

8. Haralick R. M., Sternberg S. R., Zhuang X. Image analysis using mathematical morphology // IEEE Trans. PAMI. – 1987. – vol. 9. – №. 4. – P. 532 – 550.
9. Heijmans H. J. A. M. Morphological image operators. Advances in electronics and electron physics, supplement. – Boston : Academic Press, MA, 1994. – 520 p.

## References (transliterated)

1. Mandelbrot B. B. *Les Objets Fractals*. Flammarion, 4 edition. 1995. 220 p. ISBN: 2-08-081301-3.
2. Mandelbrot B. B. *Fractal Geometry of Nature*. San-Francisco, W. H. Freeman and Co. 1982. 460 p.
3. Chen S. S., Keller J. M., Crownover R. M. On the calculation of fractal features from images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1993, vol. 15, no. 10, pp. 1087–1090.
4. Sarkar N., Chaudhur B. B. An Efficient Differential Box-counting Approach to Compute Fractal Dimension of Image. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*. 1994, vol. 24, no. 1, pp. 115–120.
5. Traina C. J., Traina A., Wu L., Faloutsos C. Fast feature selection using fractal dimension. in *Proc. 15th Braz. Symp. Databases*. 2000, pp. 158–171.
6. Omar S. Al-Kadi, Watson D. Texture analysis of aggressive and nonaggressive lung tumor CE CT images. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2008, vol. 55, no. 7, pp. 1822–1830.
7. Matheron G. *Random sets and integral geometry*. New York, John Wiley & Sons Publ., 1975. 261 p.
8. Haralick R. M., Sternberg S. R., Zhuang X. Image analysis using mathematical morphology. *IEEE Trans. PAMI*. 1987, vol. 9, no. 4, pp. 532–550.
9. Heijmans H. J. A. M. *Morphological image operators. Advances in electronics and electron physics, supplement*. Boston, Academic Press, MA Publ., 1994. 520 p.

Надійшла (received) 29.03.2019

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Рудницький Олександр Геннадійович (Рудницкий Александр Геннадиевич, Rudnitskii Alexandr Gennadiievich)** – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, доцент, Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (093) 375-06-50; e-mail: a.rudnitskii@gmail.com.

**Рудницька Марія Олександрівна (Рудницкая Мария Александровна, Rudnytska Maria Alexandrovna)** – провідний інженер, Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (093) 375-06-53; e-mail: misteria\_z@bigmir.net.

**Ткаченко Людмила Володимирівна (Ткаченко Людмила Владимировна, Tkachenko Ludmila Vlalimirovna)** – кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (066) 450-79-11; e-mail: lusia.tkch@gmail.com.

УДК 628.337:66.087.5

**А. П. САФОНИК, О. В. ПРИСЯЖНЮК, В. А. ПАСІЧНИК****МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИЩЕННЯ СТИЧНИХ ВОД МЕТОДОМ ЕЛЕКТРОКОАГУЛЯЦІЇ В НЕІЗОТЕРМІЧНИХ УМОВАХ**

Проаналізовано проблеми моделювання процесу очищення води в електрокоагуляційній камері в неізотермічних умовах. Визначено основні параметри для розрахунку тепло- та масопереносу в електрокоагуляторі. Побудовано математичну модель, що описує закономірності протікання процесів в електрокоагуляційній установці із уточненням оптимальних параметрів. Знайдено розв'язки відповідної модельної задачі з використанням асимптотичного наближення розв'язку відповідної крайової задачі та наведені результати комп'ютерного експерименту.

**Ключові слова:** математичне моделювання, електрокоагуляція, електрофлотация, температурний режим.

**А. П. САФОНИК, Е. В. ПРИСЯЖНЮК, А. В. ПАСЕЧНИК****МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОКОАГУЛЯЦИИ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ**

Проанализированы проблемы моделирования процесса очистки воды в электрокоагуляционной камере в неизоотермических условиях. Определены основные параметры для расчета тепло- и массопереноса в электрокоагуляторе. Построена математическая модель, описывающая закономерности протекания процессов в электрокоагуляционной установке с уточнением оптимальных параметров. Найдено решение соответствующей модельной задачи с использованием асимптотического приближения решения соответствующей краевой задачи и приведены результаты компьютерного эксперимента.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, электрокоагуляция, электрофлотация, температурный режим.

**А. Р. САФОНЬК, О. В. ПРЬСЯЖНЬУК, В. А. ПАСИЧНЬУК****MODELING OF PROCESS OF WASTEWATER TREATMENT BY ELECTROCOAGULATION IN NON-ISOTHERMAL CONDITIONS**

The problems of modeling the process of water treatment in an electrocoagulation chamber in nonisothermal conditions are analyzed. The basic parameters for calculating the mass and heat transfer in the electrocoagulator are determined. The mathematical model describing the patterns of process flow in the electrocoagulation installation with the specification of the optimal parameters of the process is constructed. The solutions of the corresponding model problem are found using the asymptotic approximation of the solution of the corresponding boundary value problem and the results of the computer experiment are given. In this case study, the effect of current strength on the concentration of the target component at the exit from the

© А. П. Сафоник, О. В. Присяжнюк, В. А. Пасічник, 2019

reactor is determined using the developed mathematical model. The influence of the electrode heat emission rate on the efficiency of purification process is tested.

**Key words:** mathematical modeling, electrocoagulation, electroflotation, temperature regime.

**Вступ.** Збереження водних ресурсів є одним з найбільших викликів 21-го століття. Серед найбільших загроз: швидка урбанізація, індустріалізація та глобальна зміна клімату у бік потепління. В даний час доступ до безпечної питної води обмежений, забруднення води може серйозно вплинути на водні екосистеми та доступність прісної води. Таким чином, існує потреба у розробці ефективних технологій та підходів для очищення та управління стічними водами, для підтримки якості та поліпшення кількості у великих масштабах, забезпечуючи при цьому охорону навколишнього середовища та сталий розвиток, наприклад, міські, промислові та сільськогосподарські відходи. Електрохімічні процеси (електроліз та електрокоагуляція) успішно використовуються для видалення забруднюючих речовин у різних промислових стічних водах [1]. Механізми видалення, що відбуваються в процесі електролізу, зазвичай включають окислення, відновлення, розкладання, тоді як механізми в процесі електрокоагуляції включають коагуляцію, адсорбцію, осадження і флоатацію [1 – 3].

На сьогодні велика кількість наукових досліджень присвячена моделюванню електрокоагуляційної очистки стічних вод [1 – 3, 9 – 13]. Проте запропоновані математичні моделі переважно не описують кінетику процесу всередині електрокоагулятора, або не враховують ряд технологічних параметрів, наприклад температуру води, силу струму тощо. Крім того, врахування співвідношення між величинами параметрів, які характеризують певні складові процесу, зокрема домінування конвективних та масообмінних складових над дифузійними, приводить до ускладнення математичної моделі процесу сингулярностями, породженими малими параметрами.

**Аналіз останніх досліджень.** Електрокоагуляція є дешевим процесом і ефективним методом очищення води і стічних вод. Він був успішно випробуваний для очищення питної води [1], текстильних стічних вод [2, 6, 7, 9], промислових стічних вод [4]. Він також використовувався для видалення фенолу і поверхнево-активних речовин з промислових стічних вод. В [1, 2] здійснено огляд підходів до моделювання електрохімічних установок з акцентом на такі питання, як теоретичне розуміння механізмів електрокоагуляції, моделювання на основі обчислювальної гідродинаміки та техніко-економічна оптимізація процесу. В роботах [9 – 12] досліджували процес електрофлоатації в електрокоагуляторі з використанням математичного моделювання на основі обчислювальної гідродинаміки. Авторами також було досліджено вплив різних параметрів, зокрема матеріалу електродів, геометричних характеристик електрокоагулятора, щільності струму тощо на ефективність процесу електрокоагуляції. В [13] адаптована феноменологічна математична модель процесу електрокоагуляції для дослідження впливу сили струму на якість очищення стічних вод та запропоновані засоби імітаційного моделювання для оцінки динамічних характеристик процесів, що відбуваються в електрокоагуляторі. Актуальним завданням залишається адаптація математичної моделі електрокоагуляційної обробки, яка враховує процес утворення шламу заліза із розчину електроліту, вплив технічних характеристик на кінетику процесу в електрокоагуляторі, а також дослідження впливу параметрів на ефективність утворення шламу.

**Постановка задачі.** Розчин електроліту надходить в камеру електрокоагулятора, проходячи через міжелектродний простір, вода насичується бульбашками газу і відбувається спливання бульбашок з частинками коагулянту. Розрахунок установки зводиться до визначення загального обсягу електродного відділення, а також необхідних конструктивних і електричних параметрів.

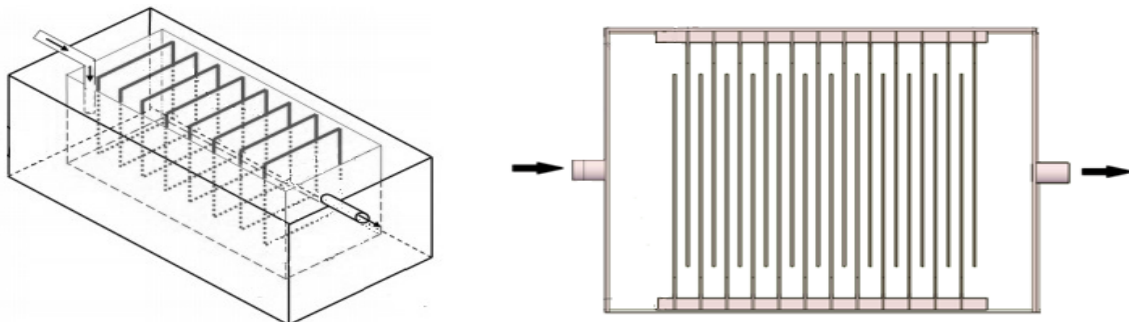


Рис. 1 – Схематичне представлення камери електрокоагулятора.

Камера електрокоагулятора складається з дванадцяти пар залізних пластин розміром  $75 \times 83.5$  см і товщиною 0.3 см. Відстань між електродами між кожними двома пластинами становить 2.3 см. Відстань від стінки камери до першого та останнього електрода становить 25 см, відстань між бічною стінкою і електродами, а також від нижнього краю електродних пластин до дна та від верхнього краю до верху камери – по 10 см, відповідно геометричні розміри електрокоагуляційної камери: довжина – 1.1 м, ширина – 0.95 м, висота – 1.035 м, об'єм камери –  $1.08 \text{ м}^3$ . Об'ємна витрата становить  $6 \text{ м}^3/\text{год}$ .

Питома витрата електроенергії в камері розраховується за формулою:

$$E_n = \frac{W}{Q},$$

де  $W = I \cdot U \cdot N \cdot n_k$  – потужність (кВт);  $I = i \cdot S_e$  – сила струму в установці (А);  $U$  – напруга (В);  $N$  – кількість секцій в установці;  $n_k$  – кількість пластин;  $S_e$  – активна поверхня електродів ( $\text{м}^2$ );  $i$  – густина струму ( $\text{А}/\text{м}^2$ ).

Активна поверхня знаходиться за формулою:

$$S = S_e \cdot n,$$

де  $S_e$  – площа однієї пластини;  $n$  – кількість пластин.

У загальному випадку критерій оптимізації має вигляд:

$$Z = \max(P \cdot \bar{C} - K - P_e \cdot E). \quad (1)$$

Тут  $P$  – вартість сировини,  $\bar{C}$  – кількість коагулянту, вилученого на виході з установки,  $K$  – річні капітальні та інші, пов'язані з ними витрати,  $E$  – щорічне споживання енергії установкою для отримання коагулянту, розраховується як добуток питомої витрати електроенергії на кількість відпрацьованих годин,  $P_e$  – вартість одиниці енергії. Очевидно, більш наочно з економічної точки зору використовувати річне споживання електроенергії і вартість продукції в критерії (1). Для розрахунку максимального значення цільової функції необхідно розрахувати концентрацію утвореного коагулянту.

**Математична модель.** Моделювання процесів виконано на основі рівнянь, що описують рух нестисливої рідини між електродами. Зміну концентрації  $C$  двовалентного заліза опишемо за допомогою рівняння перенесення [4]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(u_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y C)}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + S(C), \quad (2)$$

де  $D = \bar{D} + D_{turb}$  – сумарний коефіцієнт дифузії;  $\bar{D}$  – коефіцієнт молекулярної дифузії;  $D_{turb}$  – коефіцієнт турбулентної дифузії, що залежить від турбулентного числа Шмідта  $Sc_T$  (згідно моделі Кейса – Кроуфорда [5]).

Ефективність утворення флоків (коагулянту) значною мірою залежить від розміру утворених бульбашок [10]. Електрофлотация виробляє велику кількість тонкодисперсних газових бульбашок, розмір яких коливається від 5 до 90 мкм залежно від стану електролізу. Швидкість флотаційної складової процесу кількісно описується наступним чином [12]:

$$S(C) = \left( \eta \frac{3R_g T I}{8F d_b A_s P} \right) C, \quad (3)$$

де  $R_g$  – газова константа;  $P$  – це атмосферний тиск;  $A_s$  – площа поперечного перерізу камери та  $\eta$  – ефективність накопичення однією бульбашкою – визначається як частка забруднюючої речовини на шляху бульбашки, які фактично налипають на бульбашку. В [12] також запропоновано числові вирази для розрахунку  $\eta$ .

Для ізотермічної течії нестисливої рідини [8]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_x T)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y T)}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q_V}{c\rho}, \quad (4)$$

де  $a$  – коефіцієнт температуропровідності ( $\text{м}^2/\text{с}$ );  $\lambda$  – теплопровідність електроліту ( $\text{Вт}/\text{м} \cdot \text{с}$ );  $q_V$  – інтенсивність внутрішніх джерел теплоти ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ );  $c$  – теплоємність ( $\text{Дж}/\text{кг}$ );  $\rho$  – густина ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ). Кількість теплоти, що виділяється під час електродного нагрівання рідини в електроліті, пропорційна силі струму, часові його проходження і падінню напруги  $q_V = I \cdot U \cdot t$ , де  $U$  – прикладена напруга (В);  $I$  – сила струму (А).

Таким чином, для знаходження розподілів концентрації коагулянту  $C$  та температури  $T$  в електрокоагуляторі отримано систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(u_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y C)}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \left( \eta \frac{3R_g T I}{8F d_b A_s P} \right) C; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_x T)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y T)}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{I U t}{c\rho}; \end{cases} \quad (5)$$

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y), \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y);$$

$$C(0, y, t) = C_*(y, t), \quad T(0, y, t) = T_*(y, t), \quad C(L, y, t) = C^*(y, t), \quad T(L, y, t) = T^*(y, t);$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=y^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\alpha(T(x, 0, t) - T_*^*), \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=y^*} = -\alpha(T(x, y^*, t) - T_*^*). \quad (6)$$

У рівняннях системи (5) невідомою величиною є швидкість руху рідини. Тому для визначення розподілу температури та концентрації коагулянту в потоці рідини необхідно попередньо розв'язати гідродинамічну задачу, тобто визначити розподіл швидкостей у потоці рідини [5, 6]. Одним із ефективних шляхів розв'язання відповідних задач у випадку переважання конвективних складових процесу над дифузійними при фільтрації водних розчинів в модельних областях, обмежених еквіпотенціальними або квазіеквіпотенціальними лініями та лініями

течії, є: поетапна фіксація характеристик і складових процесу та середовища; розв'язання задач фільтрації з використанням конформних або квазіконформних відображень області комплексного потенціалу або квазіпотенціалу на фізичну область; перехід у рівняннях конвективної дифузії і граничних та початкових умовах від фізичних змінних до координат області комплексного потенціалу або квазіпотенціалу, що значно спрощує їх запис і забезпечує можливість проведення автономних досліджень, розпаралелювання обчислень. Врахувавши, що задача на знаходження поля швидкостей є розв'язаною [14], зокрема, обчислено поле швидкостей  $u$  і ряд інших величин, наприклад фільтраційну витрату, та, здійснивши заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi)$ ,  $y = y(\varphi, \psi)$  у системі (5) та умовах (6), отримано відповідну дифузійну задачу [14, 15], розв'язок якої з точністю  $O(\varepsilon^{n+1})$ , де  $\varepsilon$  – малий параметр, що характеризує переважання конвективної та масообмінної складової процесу масоперенесення ( $D = \varepsilon d$ ,  $|v| > v_* \gg \delta$ ), шукатимемо у вигляді асимптотичних рядів [14]:

$$C(\varphi, \psi, t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i C_i(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \bar{C}_i(\xi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} C_i(\varphi, \zeta, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \bar{C}_i(\varphi, \phi, t) + R_C(\varphi, \psi, t, \varepsilon); \quad (7)$$

$$T(\varphi, \psi, t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i T_i(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \bar{T}_i(\xi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} T_i(\varphi, \zeta, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \bar{T}_i(\varphi, \phi, t) + R_T(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (8)$$

де  $R_C, R_T$  – залишкові члени розкладів;  $C_i(\varphi, \psi, t)$ ,  $T_i(\varphi, \psi, t)$  – регулярні частини асимптотики;  $\bar{C}_i(\xi, \psi, t)$ ,  $\bar{T}_i(\xi, \psi, t)$  – функції типу примежового шару на виході фільтраційного потоку із області;  $C_i(\varphi, \zeta, t)$ ,  $T_i(\varphi, \zeta, t)$ ,  $\bar{C}_i(\varphi, \phi, t)$ ,  $\bar{T}_i(\varphi, \phi, t)$  – функції типу примежового шару в околах бокових стінок електрокоагулятора;  $\xi = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$ ,  $\zeta = y \cdot \varepsilon^{-1/2}$ ,  $\phi = (y^* - y) \cdot \varepsilon^{-1/2}$  – відповідні регуляризуючі перетворення.

Вирази для регулярних частин асимптотики знайдені в результаті застосування процедури підстановки рядів (7) – (8), привірення коефіцієнтів при однакових степенях малого параметра і розв'язання відповідних задач:

$$C_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} e^{\varphi_*} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_i(\varphi, \psi, f(\bar{\varphi}, \psi) - f(\varphi, \psi) + t) d\bar{x}}{v(\bar{\varphi}, \psi)} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{h_i(\varphi, \psi, f(\bar{\varphi}, \psi) - f(\varphi, \psi) + t)}{v(\bar{\varphi}, \psi)} e^{-\int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_i(\bar{\varphi}, \psi, f(\bar{\varphi}, \psi) - f(\bar{\varphi}, \psi) + t) d\bar{\varphi}}{v(\bar{\varphi}, \psi)}} d\bar{\varphi}, & t > f(\varphi, \psi); \\ e^0 \int_0^t \frac{g_i(f^{-1}(\bar{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \bar{t}) d\bar{t}}{\int_0^{\bar{t}} h_i(f^{-1}(\bar{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \bar{t}) e^{-\int_0^{\bar{t}} g_i(f^{-1}(\bar{t} + f(x) - t, \psi), \bar{t}) d\bar{t}}} d\bar{t}, & t \leq f(\varphi, \psi), i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

$$T_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_0^t \bar{T}_i(f^{-1}(\bar{t} - t + f(\varphi, \psi), \psi), \bar{t}) d\bar{t} + \tau_{*i}^*(\varphi, \psi), & t \leq f(\varphi, \psi); \\ \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\bar{T}_i(\bar{\varphi}, f(\bar{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi))}{v(\bar{\varphi}, \psi)} d\bar{\varphi} + \tau_i^*(\varphi, \psi), & t > f(\varphi, \psi), i = \overline{0, n}, \end{cases}$$

$$f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\bar{\varphi}}{v(\bar{\varphi}, \psi)}; \quad \bar{T}_0(\varphi, \psi, t) = \frac{I \cdot U \cdot t}{c \rho}; \quad \tau_0^*(\varphi, \psi) = T^*(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi)); \quad \tau_{*0}^*(\varphi, \psi) = T_0(t - f(\varphi, \psi), \psi);$$

$$\bar{T}_i(\varphi, \psi, t) = \bar{d}_T \left( \frac{\partial^2 T_{i-1}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_{i-1}}{\partial \psi^2} \right); \quad \bar{d}_T = \frac{a \lambda_m}{\delta \lambda}; \quad \tau_i^*(\varphi, \psi) = \tau_{*i}^*(\varphi, \psi) = 0 \quad (i = \overline{1, n}); \quad g_i(\varphi, \psi, t) = \eta \frac{3R_g I T_i(\varphi, \psi, t)}{8F d_b A_s P};$$

$$h_i(\varphi, \psi, t) = \bar{d}_{iC} \left( \frac{\partial^2 C_{i-1}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C_{i-1}}{\partial \psi^2} \right); \quad \bar{d}_{iC} - \text{відомі функції, які є сумою добутків членів ряду (7) – (8), їх частинних}$$

похідних, а також коефіцієнти при  $i$ -тих степенях малого параметра у розкладі відповідних функцій  $d(L - \xi \delta, \psi, t)$  у ряд Тейлора в околі  $\varphi = L$ . Функції типу примежового шару знаходимо аналогічно до [14, 15].

**Результати комп'ютерного моделювання.** Комп'ютерне моделювання проводилось при таких значеннях вхідних даних:  $U = 24$  В,  $T_*^* = 294$  К,  $\eta = 0.8$ ,  $c = 3.31 \cdot 10^3$  Дж/кг,  $\rho = 1060$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 0,2$  Вт/м·с,  $\lambda_m = 0.39$  Вт/м·с,  $a = 1.39 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с,  $R_g = 8.31$  Дж/(моль·К),  $F = 9.65 \cdot 10^4$  Кл/моль,  $I = 70$  А,  $A_s = 15$  м<sup>2</sup>,  $d_b = 1.5 \cdot 10^{-6}$  м,  $D = 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с.

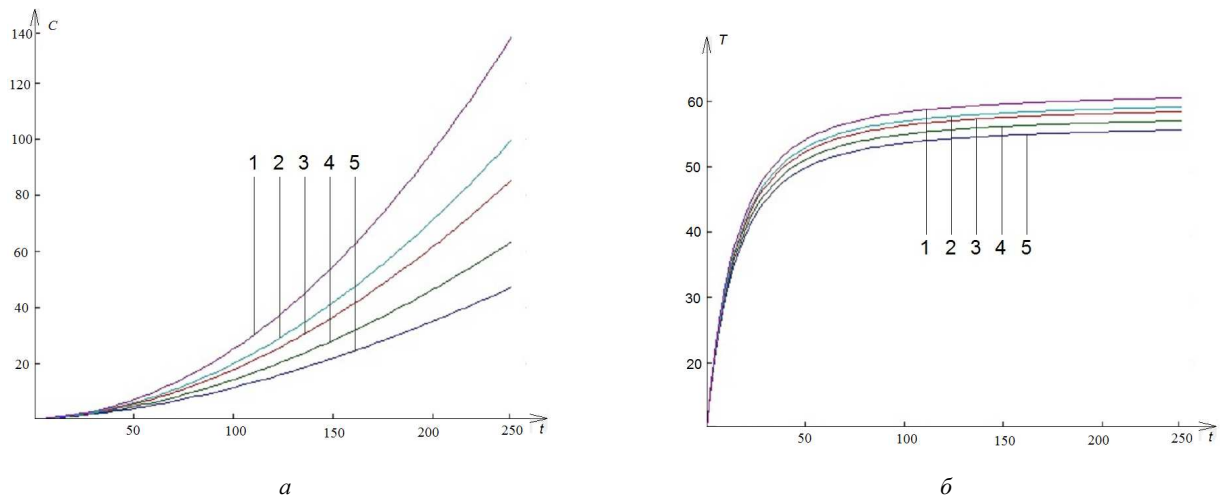


Рис. 2 – Зміна розрахункових величин при силі струму (1 – 72 А; 2 – 70 А; 3 – 69 А; 4 – 67 А; 5 – 65 А) з часом на виході з електрокоагулятора: а – концентрація заліза; б – температура.

За розробленою методикою було розраховано зміну концентрації заліза при силі струму 1 – 72 А; 2 – 70 А; 3 – 69 А; 4 – 67 А; 5 – 65 А (рис. 2) та зміну відповідної температури води з часом на виході з електрокоагулятора (рис. 2). Як видно із отриманих графіків, ефективність утворення коагулянту (заліза) значною мірою залежить від температури води, яка прогривається до оптимального значення близько 40 хв.

Розподіл концентрації в електрокоагуляторі в моменти часу  $t = 60$  хв,  $120$  хв,  $180$  хв та  $240$  хв наведено відповідно на рис. 3. Аналіз розподілу концентрації заліза всередині ректора дозволяє спрогнозувати різні гідродинамічні явища, такі як внутрішня рециркуляція і мертві зони, які впливають на формування коагулянту.

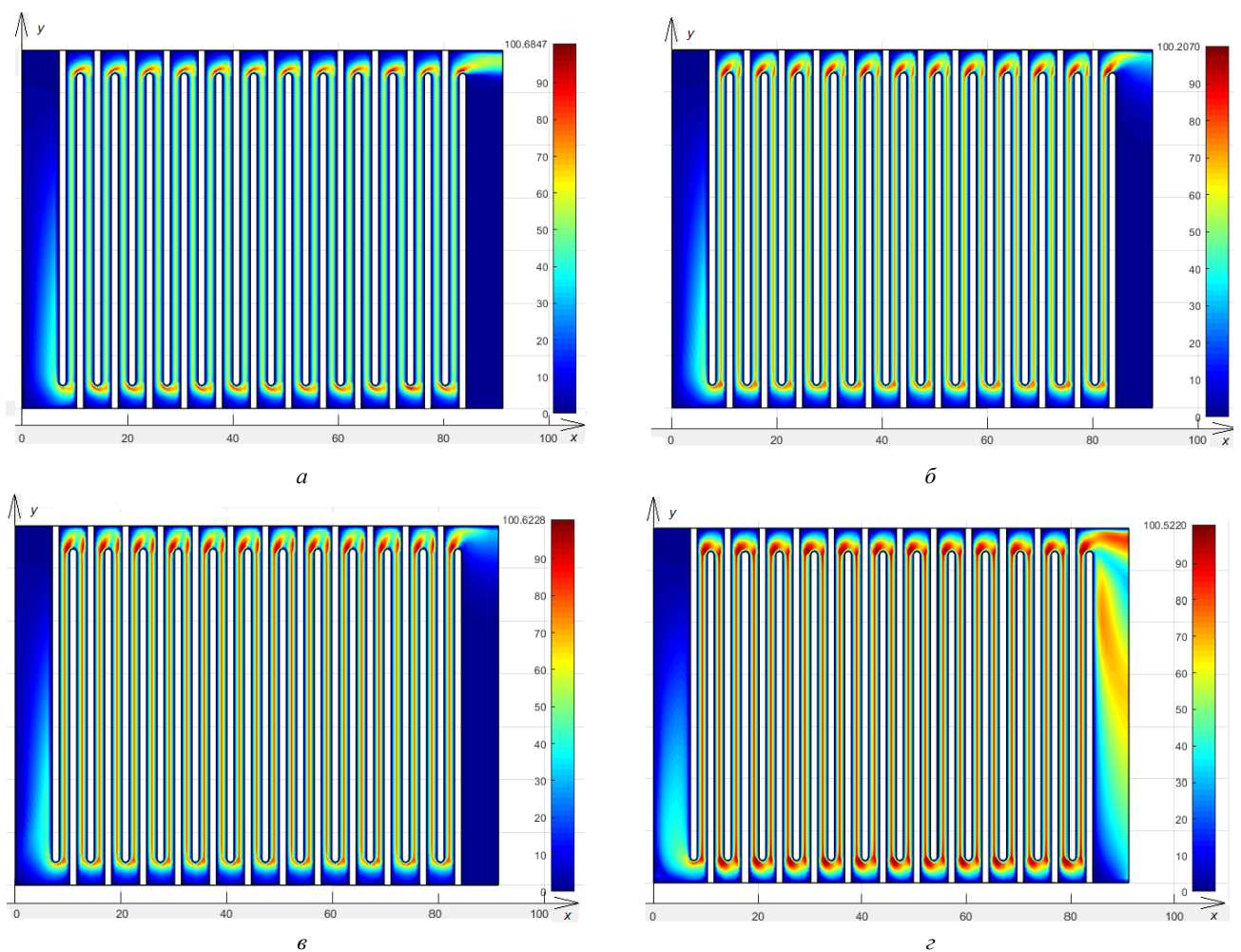


Рис. 3 – Розподіл концентрації коагулянту в електрокоагуляторі в моменти часу: а – 60 хв; б – 120 хв; в – 180 хв; з – 240 хв.

**Висновки.** Розроблені підходи до математичного моделювання та оптимізації дозволяють обрати доцільні конструктивні показники електрокоагуляційної установки, дослідити закономірності протікання процесів тепло- та масообміну. Знайдено розв'язок відповідної модельної задачі з використанням асимптотичного наближення розв'язку відповідної крайової задачі та наведені результати розрахунків розподілу концентрації заліза та температури води в електрокоагуляторі. Запропонована методологія розрахунку розподілу концентрації може бути використана як основа для експериментально-теоретичних досліджень автоматизації процесу утворення коагулянту методом електрокоагуляції.

#### Список літератури

1. Hakizimana J., Gourich B., Chafi M., Stiriba Y., Vial C., Drogui P., Naja J. Electrocoagulation process in water treatment : A review of electrocoagulation modeling approaches // *Desalination*. – 2017. – vol. 404. – P. 1 – 21.
2. Khandegar V., Saroha A. K. Electrocoagulation for the treatment of textile industry effluent-A Review // *J. Environ. Manag.* – 2013. – 128, 949.
3. Versteeg H. K., Malalasekera W. *An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*. – New York, USA : Pearson Education, 2007. – 503 p.
4. Sandoval M., Rosalba F., Walsh F. C., Nava J. L., Ponce de León C. Computational fluid dynamics simulations of single-phase flow in a filter-press flow reactor having a stack of three cells // *Electrochim. Acta*. – 2016. – vol. 216. – pp. 490 – 498.
5. Enciso R., Padilla L., Ojeda C., Delgadillo J., Rodriguez I. Computational fluid dynamics characterization of a rotating cylinder electrochemical reactor using an RANS-RNG turbulence model // *Int. J. Electrochem. Sci.* – 2012. – vol. 7. – P. 12181 – 12192.
6. Mehmet K., Orhan T. C., Mahmut B. Treatment of textile wastewaters by electrocoagulation using iron and aluminum electrodes // *Journal of Hazardous Materials B*. – 2003. – vol. 100. – pp. 163 – 178.
7. Dalvand Arash. Dye removal, energy consumption and operating cost of electrocoagulation of textile wastewater as a clean process // *CLEAN–Soil, Air, Water*. – 2011. – vol. 39. – pp. 665 – 672.
8. Кулінченко В. Р., Ткаченко С. Й. Теплопередача з елементами масообміну (теорія і практика процесу). – Київ : Фенікс, 2014. – 917 с.
9. Naje A. S., Chelliapan S., Zakaria Z., Ajeel M. A., Alaba P. A. A review of electrocoagulation technology for the treatment of textile wastewater // *Rev. Chem. Eng.* – 2017. – № 33. – P. 263 – 292.
10. Alam R., Shang J. Electrochemical model of electro-flotation // *Journal of Water Process Engineering*. – 2016. –vol. 12. – pp. 78 – 88.
11. Chen X., Chen G. “Electroflotation”, in Comninellis C., Chen G. (ed.) *Electrochemistry for the Environment*. – Springer Science+Business Media, LLC, 2010. – pp. 263 – 279.
12. Fukui Y., Yuu S. Collection of submicron particles in electro-flotation // *Chemical Engineering Science*. – 1980. –35 (5). – pp. 1097 – 1105.
13. Safonyk A., Bomba A., Tarhoni I. Modeling and automation of the electrocoagulation process in water treatment // *Advances in Intelligent Systems and Computing III*. – 2019. – pp. 451 – 463.
14. Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах. – Рівне : О. Зень, 2017. – 291 с.
15. Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient // *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2015. – Vol. 9. – P. 189 – 192.

#### References (transliterated)

1. Hakizimana J., Gourich B., Chafi M., Stiriba Y., Vial C., Drogui P., Naja J. Electrocoagulation process in water treatment : A review of electrocoagulation modeling approaches. *Desalination*. 2017, vol. 404, pp. 1–21.
2. Khandegar V., Saroha A. K. Electrocoagulation for the treatment of textile industry effluent. *J. Environ. Manag.* 2013, no. 128, 949 p.
3. Versteeg H. K., Malalasekera W. *An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*. New York, USA, Pearson Education, 2007. 503 p.
4. Sandoval M., Rosalba F., Walsh F. C., Nava J. L., Ponce de León C. Computational fluid dynamics simulations of single-phase flow in a filter-press flow reactor having a stack of three cells. *Electrochim. Acta*. 2016, no. 216, pp. 490–498.
5. Enciso R., Padilla L., Ojeda C., Delgadillo J., Rodriguez I. Computational fluid dynamics characterization of a rotating cylinder electrochemical reactor using an RANS-RNG turbulence model. *Int. J. Electrochem. Sci.* 2012, no. 7, pp. 12181–12192.
6. Mehmet K., Orhan T. C., Mahmut B. Treatment of textile wastewaters by electrocoagulation using iron and aluminum electrodes. *Journal of Hazardous Materials*. 2003, vol. 100, pp. 163–178.
7. Dalvand Arash. Dye removal, energy consumption and operating cost of electrocoagulation of textile wastewater as a clean process. *CLEAN–Soil, Air, Water*. 2011, vol. 39, pp. 665–672.
8. Kulichenko V. R., Tkachenko S. I. *Teplotperedacha z elementamy masoobminu (teoriya i praktyka protsesu)* [Heat transfer with elements of mass transfer (theory and practice of the process)]. Kyiv, Feniks Publ., 2014. 917 p.
9. Naje A. S., Chelliapan S., Zakaria Z., Ajeel M. A., Alaba P. A. A review of electrocoagulation technology for the treatment of textile wastewater. *Rev. Chem. Eng.* 2017, vol. 33, pp. 263–292.
10. Alam R., Shang J. Electrochemical model of electro-flotation. *Journal of Water Process Engineering*. 2016, vol. 12, pp. 78–88.
11. Chen X., Chen G. “Electroflotation”, in Comninellis C., Chen G. (ed.) *Electrochemistry for the Environment*. Springer Science+Business Media, LLC. 2010. pp. 263–279. (глава в книге)
12. Fukui Y., Yuu S. Collection of submicron particles in electro-flotation. *Chemical Engineering Science*. 1980, vol. 35(5), pp. 1097–1105.
13. Safonyk A., Bomba A., Tarhoni I. Modeling and automation of the electrocoagulation process in water treatment. *Advances in Intelligent Systems and Computing III*. 2019, pp. 451–463.
14. Bomba A. Ya., Prisyazhnyuk I. M., Prisyazhnyuk O. V. *Metody teorii yzuren' prognovannya protsesiv teplomasoperenesennya v porystykh ta mikroporystykh seredovyshhakh* [Methods of perturbation theory for predicting heat and mass transfer processes in porous and microporous media]. Rivne, O. Zen' Publ., 2017. 291 p.
15. Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2015, vol. 9, pp. 189–192.

Надійшла (received) 19.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Сафоник Андрій Петрович (Сафоник Андрей Петрович, Safonyk Andrii Petrovych)** – доктор технічних наук, професор, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (096) 799-99-13; e-mail: safonik@ukr.net.

**Присяжнюк Олена Вікторівна (Присяжнюк Елена Викторовна, Prysiazhniuk Olena Victorivna)** – кандидат технічних наук, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (067) 125-93-04; e-mail: lenapris@ukr.net.

**Пасічник Василь Андрійович (Пасечник Василий Андреевич, Pasichnyk Vasyl Andreevych)** – аспірант, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (099) 161-33-96; e-mail: xend777@gmail.com.

УДК 519.6

**А. В. СОХАЦЬКИЙ**

## МОДЕЛЮВАННЯ АЕРОДИНАМІКИ НЕСУЧИХ СИСТЕМ ПОБЛИЗУ ЗЕМЛІ

Розглядається задача математичного моделювання аеродинаміки транспортних апаратів поблизу землі. Моделювання аеродинаміки несучих систем є надзвичайно актуальною проблемою при проектуванні транспортних апаратів. Це обумовлено складністю опису фізичних процесів реальних турбулентних течій з однієї сторони та необхідністю забезпечення відповідних критеріїв стійкості та керованості транспортним апаратам з іншої. В зв'язку з цим розробка математичних моделей для прогнозування динаміки турбулентних течій навколо транспортних апаратів є невідкладною необхідністю. В роботі розглядаються підходи до моделювання аеродинаміки несучих систем на основі в'язкої та ідеальної рідини. Розроблено комплекс програмного забезпечення для моделювання аеродинаміки транспортних апаратів з використанням осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є – Стокса та методів дискретних особливостей. Приводяться результати розрахунків та перспективи подальших досліджень.

**Ключові слова:** аеродинаміка транспортних апаратів, числове моделювання, метод дискретних вихорів, рівняння Нав'є – Стокса, моделі турбулентності.

**А. В. СОХАЦЬКИЙ**

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ НЕСУЩИХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ ЗЕМЛИ

Рассматривается задача математического моделирования аэродинамики транспортных аппаратов вблизи земли. Моделирование аэродинамики несущих систем является чрезвычайно актуальной проблемой при проектировании транспортных аппаратов. Это обусловлено сложностью описания физических процессов реальных турбулентных течений с одной стороны и необходимостью обеспечения соответствующих критериев стойкости и управляемости транспортным аппаратам с другой. В этой связи разработка математических моделей для прогнозирования динамики турбулентных течений вокруг транспортных аппаратов является неотложной необходимостью. В работе рассматриваются подходы к моделированию аэродинамики несущих систем на основе вязкой и идеальной жидкости. Разработан комплекс программного обеспечения для моделирования аэродинамики транспортных аппаратов с использованием осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса и методов дискретных особенностей. Приводятся результаты расчетов и перспективы дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** аэродинамика транспортных аппаратов, численное моделирование, метод дискретных вихрей, уравнения Навье – Стокса, модели турбулентности.

**A. V. SOKHATSKY**

## MODELING AERODYNAMICS OF BEARING SYSTEMS IN THE NEAR-GROUND REGION

In the paper mathematical modeling of aerodynamics of transport vehicle in the near-ground region is considered. Modeling aerodynamics of bearing systems is an extremely relevant issue when planning a transport vehicle. It is caused by complication of description of physical processes of real turbulent flows on the one hand and necessity of providing corresponding criteria of stability and controllability of transport vehicles from the other. In this connection the development of mathematical models for predicting dynamics of turbulent flows round transport vehicles is an urgent necessity. In the paper the approaches to modeling bearing system aerodynamics based on viscous and ideal fluid are presented. The complex of software for modeling transport vehicle aerodynamics using Reynolds – averaged Navier – Stokes equation and method of discrete singularities is developed. The results of calculations and prospect of further research are discussed.

**Key words:** aerodynamics of transport vehicles, numerical simulation, method of discrete vortices, Navier – Stokes equations, model of turbulence.

**Вступ.** Визначення аеродинамічних характеристик несучих систем літальних апаратів і на сьогодні є надзвичайно актуальною проблемою. Це обумовлено складністю фізичних процесів, що протікають навколо поверхні літальних апаратів. Окрім цього, природа турбулентних течій, механізм її дії на літальні апарати вивчені не на достатньому рівні. На сьогодні відсутня загальна теорія опису цих фізичних процесів. Створення методів їх математичного моделювання є задачею майбутнього. Особливо важливим є розробка математичних моделей динаміки вихорових течій. [1 – 4].

**Аналіз останніх досліджень.** Механізм турбулентних течій є недостатньо вивченим, що вносить певні труднощі в розробку методів їх математичного моделювання. В зв'язку з цим фізичні дослідження та розробка математичних моделей для прогнозування динаміки турбулентних течій навколо літальних апаратів потребує інтенсивного розвитку. Для моделювання течій навколо літальних апаратів найбільш поширеними є підходи, основані на моделях ідеальної та в'язкої рідини. Застосування моделі ідеальної рідини в основному базується на використанні рівнянь Ейлера та методу дискретних особливостей в різноманітних концепціях. Класифікація сучасних підходів до математичного моделювання в'язких турбулентних течій представлена на рис. 1 [1]. Для моделювання турбулентних течій найбільш поширеними є наступні підходи [1 – 3]: