравнения на стандартном интервале $(-1, 1)$ и на системе интервалов. Доказана однозначная разрешимость дискретной модели и дана оценка скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению гиперсингулярного интегрального уравнения при некоторых предположениях гладкости.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, метод дискретных особенностей.

Т. С. ПОЛЯНСЬКА

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОДНОГО ГІПЕРСИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

На основі методу дискретних особливостей построєна дискретна математична модель гіперсингулярного інтегрального рівняння на стандартному інтервалі $(-1, 1)$ і на системі інтервалів. Доведено однозначна розв'язність дискретної моделі і дана оцінка швидкості збіжності рішення дискретної задачі до точного рішення гіперсингулярного інтегрального рівняння при деяких припущеннях гладкості.

Ключові слова: гіперсингулярне інтегральне рівняння , метод дискретных особливостей.

T. S. POLYANSKAYA

DISCRETE MATHEMATICAL MODEL OF A HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION

A discrete mathematical model of a hypersingular integral equation on the standard interval $(-1, 1)$ and on a system of intervals is constructed based on the method of discrete singularities. The unique solvability of the model is proved and the convergence rate of the solution of the discrete problem to the exact solution of the hypersingular integral equation is estimated under some smoothness assumptions.

Key words: hypersinular integral equation, method of discrete singularities.

Введение. На базе *гиперсингулярного интегрального уравнения* (ГСИУ):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(x)}{(x_0-x)^2}\sqrt{1-x^2}\,dx+\frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(x)}{x_0-x}\sqrt{1-x^2}\,dx+\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|x_0-x|u(x)\sqrt{1-x^2}\,dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K(x_0,x)u(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = f(x_0),\ |x_0|<1 \qquad (1)$$

была построена математическая модель электромагнитного поля в *коаксиальном гиротроне* для случая *ТМ волн (Transverse Magnetic Waves)*. Это уравнение возникает также в теории проволочных антенн. При исследовании математической модели гиротрона с несколькими резонаторами различной ширины и глубины возникает необходимость численного решения ГСИУ на системе интервалов.

Численное решение ГСИУ на интервале $(-1,1)$**.** Рассмотрим уравнение (1) относительно неизвестной функции $u(x)$, которое предполагается однозначно разрешимым. Здесь первый интеграл понимается в смысле *конечной части по Адамару*, а второй интеграл – в смысле *главного значения по Коши*; a и b – заданные константы. Построение численного метода приближенного решения уравнения (1) и его обоснование проводятся в предположении, что $f(x_0)\in C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$, а $K(x_0,x)\in C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной, где $C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$ – класс функций, производная которых удовлетворяет *условию Гёльдера* с показателем $\alpha>0$.

Введём операторы:

$$(Au)(x_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(x)}{(x_0-x)^2}\sqrt{1-x^2}\,dx;\quad (\Gamma u)(x_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(x)}{(x_0-x)}\sqrt{1-x^2}\,dx;$$

$$(Bu)(x_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|x_0-x|u(x)\sqrt{1-x^2}\,dx;\quad (Ku)(x_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x_0,x)u(x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

С помощью этих обозначений уравнение (1) можно записать в операторном виде:

$$Au+a\Gamma u+bBu+Ku=f. \qquad (2)$$

Имеют место соотношения [2, 3]:

$$A: U_{n-1}(x)\to nU_{n-1}(x_0);$$
$$\Gamma: U_{n-1}(x)\to T_n(x_0),$$

где $U_{n-1}(x)$ – *многочлен Чебышева второго рода степени* $(n-1)$, а $T_n(x)$ – *многочлен Чебышева первого рода степени* n. Оператор B переводит полиномы степени $(n-2)$ в полиномы степени n. То есть оператор A сохраняет степень полинома, а операторы Γ и B повышают её. Это следует учитывать при дискретизации уравнения (2). Произведём регуляризацию операторов Γ и B так, чтобы регуляризированные операторы переводили полиномы степени $(n-2)$ в полиномы степени $(n-2)$. Для этого положим [1, 3]:

$$(\Gamma_{n-2}u_{n-2})(x_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}u_{n-2}(x)\left(\frac{1}{x_0-x}-U_{n-2}(x)T_{n-1}(x_0)\right)\sqrt{1-x^2}\,dx;$$

$$(B_{n-2}u_{n-2})(x_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\ln|x_0-x|+\frac{2T_{n-1}(x)T_{n-1}(x_0)}{n-1}+\frac{2T_n(x)T_n(x_0)}{n}\right)u_{n-2}(x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Обозначим $(P_{n-2}v)(x)$ – *интерполяционный полином Лагранжа* функции $v(x)$ с узлами интерполирования $x_j^n=\cos\frac{j}{n}\pi,\ j=1,\dots,n-1$, которые являются нулями многочлена Чебышева второго рода $U_{n-1}(x)$.

В соответствии с методом дискретных особенностей, приближенное решение уравнения (1) ищем в виде интерполяционного полинома Лагранжа $u_{n-2}(x)\equiv(P_{n-2}u)(x)$ из уравнения:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_{n-2}(x)}{(x_0-x)^2}\sqrt{1-x^2}\,dx+\frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}u_{n-2}(x)\left(\frac{1}{x_0-x}-2U_{n-2}(x)T_{n-1}(x_0)\right)\sqrt{1-x^2}\,dx+$$

$$+\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\ln|x_0-x|+\frac{2T_{n-1}(x)T_{n-1}(x_0)}{n-1}+\frac{2T_n(x)T_n(x_0)}{n}\right)u_{n-2}(x)\sqrt{1-x^2}\,dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(P_{n-2_{x_0}}P_{n-2_x}K\right)(x_0,x)u_{n-2}(x)\sqrt{1-x^2}\,dx=(P_{n-2}f)(x_0),\ |x_0|<1, \qquad (3)$$

которое может быть записано в операторном виде:

$$Au_{n-2}+a\Gamma_{n-2}u_{n-2}+bB_{n-2}u_{n-2}+K_{n-2}u_{n-2}=f_{n-2}, \qquad (4)$$

где

$$\left(K_{n-2}u_{n-2}\right)(x_0) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(P_{n-2_{x_0}}P_{n-2_x}K\right)(x_0,x)u_{n-2}(x)\sqrt{1-x^2}\,dx\,,\quad f_{n-2}(x_0)=\left(P_{n-2}f\right)(x_0).$$

Подставляя в уравнение (3) вместо x_0 значения $x_k^n=\cos\frac{k}{n}\pi,\ k=1,\ldots,n-1$, получаем систему, состоящую из $(n-1)$ уравнений. Применим для вычисления интегралов в этой системе точные квадратурные формулы интерполяционного типа [2]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_{n-2}(x)}{(x_k^n-x)^2}\sqrt{1-x^2}\,dx=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1}u_{n-2}(x_j^n)\frac{\left(1-(-1)^{j+k}\right)\left(1-(x_j^n)^2\right)}{n\left(x_k^n-x_j^n\right)^2}-u_{n-2}(x_k^n)\frac{n}{2}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{n-1}u_{n-2}(x_j^n)I_{jkn}^{(1)}-u_{n-2}(x_k^n)\frac{n}{2};$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_{n-2}(x)}{(x_k^n-x)}\sqrt{1-x^2}\,dx=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1}u_{n-2}(x_j^n)\frac{\left(1-(-1)^{j+k}\right)\left(1-(x_j^n)^2\right)}{n\left(x_k^n-x_j^n\right)}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{n-1}u_{n-2}(x_j^n)I_{jkn}^{(2)};$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|x_k^n-x\right|u_{n-2}(x)\sqrt{1-x^2}\,dx=\sum_{j=1}^{n-1}u_{n-2}(x_j^n)\frac{\left((x_j^n)^2-1\right)}{n}\left[\ln 2+2\sum_{m=1}^{n-1}\frac{T_m(x_j^n)}{m}T_m(x_k^n)+\frac{(-1)^{j+k}}{2n}\right]=\sum_{j=1}^{n-1}u_{n-2}(x_j^n)I_{jkn}^{(3)};$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x_k^n,x)u_{n-2}(x)\sqrt{1-x^2}\,dx=\sum_{j=1}^{n-1}u_{n-2}(x_j^n)\frac{\left(1-(x_j^n)^2\right)}{n}K(x_k^n,x_j^n)=\sum_{j}^{n-1}u_{n-2}(x_j^n)I_{jkn}^{(4)}.$$

В результате получаем эквивалентную уравнению (3) систему линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах интерполирования:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(J_{jkn}^{(1)}+J_{jkn}^{(2)}+J_{jkn}^{(3)}+J_{jkn}^{(4)}\right)u_{n-2}(x_j^n)=f(x_k^n),\quad k=1,2,\ldots,n-1,\tag{5}$$

где

$$J_{jkn}^{(1)}=\begin{cases}I_{jkn}^{(1)}, & j\neq k;\\ -\frac{n}{2}, & j=k;\end{cases}\qquad J_{jkn}^{(2)}=\begin{cases}I_{jkn}^{(2)}+\frac{2}{n}(-1)^{j+k}\left(1-(x_j^n)^2\right), & j\neq k;\\ 0, & j=k;\end{cases}$$

$$J_{jkn}^{(3)}=I_{jkn}^{(3)}+\frac{\left(1-(x_j^n)^2\right)}{n}\left(\frac{2(-1)^{k+j}}{n-1}+\frac{2T_n(x_j^n)T_n(x_k^n)}{n}\right),\quad J_{jkn}^{(4)}=I_{jkn}^{(4)}.$$

Отметим, что число уравнений полученной системы равно числу неизвестных.

Однозначная разрешимость системы (5) эквивалентна однозначной разрешимости уравнения (3) и, соответственно, уравнения (4). Доказательство однозначной разрешимости удобнее проводить для операторного уравнения (4).

Введем *гильбертовы пространства*, в которых действуют рассматриваемые операторы. Пусть L^I – гильбертово пространство функций со скалярным произведением:

$$(u,v)^I=\int_{-1}^{1}u(x)\overline{v}(x)\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}\left(u(x)\sqrt{1-x^2}\right)'\left(\overline{v}(x)\sqrt{1-x^2}\right)'dx\,;$$

L^{II} – гильбертово пространство функций со скалярным произведением:

$$(u,v)^{II}=\int_{-1}^{1}u(x)\overline{v}(x)\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Π_{n-2}^{I} и Π_{n-2}^{II} – пространства полиномов степени не выше $(n-2)$, являющиеся подпространствами гильбертовых пространств L^I и L^{II}, соответственно.

Операторы A и Γ вполне непрерывны в паре пространств (L^I,L^{II}), следовательно, и оператор $\mathrm{A}+a\Gamma$ вполне непрерывен в этой же паре пространств. А отсюда и из однозначной разрешимости уравнения (1) следует непрерывная обратимость оператора $\mathrm{A}+a\Gamma+b\mathrm{B}+\mathrm{K}$ в паре пространств (L^I,L^{II}). Оператор $\mathrm{A}+a\Gamma_{n-2}+$ $+b\mathrm{B}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-2}$ действует в паре пространств $(\Pi_{n-2}^{I},\Pi_{n-2}^{II})$.

Для доказательства однозначной разрешимости уравнения (4) и оценки скорости сходимости приближенного решения к точному нам нужны следующие неравенства, которые получаем, пользуясь теоремами Джексона и свойствами интерполяционных полиномов [1, 5]:

$$\|f-f_{n-2}\|_{L^{II}}\le\frac{F}{n^{1+\alpha}};\quad \|\Gamma-\Gamma_{n-2}\|_{\Pi^I_{n-2}\to L^{II}}\le\frac{C^{(1)}}{n};\quad \|B-B_{n-2}\|_{\Pi^I_{n-2}\to L^{II}}\le\frac{C^{(2)}}{n^2};$$

$$\|K-K_{n-2}\|_{\Pi^I_{n-2}\to L^{II}}\le\frac{C(K)}{n^{1+\alpha}},\tag{6}$$

где $n>3$; $F, C^{(1)}, C^{(2)}, C(K)$ – константы, не зависящие от n.

Из неравенств (6) следует оценка:

$$\|(A+a\Gamma_{n-2}+bB_{n-2}+K_{n-2})u_{n-2}-(A+a\Gamma+bB+K)u_{n-2}\|_{L^{II}}\le\left(\frac{C^{(1)}}{n}+\frac{C^{(2)}}{n^2}+\frac{C(K)}{n^{1+\alpha}}\right)\|u_{n-2}\|_{L^I}\le\frac{D}{n}\|u_{n-2}\|_{L^I},\tag{7}$$

где D – константа, не зависящая от n.

Далее воспользуемся следующим результатом [4]:

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $\tilde{X}\subset X$ и $\tilde{Y}\subset Y$ – их конечномерные подпространства одинаковой размерности. Рассмотрим два уравнения:
точное

$$Kx=y\ (x\in X,\ y\in Y)$$

и приближённое

$$\tilde{K}\tilde{x}=\tilde{y}\ (\tilde{x}\in\tilde{X},\ \tilde{y}\in\tilde{Y}),$$

где K и $\tilde{K}$ – линейные операторы; $K:X\to Y$, $\tilde{K}:\tilde{X}\to\tilde{Y}$. Тогда, если выполнены условия:

а) оператор K непрерывно обратим в паре пространств (X,Y);

б) $p=\|K^{-1}\|_{Y\to X}\|K-\tilde{K}\|_{\tilde{X}\to\tilde{Y}}<1$,

то приближённое уравнение имеет единственное решение $\tilde{x}^*\in\tilde{X}$ при любой правой части $\tilde{y}\in\tilde{Y}$, причём, если $x^*\in X$ – точное решение уравнения $Kx=y$ и $\delta=\|y-\tilde{y}\|_Y$, то

$$\|x^*-\tilde{x}^*\|_X\le\|K^{-1}\|_{Y\to X}(1-p)^{-1}\left[\delta-p\|y\|_Y\right].$$

Отсюда, пользуясь неравенствами (6) и (7), окончательно получаем следующий результат.

Теорема 1. *При всех* $n\ge D\|(A+a\Gamma+bB+K)^{-1}\|_{L^{II}\to L^I}$ *уравнение (4) имеет единственное решение. Кроме того, имеет место оценка скорости сходимости приближенного решения к точному*:

$$\|u_{n-2}-u\|_{L^I}=\underline{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Численное решение ГСИУ на системе интервалов. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_S\frac{v(t)}{(t_0-t)^2}dt+\frac{a}{\pi}\int_S\frac{v(t)}{t_o-t}dt+\frac{b}{\pi}\int_S v(t)\ln|t_0-t|dt+\frac{1}{\pi}\int_S Q(t_0,t)v(t)dt=g(t_0),\ t_0\in S,\tag{8}$$

относительно неизвестной функции $v(t)$.

Здесь $S=\bigcup_{k=1}^m(\alpha_k,\beta_k)$, $-\infty<\alpha_1<\beta_1<\ldots<\alpha_m<\beta_m<+\infty$, $g(t_0)\in C^{1,\alpha}_{\bar{S}}$, $Q(t_0,t)\in C^{1,\alpha}_{\bar{S}}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной, a и b – заданные константы. Уравнение (8) предполагается однозначно разрешимым.

Обозначим:

$$v(t)\big|_{t\in(\alpha_j,\beta_j)}=\sqrt{(t-\alpha_j)(\beta_j-t)}\,w_j(t),\ g(t_0)\big|_{t_0\in(\alpha_i,\beta_i)}=g_i(t_0),\ Q(t_0,t)\big|_{\substack{t_0\in(\alpha_i,\beta_i)\\ t\in(\alpha_j,\beta_j)}}=Q_{ij}(t_0,t),\ i,j=1,\ldots,m.$$

Обозначим также $\varphi_к(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\beta_k-\alpha_k\right)x+\alpha_k+\beta_k\right]$, и произведем замену переменных:

$$t_0=\varphi_i(x_0),\ t_0\in(\alpha_i,\beta_i),\ -1<x_0<1;\quad t=\varphi_j(x),\ t\in(\alpha_j,\beta_j),\ -1<x<1.$$

Обозначая $u_j(x)=w_j(\varphi_j(x)),\ f_i(x_0)=g_i(\varphi_i(x_0))$ и производя очевидные преобразования, получаем следующую систему ГСИУ относительно неизвестных функций $u_i(x),\ i=1,...,m$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_i(x)}{\left(x_0-x\right)^2}\sqrt{1-x^2}dx+\frac{a_i}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_i(x)}{x_0-x}\sqrt{1-x^2}dx+\frac{b_i}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|x_0-x\right|u_i(x)\sqrt{1-x^2}dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{-1}^{1}K_{ij}(x_0,x)u_j(x)\sqrt{1-x^2}dx=f_i(x_0),\ \left|x_0\right|<1,\ i=1,...,m. \qquad (9)$$

Здесь $f_i(x_0)\in C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$, а $K_{ij}(x_0,x)\in C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной, $i,j=1,...,m$.

Эту систему можно записать в виде операторного уравнения

$$\overline{A}\vec{u}+\overline{a}\overline{\Gamma}\vec{u}+\overline{b}\overline{B}\vec{u}+\overline{K}\vec{u}=\vec{f} \qquad (10)$$

относительно неизвестной вектор-функции $\vec{u}(x)=\left\{u_i(x)\right\}_{i=1}^{m}$. Здесь введены обозначения:

$$\left(\overline{A}\vec{u}\right)(x_0)=\left\{\left(Au_i\right)(x_0)\right\}_{i=1}^{m};\quad \left(\overline{a}\overline{\Gamma}\vec{u}\right)(x_0)=\left\{a_i\left(\Gamma u_i\right)(x_0)\right\}_{i=1}^{m};\quad \left(\overline{b}\overline{B}\vec{u}\right)(x_0)=\left\{b_i\left(Bu_i\right)(x_0)\right\}_{i=1}^{m};$$

$$\left(\overline{K}\vec{u}\right)(x_0)=\left\{\left(\sum_{j=1}^{m}K_{ij}u_j\right)(x_0)\right\}_{i=1}^{m};\quad \vec{f}(x_0)=\left\{f_i(x_0)\right\}_{i=1}^{m}.$$

Однозначная разрешимость уравнения (8) эквивалентна однозначной разрешимости системы (9) и, следовательно, уравнения (10).

Приближенное решение $\vec{u}_{\overline{n}}(x)=\left\{u_{in_i-2}(x)\right\}_{i=1}^{m}$, $\overline{n}=(n_1,n_2,...,n_m)$, уравнения (10) ищется из операторного уравнения

$$\overline{A}\vec{u}_{\overline{n}}+\overline{a}\overline{\Gamma}_{\overline{n}}\vec{u}_{\overline{n}}+\overline{b}\overline{B}_{\overline{n}}\vec{u}_{\overline{n}}+\overline{K}_{\overline{n}}\vec{u}_{\overline{n}}=\vec{f}_{\overline{n}}, \qquad (11)$$

где

$$\left(\overline{a}\overline{\Gamma}_{\overline{n}}\vec{u}_{\overline{n}}\right)(x_0)=\left\{a_i\left(\Gamma_{n_i-2}u_{in_i-2}\right)(x_0)\right\}_{i=1}^{m};\quad \left(\overline{b}\overline{B}_{\overline{n}}\vec{u}_{\overline{n}}\right)(x_0)=\left\{b_i\left(B_{n_i-2}u_{in_i-2}\right)(x_0)\right\}_{i=1}^{m};$$

$$\left(\overline{K}_{\overline{n}}\vec{u}_{\overline{n}}\right)(x_0)=\left\{\left(\sum_{j=1}^{m}K_{ijn_i-2n_j-2}u_{jn_j-2}\right)(x_0)\right\}_{i=1}^{m};\quad \vec{f}_{\overline{n}}(x_0)=\left\{f_{in_i-2}(x_0)\right\}_{i=1}^{m}.$$

Операторное уравнение (11) эквивалентно следующей системе ГСИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_{in_i-2}(x)}{\left(x_0-x\right)^2}\sqrt{1-x^2}dx+\frac{a_i}{\pi}\int_{-1}^{1}u_{in_i-2}(x)\left(\frac{1}{x_0-x}-2U_{n_i-2}(x)T_{n_i-1}(x_0)\right)\sqrt{1-x^2}dx+$$

$$+\frac{b_i}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\ln\left|x_0-x\right|+\frac{2T_{n_i-1}(x)T_{n_i-1}(x_0)}{n_i-1}+\frac{2T_{n_i}(x)T_{n_i}(x_0)}{n_i}\right)u_{in_i-2}(x)\sqrt{1-x^2}dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{-1}^{1}\left(P_{n_i-2_{x_0}}P_{n_i-2_x}K_{ij}\right)(x_0,x)u_{jn_j-2}(x)\sqrt{1-x^2}dx=\left(P_{n_i-2}f\right)(x_0),\ \left|x_0\right|<1,\ i=1,...,m. \qquad (12)$$

Подставляя в $i-$е уравнение системы (12) вместо x_0 значения $x_k^{n_i}=\cos\frac{k}{n_i}\pi,\ k=1,...,n_i-1,\ i=1,...,m$, получаем систему, состоящую из $\sum_{i=1}^{m}n_i-m$ уравнений. Вычисляя в этой системе интегралы с помощью квадратурных формул, получаем, так же, как в случае одного ГСИУ, систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную системе (12). Пользуясь оценками (6), легко доказать, что при $n=\min\left\{n_1,n_2,...,n_m\right\}>3$ имеет место неравенство

$$\left\|(\bar{A}+\bar{a}\bar{\Gamma}_{\bar{n}}+\bar{b}\bar{B}_{\bar{n}}+\bar{K}_{\bar{n}})\vec{u}_{\bar{n}}-(\bar{A}+\bar{a}\bar{\Gamma}+\bar{b}\bar{B}+\bar{K})\vec{u}_{\bar{n}}\right\|_{\bar{L}^{II}} \le \frac{M}{n}\left\|\vec{u}_{\bar{n}}\right\|_{\bar{L}^{I}}, \qquad (13)$$

где M – константа, не зависящая от n.

Здесь $\bar{L}^I$ и $\bar{L}^{II}$ – гильбертовы пространства вектор-функций со скалярными произведениями

$$(\vec{u},\vec{v})^I=\sum_{i=1}^{m}(u_i,v_i)^I \quad \text{и} \quad (\vec{u},\vec{v})^{II}=\sum_{i=1}^{m}(u_i,v_i)^{II}, \text{ соответственно.}$$

Из неравенства (13) следует

Теорема 2. *При всех $\bar{n}$ таких, что $n \ge M\left\|(\bar{A}+\bar{a}\bar{\Gamma}+\bar{b}\bar{B}+\bar{K})^{-1}\right\|_{\bar{L}^{II}\to\bar{L}^{I}}$, система (12) имеет единственное решение. Кроме того, имеет место оценка скорости сходимости приближенного решения к точному*:

$$\left\|\vec{u}_{\bar{n}}-\vec{u}\right\|_{\bar{L}^{I}}=\underline{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Перспективы дальнейших исследований. Пользуясь приведенными результатами, можно рассмотреть численное решение методом дискретных особенностей гиперсингулярных интегральных уравнений, содержащих произведения одномерных гиперсингулярных интегральных операторов как рассмотренного вида, так и операторов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{f(\varphi)d\varphi}{2\sin^2\frac{\varphi-\varphi_0}{2}},$$

действующих в пространстве тригонометрических полиномов.

Выводы. Подробно рассмотрено численное решение методом дискретных особенностей гиперсингулярного интегрального уравнения на интервале $(-1,1)$ и на системе интервалов. Построены системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующие эти уравнения. Доказано,что, при некоторых предположениях гладкости ядер регулярных частей и правых частей этих гиперсингулярных интегральных уравнений, каждая из построенныех систем линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Кроме того, даны оценки скорости сходимости приближённых решений к точным в среднем.

Список литературы

1. *Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С.* Математические вопросы метода дискретних токов. Учеб. пособие. Ч.II. – Харьков, 1992. – 145 с.
2. *Гандель Ю. В.* Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. 1. – Харьков – Херсон, 2001. – 92 с.
3. *Гандель Ю. В., Кононенко А. С.* Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42. – № 9. – С. 1256 – 1262.
4. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань : Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231 с.
5. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М. – Л. : ГТТИ, 1949. – 688 с.

References (transliterated)

1. Gandel' Y. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskie voprosy мetoda diskretnykh tokov. Ucheb. posobie. Ch. II* [Mathematical problems in the method of discrete currents. Proc. allowance. Part II]. Kharkov, 1992. 145 p.
2. Gandel' Y. V. *Lektsii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy. Ucheb. posobie. Ch. I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Proc. allowance. Part 1]. Kharkov – Kherson, 2001. 92 p.
3. Gandtl' Y. V., Kononenko A. S. Obosnovanie chislennogo resheniya odnogo gipersingulyarnogo integral'nogo uravneniya [Justification of the numerical solution of a single hypersingular integral equation]. *Differenzial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1256 – 1262.
4. Gabdulkhaev B. G. *Optimal'nye approksimatsii resheniy lineynykh zadach* [Optimal approximation of solutions to linear problems]. Kazan, Izd. Kazansk. un-ta Publ., 1980. 231 p.
5. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow – Leningrad, GTTI Publ., 1949. 688 p.

Поступила (received) 17.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянська Тетяна Семенівна (Полянская Татьяна Семеновна, Polyanskaya Tatyana Semenowna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tpolyanskaya1@gmail.com.