

Ю. В. БАТЫГИН, Е. Ф. ЕРЕМИНА, Е. А. ЧАПЛЫГИН, В. А. СТРЕЛЬНИКОВА

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ИНСТРУМЕНТАХ МАГНИТНО-ИМПУЛЬСНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ ПРИ ПРЯМОМ ПРОПУСКАНИИ ТОКА ЧЕРЕЗ ОБРАБАТЫВАЕМЫЙ МЕТАЛЛ

С помощью математического аппарата теории электромагнитных полей получены аналитические выражения, позволяющие рассчитывать распределение тока в поперечном сечении листового металла, возбужденного инструментом магнитно-импульсного притяжения при прямом пропускании тока через обрабатываемый металл, линейную плотность суммарного тока в листовом металле в зоне под основным токопроводом, а также интегральную силу притяжения, возбуждаемую при взаимодействии параллельных токов. Полученные решения поставленной электродинамической задачи позволяют рассматривать процессы в реальных инструментах магнитно-импульсного притяжения.

Ключевые слова: магнитно-импульсное притяжение, токопровод, листовый металл, линейная плотность тока, аналитические зависимости, математическая модель.

Ю. В. БАТЫГИН, О. Ф. ЕРЬОМИНА, Е. О. ЧАПЛИГИН, В. А. СТРЕЛЬНИКОВА

ЭЛЕКТРОДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В ІНСТРУМЕНТАХ МАГНІТНО-ІМПУЛЬСНОГО ТЯЖІННЯ ПРИ ПРЯМОМУ ПРОПУЩЕННІ СТРУМУ ЧЕРЕЗ МЕТАЛ, ЩО ОБРОБЛЯЮТЬ

За допомогою математичного апарату теорії електромагнітних полів отримано аналітичні вирази, що дозволяють розрахувати розподіл струму в поперечному перерізі листового металу, збудженого інструментом магнітно-імпульсного притягання при прямому пропусканні струму через оброблюваний метал, лінійну густину сумарного струму в листовому металі в зоні під основним струмопроводом, а також інтегральну силу притягання, що збуджується при взаємодії паралельних струмів. Отримані рішення поставленої електродинамічної задачі дозволяють розглядати процеси в реальних інструментах магнітно-імпульсного притягання.

Ключові слова: магнітно-імпульсне притягання, струмопровід, листовий метал, лінійна густина струму, аналітичні залежності, математична модель.

YU. V. BATYGIN, O. F. YERYOMINA, E. O. CHAPLYGIN, V. A. STRELNIKOVA

ELECTRODYNAMIC PROCESSES IN INSTRUMENTS OF MAGNETIC-PULSE ATTRACTION AT DIRECT CURRENT PASSING THROUGH THE HANDLED METAL

With the help of the mathematical apparatus of the theory of electromagnetic fields, a study was conducted of electrodynamic processes in magnetic-pulse attraction instruments with direct current passing through the metal being processed. Analytical expressions are obtained that allow one to calculate the current distribution in the cross section of sheet metal, where a superposition of induced and extraneous current takes place, and relations are found for the linear density of the total current in the sheet metal in the zone under the main conductor, as well as the integral force of attraction induced by the interaction of parallel currents. The obtained solutions of the set electrodynamic problem adequately describe the processes in the tool of magnetic-pulse attraction and can be used in the design of real structures of tools, and the analysis of the dependencies found for the characteristics of the flowing processes will allow establishing requirements that will ensure not only which efficiency but also the efficiency of the tool.

Key words: magnetic-pulse attraction, conductor, sheet metal, linear current density, analytical dependencies, mathematical model.

Введение. Исследование электродинамических процессов предполагает постановку и решение задач, конечным результатом которых должны стать физико-математические зависимости для характеристик протекающих процессов, в условиях интенсивного проникновения действующих электромагнитных полей.

Как представляется априори, анализ этих зависимостей позволит установить требования, выполнение которых обеспечит не только дееспособность, но и эффективность инструмента, имеющего предлагаемый принцип действия.

Анализ последних исследований. При решении будем следовать алгоритмам, представленным и развитым в работах [1, 2].

Справедливости ради следует отметить, что подобная задача уже рассматривались авторами научных изданий [3, 4]. Однако непосредственное использование полученных ими формул и соотношений для проведения настоящих расчётов не представляется возможным, ввиду ограниченности найденных результатов условиями постановки и решения задач.

Постановка задачи. Для анализа электромагнитных процессов примем расчётную модель (рис. 1), соответствующую поперечным сечениям системы в ортогональных направлениях.

Сформулируем допущения, вполне адекватные реальности и позволяющие получить аналитические зависимости в квадратурах:

- Заготовка представляет собой листовый немагнитный металл с достаточно большими поперечными размерами, толщиной d и удельной электропроводностью γ .
- Основной токопровод прозрачен для действующих полей, так что его металл не оказывает никакого влияния на протекающие электромагнитные процессы.
- Имеет место геометрическая симметрия системы относительно координатной плоскости ZOX .
- Вдоль оси абсцисс система обладает достаточно большой протяжённостью, так что $\frac{\partial}{\partial x}[\dots] = 0$.

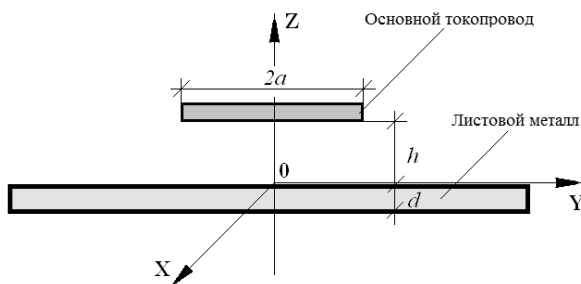


Рис. 1 – Расчётная модель.

• В основном токопроводе в направлении оси OX течёт равномерно распределённый ток с плотностью $j(t) = j_m \cdot j_t(t)$, где $j_m = I_m / 2a$ – это амплитуда (I_m – максимум тока); $j(t)$ – временная зависимость.

• Частотные характеристики возбуждающего тока таковы, что выполняется условие квазистационарности по Ландау $\frac{\omega}{c} \cdot b \ll 1$ [5]; здесь ω – циклическая частота процесса; c – скорость света в вакууме; b – характерный размер системы.

• В системе возбуждается электромагнитное поле с ненулевыми компонентами напряжённости: $E_x \neq 0$, $H_{y,z} \neq 0$.

Математическая модель. В рамках принятых допущений уравнения Максвелла для ненулевых составляющих напряжённости электромагнитного поля, преобразованных по Лапласу (L – преобразование) с учётом нулевых начальных условий принимают вид [5 – 7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z(p, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(p, y, z)}{\partial z} = j_x(p, y, z); \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x(p, y, z)}{\partial z} = -p\mu_0 H_y(p, y, z); \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x(p, y, z)}{\partial y} = p\mu_0 H_z(p, y, z), \end{array} \right. \quad (3)$$

где p – параметр преобразования Лапласа; $E_x(p, y, z) = L\{E_x(t, y, z)\}$; $H_{y,z}(p, y, z) = L\{H_{y,z}(t, y, z)\}$; $j_x(p, y, z) = L\{j_x(t, y, z)\}$; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

В общем случае плотность тока в правой части уравнения (1) записывается в следующем виде:

$$j_x(p, y, z) = (p \cdot \epsilon_0 + \gamma) \cdot E_x(p, y, z) + j_{xi}(p, y, z), \quad (4)$$

где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; $j_{xi}(t, y, z)$ – плотность тока в основном токопроводе;

$$j_{xi}(p, y, z) = j(p) \cdot f(y) \cdot \delta(z-h).$$

Здесь $j(p) = j_m \cdot j_t(p)$, где $j_m = I_m / 2a$ – амплитуда; $j_t(p) = L\{j_t(t)\}$, $j_t(t)$ – временная зависимость возбуждающего тока; $f(y)$ – функция поперечного распределения плотности тока; $\delta(z)$ – импульсная функция Дирака.

При решении поставленной задачи в принятой модели расчёта следует выделить области с однородными электрофизическими характеристиками.

Геометрическая и электродинамическая симметрия исследуемой системы соответственно рис. 1 позволяет считать, что таковыми являются:

• свободное полупространство над листовым металлом заготовки со стороны основного токопровода, где $z \in [0, \infty)$;

• область листового металла заготовки, где $z \in [-d, 0]$;

• свободное полупространство с внешней стороны листового металла, где $z \in (-\infty, 0]$.

Из дифференциальных уравнений (1) – (3) с учётом выражения (4) получим уравнения для продольной компоненты напряжённости электрического поля $E_x(p, y, z)$ в выделенных областях, а именно:

• для свободного полупространства с основным токопроводом, $z \in [0, \infty)$,

$$\frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial z^2} = p \cdot \mu_0 \cdot j_x(p, y, z); \quad (5)$$

• для листового металла, $z \in [-d, 0]$,

$$\frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial z^2} = \gamma \cdot E_x(p, y, z); \quad (6)$$

• для свободного полупространства с внешней стороны листового металла заготовки, $z \in (-\infty, 0]$,

$$\frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial z^2} = 0. \quad (7)$$

Для уравнений (5) – (7) применим *интегральное косинус-преобразование Фурье* [6, 7], допустимость которого обусловлена геометрической и электрической симметрией рассматриваемой задачи относительно плоскости ZOX .

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} E_x(p, y, z) = \int_0^{\infty} E_x(p, \lambda, z) \cdot \cos(\lambda y) d\lambda; \\ j_x(p, y, z) = \int_0^{\infty} j_x(p, \lambda, z) \cdot \cos(\lambda y) d\lambda, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} E_x(p, y, z) = \int_0^{\infty} E_x(p, \lambda, z) \cdot \cos(\lambda y) d\lambda; \\ j_x(p, y, z) = \int_0^{\infty} j_x(p, \lambda, z) \cdot \cos(\lambda y) d\lambda, \end{cases} \quad (9)$$

где $j_x(p, \lambda, z) = \int_0^{\infty} j_x(p, y, z) \cdot \cos(\lambda y) dy = j(p) f(\lambda) \delta(z)$; $f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} f(y) \cdot \cos(\lambda y) dy$, и, согласно принятому допущению о равномерности распределения возбуждающего тока, $f(\lambda) = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\sin(\lambda a)}{(\lambda a)}$.

С учётом (8) и (9) соотношения (5) – (7) преобразуются к виду обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка [7]:

- для свободного полупространства с основным токопроводом, $z \in [0, \infty)$, получаем

$$\frac{d^2 E_x(p, \lambda, z)}{dz^2} - \lambda^2 E_x(p, \lambda, z) = K(p, \lambda) \cdot \delta(z-h), \quad (10)$$

где $K(p, \lambda) = \mu_0 \cdot p \cdot j(p) \cdot f(\lambda)$;

- для листового металла, $z \in [-d, 0]$,

$$\frac{d^2 E_x(p, \lambda, z)}{dz^2} - q^2(p, \lambda) \cdot E_x(p, \lambda, z) = 0, \quad (11)$$

где $q(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p \cdot \mu_0 \cdot \gamma}$ – параметр разделения, физический смысл которого – волновое число в немагнитном металле с удельной электропроводностью γ ;

- для свободного полупространства с внешней стороны листового металла заготовки, $z \in (-\infty, 0]$,

$$\frac{d^2 E_x(p, \lambda, z)}{dz^2} - \lambda^2 \cdot E_x(p, \lambda, z) = 0. \quad (12)$$

Общие интегралы уравнений (10), (11) и (12) для выделенных областей имеют вид [6, 7]:

- в свободном полупространстве с основным токопроводом, $z \in [0, \infty)$, условию ограниченности при $z \rightarrow \infty$ удовлетворяет функция

$$E_x^{(1)}(p, \lambda, z) = C(p, \lambda) e^{-\lambda \cdot z} + \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} \left(\operatorname{sh}(\lambda(z-h)) \cdot \eta(z-h) - 0.5 e^{\lambda(z-h)} \right), \quad (13)$$

где $C(p, \lambda)$ – произвольная постоянная интегрирования;

- в листовом металле, $z \in [-d, 0]$,

$$E_x^{(2)}(p, \lambda, z) = D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot z} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot z}, \quad (14)$$

где $D_{1,2}(p, \lambda)$ – произвольные постоянные интегрирования;

- в свободном полупространстве с внешней стороны листового металла заготовки, $z \in (-\infty, 0]$, условию ограниченности при $z \rightarrow -\infty$ удовлетворяет функция:

$$E_x^{(3)}(p, \lambda, z) = B(p, \lambda) \cdot e^{\lambda(z+d)}, \quad (15)$$

где $B(p, \lambda)$ – произвольная постоянная интегрирования.

Изображения касательных составляющих напряжённости магнитного поля удалось найти с помощью формулы (13) – (15) и уравнения (3):

- $z \in [0, \infty)$,

$$H_y^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{\lambda}{p\mu_0} \left(C(p, \lambda) e^{-\lambda \cdot z} - \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} \left(\operatorname{ch}(\lambda(z-h)) \eta(z-h) - 0.5 e^{\lambda(z-h)} \right) \right); \quad (16)$$

- $z \in [-d, 0]$:

$$H_y^{(2)}(p, \lambda, z) = -\frac{q(p, \lambda)}{p\mu_0} \cdot \left(D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot z} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot z} \right); \quad (17)$$

- $z \in (-\infty, d]$,

$$H_y^{(3)}(p, \lambda, z) = -\frac{\lambda}{p\mu_0} \cdot B(p, \lambda) \cdot e^{\lambda(z+d)}. \quad (18)$$

Из условия непрерывности касательных компонент напряжённости электромагнитного поля на границах выделенных областей получаем системы алгебраических уравнений для определения неизвестных произвольных постоянных интегрирования в выражениях (13) – (18):

при $z = 0$,

$$\begin{cases} C(p, \lambda) - \frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} = D_1(p, \lambda) + D_2(p, \lambda); \\ C(p, \lambda) + \frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} = -\frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \cdot (D_1(p, \lambda) - D_2(p, \lambda)); \end{cases} \quad (19)$$

при $z = -d$,

$$\begin{cases} D_1(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot d} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot d} = B(p, \lambda); \\ \frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \cdot (D_1(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot d} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot d}) = B(p, \lambda). \end{cases} \quad (20)$$

В дальнейшем нас будет интересовать возбуждение электромагнитного поля в листовом металле. Поэтому ограничимся определением неизвестных произвольных постоянных $D_{1,2}(p, \lambda)$.

Из системы линейных алгебраических уравнений находим, что

$$\begin{cases} D_1(p, \lambda) = -\frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} \cdot \frac{e^{q(p, \lambda) \cdot d} \cdot \left(1 + \frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)}{\Delta(p, \lambda)}; \\ D_2(p, \lambda) = \frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-q(p, \lambda) \cdot d} \cdot \left(1 - \frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)}{\Delta(p, \lambda)}. \end{cases} \quad (21)$$

где $\Delta(p, \lambda) = \left(1 + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)^2\right) \cdot sh(q(p, \lambda)d) + 2 \cdot \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) \cdot ch(q(p, \lambda)d)$.

Функции $D_{1,2}(p, \lambda)$ из соотношений (21) подставим в выражение (14). После тождественных преобразований получим, что

$$E_x(p, \lambda, z) = -\frac{K(p, \lambda) e^{-\lambda h}}{\lambda} \cdot \frac{\left(sh(q(p, \lambda)(z+d)) + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) ch(q(p, \lambda)(z+d)) \right)}{\Delta(p, \lambda)}. \quad (22)$$

Полученная зависимость представляет собой изображение по Лапласу для продольной компоненты напряжённости электрического поля, возбуждённого в листовом металле.

Выражение (22) помножим на удельную электропроводность листового металла γ . Результат подставим в формулу (8).

После всех необходимых подстановок найдём плотность индуцированного тока в лапласовом L -пространстве:

$$j_x(p, y, \zeta) = -\left(\frac{2a\tau}{\pi d^2}\right) \cdot (p \cdot j(p)) \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda a)}{(\lambda a)} \cdot \frac{e^{-\lambda h}}{\lambda} \cdot \frac{F(p, \lambda, \zeta)}{\Delta(p, \lambda)} \cdot \cos(\lambda y) d\lambda, \quad (23)$$

где $\tau = \mu_0 \gamma d^2$ – характерное время диффузии в листовом металле [8],

$$F(p, \lambda, \zeta) = \left(sh((q(p, \lambda)d) \cdot (1 - \zeta)) + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) ch((q(p, \lambda)d) \cdot (1 - \zeta)) \right),$$

$\zeta = \left(-\frac{z}{d}\right)$ – пространственная переменная, связанная с толщиной листового металла, $\zeta \in [0, 1]$.

В выражении (23) выполним переход в пространство оригиналов [6, 7].

Для вычисления особых точек подынтегральной функции приравняем к нулю знаменатель дроби выражения (23) и представим произведение продольного волнового числа на толщину листовой заготовки как мнимую величину:

$$\{\Delta(p, \lambda) = 0; (q(p, \lambda) \cdot d) = i \cdot \beta_k\}, \quad (24)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

С помощью системы (24) получаем трансцендентное уравнение для величин β_k :

$$ctg \beta_k = 0.5 \cdot \left(\frac{\beta_k}{(\lambda d)} - \frac{(\lambda d)}{\beta_k} \right). \quad (25)$$

Как следует из (24) и (25), особыми точками функции комплексного переменного под знаком интеграла в

выражении (23) являются простые, отличные от нуля полюса p_k , а именно:

$$p_k = -\frac{1}{\tau} \cdot (\beta_k^2 + (\lambda \cdot d)^2), \quad k = 0, \pm 1, 2, \dots \quad (26)$$

Далее, в соответствии с теоремами об оригинале рациональной дроби и из обращения свёртки функций находим из выражения (23) соответствующую временную зависимость:

$$\begin{aligned} & \frac{p \cdot j(p) \cdot \left(sh((q(p, \lambda) \cdot d)(1 - \zeta)) + \left(\frac{(q(p, \lambda) \cdot d)}{(\lambda d)} \right) \cdot ch((q(p, \lambda) \cdot d)(1 - \zeta)) \right)}{\Delta(p, \lambda)} \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot \left. \frac{i \cdot \left(\sin(\beta_k(1 - \zeta)) + \left(\frac{\beta_k}{(\lambda d)} \right) \cdot \cos(\beta_k(1 - \zeta)) \right)}{\frac{d}{dp} [\Delta(p, \lambda)]} \right|_{p=p_k} \cdot \frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t}, \quad (27) \end{aligned}$$

где $\zeta = -\frac{z}{d}$, $\zeta \in [0, 1]$ – координата, связанная с толщиной листового металла, в относительных единицах;

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 2, & k \neq 0. \end{cases}$$

Примечание.

Наличие множителя δ_k обусловлено чётностью корней β_k в уравнении (25).

В конечном итоге, с использованием зависимости (27) после необходимых тождественных преобразований находим оригинал для плотности тока, возбуждаемого в листовом металле.

$$j_x(t, \zeta, y) = I_m \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{(\lambda a)} e^{-\lambda h} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{F(\beta_k, \lambda, \zeta)}{\Phi(\beta_k, \lambda)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \lambda \cos(\lambda y) d\lambda, \quad (28)$$

где $F(\beta_k, \lambda, \zeta) = \beta_k \cdot \left[\sin(\beta_k(1 - \zeta)) + \left(\frac{\beta_k}{(\lambda \cdot d)} \right) \cdot \cos(\beta_k(1 - \zeta)) \right];$

$$\Phi(\beta_k, \lambda) = \cos(\beta_k) \cdot [(\lambda d)^2 + 2(\lambda d) - \beta_k^2] + 2\beta_k \sin(\beta_k) \cdot [(\lambda d) + 1].$$

Выражение (28) приведём к виду, удобному для вычислений. Для этого введём новую переменную интегрирования $\alpha = \lambda d$, $\alpha \in [0, \infty)$, $d\lambda = \frac{1}{d} \cdot d\alpha$, и составим следующее соотношение:

$$j_x(t, \zeta, y) = I_m \left(\frac{2}{\pi d^2} \right) \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \cdot e^{-\alpha \frac{h}{d}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{F(\beta_k, \alpha, \zeta)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha, \quad (29)$$

где

$$F(\beta_k, \alpha, \zeta) = \beta_k \cdot \left[\sin(\beta_k(1 - \zeta)) + \left(\frac{\beta_k}{\alpha} \right) \cdot \cos(\beta_k(1 - \zeta)) \right];$$

$$\Phi(\beta_k, \alpha) = \cos(\beta_k) \cdot [\alpha^2 + 2\alpha - \beta_k^2] + 2\beta_k \sin(\beta_k) \cdot [\alpha + 1],$$

вещественные числа β_k удовлетворяют трансцендентному уравнению: $ctg \beta_k = 0.5 \cdot \left(\frac{\beta_k}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta_k} \right)$.

Зависимость (29) проинтегрируем по толщине листового металла. Получим формулу для вычисления линейной плотности, описывающей поперечное распределение индуцированного тока:

$$J_x(t, y) = I_m \left(\frac{2}{\pi d} \right) \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \cdot e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha, \quad (30)$$

где $G(\beta_k, \alpha) = \left[(1 - \cos \beta_k) + \left(\frac{\beta_k}{\alpha} \right) \cdot \sin \beta_k \right]$.

Интеграл зависимости (30) по поперечной переменной даёт выражение для величины тока, индуцированно-

го в металле листовой заготовки в области $y \in [-a, a]$:

$$I_x(t) = I_m \left(\frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \left(\frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \right)^2 e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha d\alpha. \quad (31)$$

Пусть внешний ток от стороннего источника подаётся в листовой металл так, что его распределение по поперечному сечению области под основным токопроводом также является равномерным.

Как результат суперпозиции стороннего и индуцированного сигналов, найдём зависимости для результирующего тока и его плотности в указанной ограниченной зоне листового металла.

Суммарный ток запишется так:

$$I_x^{(S)}(t) = I_m \left[j_t(t) - \left(\frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \left(\frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \right)^2 e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha d\alpha \right]. \quad (32)$$

Результирующая плотность тока, протекающего в данной части листового металла, с учётом выражения (29) запишется в таком виде:

$$j_x^{(S)}(t, \zeta, y) = \frac{I_m}{(2ad)} \left[j_t(t) - \left(\frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \cdot e^{-\alpha \frac{h}{d}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{F(\beta_k, \alpha, \zeta)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha \right]. \quad (33)$$

Формула (33) позволяет рассчитывать распределение тока в поперечном сечении листового металла, где имеет место суперпозиция индуцированного и стороннего тока.

Иллюстративной характеристикой протекающих электромагнитных процессов является линейная плотность суммарного тока в листовом металле в зоне под основным токопроводом. Она описывает поперечное распределение тока и, в конечном итоге, иллюстрирует степень однородности возбуждаемых сил притяжения по координате $y \in [-a, a]$.

Интегрируя выражение (33) по $\zeta \in [0, 1]$ с учётом связи $\zeta = -\frac{z}{d}$, $z \in [-d, 0]$, получаем, что

$$J_x^{(S)}(t, y) = \frac{I_m}{(2ad)} \left[j_t(t) - \left(\frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \cdot \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha \right]. \quad (34)$$

Анализируя электромагнитные процессы в рассматриваемой системе при параллельном электрическом подключении основного токопровода длиной l к участку той же длины на листовом металле, можно отметить следующие обстоятельства.

В постановке задачи указывалось, что основной токопровод прозрачен для действующих полей и не влияет на протекающие электромагнитные процессы. Но, положим, что он выполнен из того же металла, что и листовая заготовка.

В первом приближении, влияние индукционных эффектов на токовые характеристики в источнике возбуждения системы – в основном токопроводе – можно учесть, если, исходя из физических принципов подобия, принять, что электромагнитные процессы в нём и в зоне листового металла под ним идентичны.

С учётом вышеуказанных обстоятельств суммарные величины токовых характеристик в основном токопроводе можно представить зависимостями (32) – (34).

Суммарная сила притяжения, возбуждаемая при взаимодействии параллельных токов, описываемых выражением (32), принимает вид [9]:

$$F_{attr}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left(I_x^{(S)}(t) \right)^2 \cdot \frac{\ell}{h}. \quad (35)$$

Перспективы дальнейших исследований. Выражение (35) в совокупности с зависимостью (32), а также соотношения (33) и (34) для линейной плотности возбуждаемых токов представляют собой решения поставленной электродинамической задачи. Они адекватно описывают процессы в инструменте магнитно-импульсного притяжения при прямом пропускании тока через обрабатываемый металл и могут быть использованы при проектировании реальных конструкций инструментов.

Выводы. В данной работе с помощью математического аппарата теории электромагнитных полей показано, что полученные аналитические выражения позволяют рассчитывать распределение тока в поперечном сечении листового металла, где имеет место суперпозиция индуцированного и стороннего тока, а также линейную плотность суммарного тока в листовом металле в зоне под основным токопроводом и интегральную силу притяжения, возбуждаемую при взаимодействии параллельных токов.

В первом приближении влияние индукционных эффектов на токовые характеристики в источнике возбуждения системы (то есть в основном токопроводе) можно учесть, если, исходя из физических принципов подобия, предположить, что электромагнитные процессы в нём и в зоне листового металла под ним идентичны [9].

Следует также заметить, что выражения для суммарной силы притяжения в совокупности с зависимостями для результирующего тока и линейной плотности возбуждаемых токов представляют собой решения поставленной электродинамической задачи, что позволяет рассматривать процессы в реальных инструментах магнитно-импульсного притяжения при «прямом пропускании тока» через обрабатываемый металл.

Список литературы

1. *Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V.* Pulsed electromagnetic attraction of sheet metals – Fundamentals and perspective applications // *Journal of Materials Processing Technology*. – Elsevier. – 2013. – № 213 (3). – pp. 444 – 452.
2. *Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V.* Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals // *Journal of Materials Processing Technology*. – Elsevier. – 2014. – № 214 (2). – pp. 390 – 401.
3. Welcome to BETAG Innovation // Материалы сайта. – 2013. – Режим доступа : <http://www.betaginnovation.com> (www.beulentechnik.com) – Дата обращения : 10 марта 2019.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М. : «Наука», 1973. – 831с.
5. *Батыгин Ю. В., Лавинский В. И., Хищенко Л. Т.* Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Том 1. Издание второе, переработанное и дополненное под общей редакцией д.т.н., профессора Батыгина Ю. В. – Харьков : МОСТ – Торнадо, 2003. – 288с.
6. *Шнейерсон Г. А.* Поля и переходные процессы в аппаратуре сильных токов. – М. : Энергоиздат, 1992. – 413с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. – М. : Наука, 1982. – 620с.
8. *Мэтьюз Дж., Уокер Р.* Математические методы физики // Пер. с англ. Крайнова В. П. – М. : Атомиздат, 1972. – 399с.
9. *Яворский Б. М., Детлаф А. А.* Справочник по физике. – М. : Наука, 1990. – 624 с.

References (transliterated)

1. *Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V.* Pulsed electromagnetic attraction of sheet metals – Fundamentals and perspective applications. *Journal of Materials Processing Technology*. Elsevier, 2013, no. 213 (3), pp. 444–452.
2. *Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V.* Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*. Elsevier, 2014, no. 214 (2), pp. 390–401.
3. Welcome to BETAG Innovation. *Materialy sayta* [Site materials]. 2013. Available at : <http://www.betaginnovation.com> (www.beulentechnik.com) (accessed 10.03.2019).
4. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike* [Handbook of Mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 831 p.
5. *Batygin Yu. V., Lavinsky V. I., Khimenko L. T.* *Impul'snyye magnitnyye polya dlya progressivnykh tekhnologiy. Tom 1. Izdaniye vtoroye, pererabotannoye i dopolnennoye pod obshchey redaktsiyey d.t.n., professora Batygina Yu. V.* [Pulsed magnetic fields for advanced technologies. Volume 1. Second edition, revised and supplemented under the general editorship of Doctor of Technical Sciences, Professor Yu.B. Batygin]. Kharkov, MOST – Tornado Publ., 2003. 288 p.
6. *Shneyerson G. A.* *Polya i perekhodnyye protsessy v apparature sil'nykh tokov* [Fields and transients in the equipment of strong currents. 2nd edition, revised and enlarged]. Moscow, Energoizdat Publ., 1992. 413p.
7. *Landau L. D., Lifshits Ye. M.* *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 620 p.
8. *Met'yuz Dzh., Uoker R.* *Matematicheskiye metody fiziki. Per. s angl. Krainova V. P.* [Mathematical methods of physics. Trans. from English by Krainov V.P.]. Moscow, Atomizdat Publ., 1972. 399 p.
9. *Yavorskiy B. M., Detlaf A. A.* *Spravochnik po fizike* [Handbook of Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 624 p.

Поступила (received) 12.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Батыгин Юрій Вікторович (Батыгин Юрий Викторович, Batygin Yuriy Viktorovich) – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: I.yu.v.batygin@gmail.com.

Єрьоміна Олена Федорівна (Ерёмина Елена Фёдоровна, Yeryomina Olena Fedorivna) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 248-52-75; e-mail: elena.yeryomina@gmail.com.

Чаплыгин Євген Олександрович (Чаплыгин Евгений Александрович, Chaplygin Evgen Olexandrovich) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: [chaplygin.e.a. @gmail.com](mailto:chaplygin.e.a.@gmail.com).

Стрельникова Вікторія Анатоліївна (Стрельникова Виктория Анатольевна, Strelnikova Viktoria Anatoliivna) – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 072-22-85; e-mail: v.strelnikova91@gmail.com.