УДК 532.527+533.697.3

А. В. ШЕХОВЦОВ

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА, СКОРОСТИ И ЗАВИХРЕННОСТИ ВЯЗКОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ ОТ ВИХРЯ ВБЛИЗИ СТЕНКИ И В КАНАЛЕ

При помощи методов зеркального и конформного отображений, а также формализма комплексного потенциала аналогового дискретного вихря равной циркуляции, получены аналитические выражения для функции тока, скорости и завихренности вязкого нестационарного несжимаемого течения с проскальзыванием от вихря вблизи стенки и в канале. В качестве базового использовалось фундаментальное решение обобщенного уравнения Гельмгольца для дисперсии завихренности в вязкой несжимаемой среде – вихрь Лэмба – Озеена, скорость от которого удовлетворяет уравнению неразрывности. Полученные выражения могут быть использованы для численного моделирования описанных течений и визуализации их кинематических полей.

Ключевые слова: функция тока, скорость, завихренность, вязкое нестационарное несжимаемое течение, проскальзывание, вихрь Лэмба – Озеена, стенка, канал, фундаментальное решение обобщенного уравнения Гельмгольца, дисперсия.

О. В. ШЕХОВЦОВ

ВИРАЗИ ДЛЯ ФУНКЦІЇ СТРУМУ, ШВИДКОСТІ ТА ЗАВИХРЕНОСТІ В'ЯЗКОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕЧІЇ З ПРОКОВЗУВАННЯМ ВІД ВИХОРУ ПОБЛИЗУ СТІНКИ І В КАНАЛІ

За допомогою методів дзеркального і конформного відображень, а також формалізму комплексного потенціалу аналогового дискретного вихору однакової циркуляції, отримані аналітичні вирази для функції струму, швидкості та завихреності в'язкої нестаціонарної нестисливої течії з проковзуванням від вихору поблизу стінки і в каналі. В якості базового використовувався фундаментальний розв'язок узагальненого рівняння Гельмгольца для дисперсії завихреності у в'язкому нестисливому середовищі – вихор Лемба – Озеена, швидкість від якого задовольняє рівнянню нерозривності. Отримані вирази можуть бути використані для чисельного моделювання описаних течій і візуалізації їх кінематичних полів.

Ключові слова: функція струму, швидкість, завихреність, в'язка нестаціонарна нестислива течія, проковзування, вихор Лемба – Озеена, стінка, канал, фундаментальний розв'язок узагальненого рівняння Гельмгольца, дисперсія.

A. V. SHEKHOVTSOV

EXPRESSIONS FOR THE STREAM FUNCTION, VELOCITY AND VORTICITY OF THE VISCOUS UNSTEADY FLOW WITH SLIP INDUCED BY VORTEX NEAR THE WALL AND IN THE CHANNEL

Analytical expressions for the stream function, velocity and vorticity of the viscous unsteady incompressible flow with slip induced by the vortex near the wall and in the channel are obtained using the methods of mirror and conformal mappings as well as the formalism of the complex potential of an analog discrete vortex of equal circulation. The fundamental solution of the generalized Helmholtz equation for the dispersion of vorticity in a viscous incompressible medium – Lamb – Oseen vortex, speed from which satisfies the continuity equation is used as the basic one. The received expressions can be used for numerical simulation of the described flows and visualization of their kinematic fields.

Key words: stream function, velocity, vorticity, viscous unsteady incompressible flow, slip, Lamb – Oseen vortex, wall, channel, fundamental solution of the generalized Helmholtz equation, dispersion.

Общая постановка проблемы и цель работы. Обобщение *усовершенствованного метода дискретных вихрей* (УМДВ) для вязких вихревых сред [1, 2], при котором в качестве частного (базового) решения используется *вихрь Лэмба – Озеена* – фундаментальное решение *обобщенного уравнения Гельмгольца* (кинематической формы *уравнения Навье – Стокса*) [3], обеспечивает равномерную сходимость численного решения к аналитическому с увеличением числа дискретных вихрей в таких тестовых задачах, как диффузия вихревой окружности и диффузия вихревого круга [4] из-за аналитического моделирования диффузии завихренности, которая распространяется от каждого дискретного вихря, а также из-за быстрого уменьшения невязки как $\exp(-r^2)$ за пределами произвольных пар дискретных вихрей, так как она зависит от произведения касательной скорости на градиент завихренности [5]. При этом скорость от вихря Лимба – Озеена удовлетворяет уравнению неразрывности.

Обобщенный УМДВ также обеспечивает точное выполнение закона сохранения завихренности (закона сохранения момента импульса вихря) в пределах контуров, расширяющихся относительно вязкой среды со скоростью диффузии завихренности.

Из-за неочевидности последнего утверждения, рассмотрим его детальнее.

Первая теорема Гельмгольца говорит о том, что любые движения бесконечно малого объема среды можно представить в виде суммы перемещения и вращения, то есть, в виде квазитвердого движения, а также деформаций, которые, в свою очередь, можно представить в виде растяжений и сжатий трех перпендикулярных осей.

Таким образом, вихревое движение является квазитвердым движением среды (*ротор* – это антисимметричная часть тензора скоростей деформаций). В то же время, диссипация связана с работой сил вязкости при деформациях среды (*деформация* – это симметричная часть тензора скоростей деформаций), которые отсутствуют при квазитвердом движении. Поэтому вихревая компонента движения среды не диссипирует в вязкой среде в консервативном поле сил.

Физика здесь проста – при чисто вихревом движении объем среды движется как единое целое, без деформаций сдвига, растяжения и сжатия, и поэтому даже в вязкой среде в вихревой области слои жидкости не испытывают трения. Это приводит к тому, что *реологический закон Ньютона* в вихревых областях несжимаемой невесомой среды не работает, а обобщенный закон Ньютона вырождается в них в условие сферичности тензора напряжений. То есть, вихревые области среды движутся так, будто трения в них нет – как объем идеальной среды в вязкой жидкости.

Поэтому в *соленоидальных средах*, в которых существует потенциал внешних сил, вихревое движение происходит без диссипации энергии в тепло. Иначе говоря, в вязкой несжимаемой среде в консервативном поле сил вихри не диссипируют в тепло, а только рассеиваются относительно среды благодаря диффузии и перемешиваются в ней благодаря конвекции.

Интересно, что это прямо следует из обобщенного уравнения Гельмгольца (кинематической формы уравнения Навье – Стокса в *форме Громка – Лэмба*) для дисперсии завихренности Ω в вязкой несжимаемой среде с коэффициентом кинематической вязкости ν в консервативном поле сил:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \nabla)\vec{\Omega} = \nu \nabla^2 \vec{\Omega}, \tag{1}$$

если его выразить через переносную конвективную скорость дисперсии завихренности $\vec{W}$ и диффузионную скорость завихренности относительно среды – $\nu \nabla\Omega / \Omega = \vec{V}_d$:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \left(\left(\vec{W} - \nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega} \right) \cdot \nabla \right) \vec{\Omega} = 0 . \tag{2}$$

Это даст равенство нулю суммы частной производной от завихренности и производной по направлению вектора абсолютной скорости $\vec{W} + \vec{V}_d$, то есть равенство нулю полной производной от завихренности вдоль вектора ее абсолютной скорости, и поэтому завихренность остается постоянной в пределах фронта своего распространения. Циркуляция скорости по этим контурам, соответственно, также будет сохраняться [2, 5].

Что касается природы зарождения завихренности на границах течения, то она может быть любой, так как уравнение дисперсии завихренности в вязкой среде выражает собой закон сохранения только возникшей ранее завихренности, что эквивалентно закону сохранения момента импульса вихря в вязкой среде.

Подчеркнем, что природа зарождения завихренности с острых кромок крыльев (в частности, пластин) не вязкая, поскольку связана с невозможностью образования бесконечно больших по абсолютной величине скоростей и давлений в окрестности острых кромок крыльев при обтекании их потоком реальной среды [3].

Еще одним преимуществом обобщенного УМДВ является возможность выделения физических компонент нагрузок на крыльях: циркуляционной компоненты – аналога *квазистационарной силы Жуковского*, которая определяется мгновенным значением циркуляции по контуру, прилегающему к расчетному сечению крыла (без учета сошедших вихрей); инерционной компоненты, которая зависит от мгновенной присоединенной массы расчетного профиля крыла и определяется мгновенной циркуляцией ускорения по контуру, прилегающему к расчетному сечению крыла; вихревой (индуктивной) компоненты, которая определяется мгновенной величиной завихренности и ее распределением вокруг расчетного профиля крыла [5 – 7].

Метод был апробирован для класса задач о колебаниях крыла в вязкой несжимаемой среде с ограниченным решением на кромках и неустановившегося отрывного обтекания пластины вязким потоком: полученные значения нормальной силы оказались в пределах погрешности эксперимента для всего *диапазона чисел Рейнольдса* и всех закритических углов атаки [2, 8].

Поскольку данный метод диффузию завихренности от каждого дискретного вихря моделирует аналитически, это позволяет для случая течения с проскальзыванием на твердых границах выразить все кинематические поля течения от вихря Лэмба – Озеена вблизи стенки и в канале в аналитическом виде, что и является целью данной работы.

Анализ последних исследований. Для моделирования вихревых течений в некоторых задачах, например, в задачах о моделировании работы крыльев насекомых, иногда необходимо рассматривать движение вихрей или вихревых поверхностей вблизи стенки или в канале. Например, в работе [5] при помощи обобщенного УМДВ и метода зеркального отображения исследовались аэродинамические характеристики пары симметрично вращающихся крыльев насекомых (*фаза броска механизма Вейс-Фо*) и поля вязкого вихревого течения вокруг них. А в работе [9], на основе экспериментальных данных о кинематике движения крыльев, при помощи УМДВ (в идеальной постановке) исследовался процесс вентиляции пчелами своего улья, для чего моделировалось движение вихрей в канале. Однако аналитических выражений для кинематических полей течений от вихря вблизи стенки и в канале в указанных работах не приведено.

Кинематические поля вязкого течения с проскальзыванием от вихря вблизи стенки. *Закон дальнодействия* для индуцированного поля конвективной окружной скорости от дискретного вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в вязкой среде отличается от *закона Био – Савара* множителем для циркуляции:

$$\Gamma = \Gamma_0 \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(z - z_0)\left(\overline{z - z_0}\right)}{4\nu t} \right] \right\}, \tag{3}$$

который обеспечивает ее уменьшение с течением времени вследствие растекания ядра завихренности с радиальной диффузионной скоростью $\vec{V}_d$ по заранее известному закону.

Применяя метод зеркального отображения для случая расположения вихря вблизи стенки, а также формализм комплексного потенциала аналогового дискретного вихря равной циркуляции в соответствии с (3), получим следующие аналитические выражения для кинематических полей нестационарного вязкого вихревого индуцированного течения, возникшего сразу во всем пространстве после того, как был убран источник завихренности.

Комплексный потенциал от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 вблизи стенки:

$$X = -\frac{i\Gamma_0}{2\pi} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(z - z_0)\left(\overline{z - z_0}\right)}{4\nu t} \right] \right\} \ln \frac{z - z_0}{z - \overline{\overline{z_0}}}. \tag{4}$$

Комплексно сопряженная скорость от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 вблизи стенки:

$$\bar{V} = -\frac{i\Gamma_0}{2\pi} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(z - z_0)\left(\overline{z - z_0}\right)}{4\nu t} \right] \right\} \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - \overline{\overline{z_0}}} \right). \tag{5}$$

Функция тока от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 вблизи стенки:

$$\psi = -\frac{\Gamma_0}{4\pi} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4\nu t} \right] \right\} \ln \frac{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)(y + y_0) \right]^2 + 4y_0^2 (x - x_0)^2}{\left[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 \right]^2}. \tag{6}$$

Компоненты индуцированной скорости от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 вблизи стенки:

$$u = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4\nu t} \right] \right\} \left[\frac{y + y_0}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} - \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right];$$

$$v = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4\nu t} \right] \right\} \left[\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} \right]. \tag{7}$$

Завихренность от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 вблизи стенки:

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} \left\{ \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4\nu t} \right] - \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}{4\nu t} \right] \right\}. \tag{8}$$

Кинематические поля вязкого течения с проскальзыванием от вихря в канале. Применяя метод конформного отображения для случая расположения вихря в канале, а также формализм комплексного потенциала аналогового дискретного вихря равной циркуляции в соответствии с (3), получим следующие аналитические выражения для кинематических полей нестационарного вязкого вихревого индуцированного течения, возникшего сразу во всем пространстве после того, как был убран источник завихренности [10].

Комплексный потенциал от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в канале шириной H :

$$\mathrm{X}=-\frac{i\,\Gamma_0}{2\pi}\left\{1-\exp\left[-\frac{1}{4\nu t}\left(\exp\left\{\frac{\pi}{H}z\right\}-\exp\left\{\frac{\pi}{H}z_0\right\}\right)\overline{\left(\exp\left\{\frac{\pi}{H}z\right\}-\exp\left\{\frac{\pi}{H}z_0\right\}\right)}\right]\right\}\ln\frac{1-\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(z_0-z\right)\right]}{1-\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(\overline{z_0}-z\right)\right]}. \tag{9}$$

Комплексно сопряженная скорость от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в канале шириной H :

$$\bar{V}=\frac{i\,\Gamma_0}{2H}\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{4\nu t}\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}z\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}z_0\right)\right]\overline{\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}z\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}z_0\right)\right]}\right\}\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{1-\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(\overline{z_0}-z\right)\right]}-\frac{1}{1-\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(z_0-z\right)\right]}\right\}. \tag{10}$$

Функция тока от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в канале шириной H :

$$\psi=-\frac{\Gamma_0}{4\pi}\left[1-\exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\left\{\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}y\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}y_0\right)\right]^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}y\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}y_0\right)\right]^2\right\}\right)\right]\times$$

$$\times\ln\frac{1-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]+\exp\left[\frac{2\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]}{1-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0+y\right)\right]+\exp\left[\frac{2\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]}. \tag{11}$$

Компоненты индуцированной скорости от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в канале шириной H :

$$u=\frac{\Gamma_0}{2H}\left[1-\exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\left\{\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}y\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}y_0\right)\right]^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}y\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}y_0\right)\right]^2\right\}\right)\right]\times\left\{\frac{\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\sin\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0+y\right)\right]}{1-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0+y\right)\right]+\exp\left[\frac{2\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]}-\right.$$

$$\left.-\frac{\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\sin\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]}{1-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]+\exp\left[\frac{2\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]}\right\};$$

$$v=\frac{\Gamma_0}{2H}\left[1-\exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\left\{\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}y\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}y_0\right)\right]^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}y\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}y_0\right)\right]^2\right\}\right)\right]\times\left\{\frac{1-\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]}{1-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]+\exp\left[\frac{2\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]}-\right.$$

$$-\frac{1-\exp\left[\frac{\pi}{H}(x_0-x)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}(y_0+y)\right]}{1-2\exp\left[\frac{\pi}{H}(x_0-x)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}(y_0+y)\right]+\exp\left[\frac{2\pi}{H}(x_0-x)\right]}\Bigg\}. \qquad (12)$$

Завихренность от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в канале шириной H :

$$\Omega=\frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t}\left[\exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\left\{\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}y\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}y_0\right)\right]^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}y\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}y_0\right)\right]^2\right\}\right)-\exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\left\{\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}y\right)-\exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}y_0\right)\right]^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}y\right)+\exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}y_0\right)\right]^2\right\}\right)\right]. \qquad (13)$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Аналогичные аналитические выражения для функции тока, завихренности и компонент индуцированной скорости от вихря Лэмба – Озеена можно получить для случая нестационарного вязкого вихревого индуцированного течения с проскальзыванием на твердых границах произвольной формы при помощи метода конформного отображения и формализма комплексного потенциала аналогового дискретного вихря равной циркуляции в соответствии с (3). Также не представляет особого труда получить подобные аналитические выражения для кинематических полей нестационарных вязких вихревых индуцированных течений с проскальзыванием от цепочки вихрей Лэмба – Озеена вблизи стенки и в канале.

Кроме того, используя в *обобщенной формуле Коши – Лагранжа* [6] формулы (7) и (12) для компонент индуцированной скорости от вихря Лэмба – Озеена (и подобные – для цепочки вихрей Лэмба – Озеена) в случае нестационарных вязких вихревых индуцированных течений с проскальзыванием вблизи стенки и в канале, можно получить поля давления.

Список литературы

1. *Dovgiy S. A., Shekhovtsov A. V.* An improved vortex lattice method for nonstationary problems // Journal of mathematical sciences. – 2001. – Vol. 104. – No. 6. – P. 1615 – 1627. DOI: 10.1023/A:1011325112413.
2. *Довгий С. А., Шеховцов А. В.* Апробация УМДВ для класса задач о колебаниях крыла в вязкой среде с ограниченным решением на кромках // Вісник Харківського національного університету. Серія : математичне моделювання, інформаційні технології, автоматизовані системи управління. – Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2009. – Вип. 12. – № 863.– С. 111 – 128.
3. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1987. – 840 с.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч 2. – М. : Физматлит, 1963. – 728 с.
5. *Шеховцов А. В.* Инерционно-вихревой принцип генерации усилий на крыльях насекомых // Прикладная гидромеханика. – 2011. – Том 13 (85). – № 1. – С. 61 – 76. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v29.i1.70.
6. *Shekhovtsov A. V.* A Method for evaluation of an unsteady pressure field in a mixed potential-vortical domain adjacent to the rotating wing // International journal of fluid mechanics research. – 2002. – Vol. 29. – N 1. – P. 111 – 123.
7. *Шеховцов А. В.* Инерционно-циркуляционный принцип полета и плавания // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2005. – Вип. 4. – № 661. – С. 249 – 258.
8. *Шеховцов А. В.* Решение некорректных задач гидроаэродинамики усовершенствованным методом дискретных вихрей // Тези науково – практичної конференції «Комп'ютерна гідромеханіка». – Київ : Інститут гідромеханіки НАН України. – 2008. – С. 50 – 51.
9. *Shekhovtsov A. V., Junge M., Nachtigall W.* Aerodynamics of a bee wing, operating in a fanning mode // International journal of fluid mechanics research. – 2001. – Vol. 28. – N 4. – P. 572 – 575. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v28.i4.100.
10. *Лаврентьев М. А.* Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. – М. – Л. : ГИТТЛ, 1946. – 159 с.

References (transliterated)

1. *Dovgiy S. A., Shekhovtsov A. V.* An improved vortex lattice method for nonstationary problems. *Journal of mathematical sciences*. 2001, vol. 104, no. 6, pp. 1615–1627. DOI: 10.1023/A:1011325112413.
2. Dovgiy S. A., Shekhovtsov A. V. Aprobatsiya IMDV dlya klassa zadach o kolebaniyakh kryla v vyazkoy srede s ogranichennym resheniyem na kromkakh [Approbation of the IMDV for a class of problems about oscillations of a wing in a viscous medium with a restricted solution on edges]. *Visnyk Kharkivs'koho natsional'noho universytetu. Seriya : matematichne modelyuvannya, informatsíyní tekhnologíí̈, avtomatizovaní systemy upravlínnya* [Bulletin of KhNU. Series: mathematical modeling, information technology, automated control systems]. Kharkov, KhNU im. V.N. Karazina Publ., 2009, issue 12, no. 863, pp. 111–128.
3. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 840 p.
4. Kochin N. Ye., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika, ch. 2* [Theoretical fluid mechanics, part 2]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1963. 728 p.

5. Shekhovtsov A. V. Inertsionno-vikhrevoy printsip generatsii usiliy na kryl'yakh nasekomykh [Inertial-vortical principle of generation of efforts on insect wings]. *Prikladnaya gidromekhanika* [Applied fluid mechanics]. 2011, vol. 13 (85), no. 1, pp. 61–76.

6. Shekhovtsov A. V. A Method for evaluation of an unsteady pressure field in a mixed potential-vortical domain adjacent to the rotating wing. *International journal of fluid mechanics research.* 2002, vol. 29, no. 1, pp. 111–123. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v29.i1.70.

7. Shekhovtsov A. V. Inertsionno-tsirkulyatsionnyy printsip poleta i plavaniya. [Inertial-circulating principle of flight and swimming] *Visnyk Kharkivs'koho natsional'noho universytetu. Seriya : matematichne modelyuvannya, informatsíyní tekhnologíї, avtomatizovaní systemy upravlínnya* [Bulletin of KhNU. Series: mathematical modeling, information technology, automated control systems]. Kharkov, KhNU im. V.N. Karazina Publ., 2005, issue 4, no. 661, pp. 249–258.

8. Shekhovtsov A. V. Resheniye nekorrektnykh zadach gidroaerodinamiki usovershenstvovannym metodom diskretnykh vikhrey [The solution of ill-posed problems of hydrodynamics by the improved method of discrete vortices]. *Tezy naukovo – praktychnoyi konferentsiyi "Komp"yuterna gidromekhanika"* [Abstracts of scientific and practical conference "Computer hydromechanics"]. Kyiv, Instytute gidromekhaniky NAN Ukrayiny Publ., 2008. pp. 50–51.

9. Shekhovtsov A. V., Junge M., Nachtigall W. Aerodynamics of a bee wing, operating in a fanning mode. *International journal of fluid mechanics research*. 2001, vol. 28, no. 4. pp. 572–575. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v28.i4.100.

10. Lavrent'yev M. A. *Konformnyye otobrazheniya s prilozheniyami k nekotorym voprosam mekhaniki* [Conformal mappings with applications to some questions of mechanics]. Moscow – Leningrad, GITTL Publ., 1946. 159 p.

Поступила (received) 14.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Шеховцов Олександр Володимирович (Шеховцов Александр Владимирович, Shekhovtsov Alexander Vladimirovich) **–** кандидат фізико-математичних наук, Інститут гідромеханіки Національної академії наук України, м. Київ; тел.: (095) 520-27-47; e-mail: avshekhovtsov@gmail.com.