

А. П. КОЖУШКО, О. О. НАБОКА, О. Л. ГРИГОР'ЄВ

СПЕКТРАЛЬНІ ЕФЕКТИ ТА ТЕОРЕМИ ПРО ВЛАСТИВОСТІ ПУЧКА СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ СКЛАДНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Показано, що динамічний аналіз транспортного засобу із причепом чи напівприцепом приводить до задачі на власні значення для однопараметричного пучка $A + kB$, $k \in \mathbb{R}$ симетричних матриць. Вивчається поведінка спектральних траєкторій $\lambda_j(k)$ і зміни власних форм $\bar{X}_j(k)$ цього пучка. За додаткового припущення невід'ємності матриці B доведено, що функції $\lambda_j(k)$ є монотонними за аргументом k . Сформульовано та доведено нетривіальне твердження о знаках мінорів діагональних елементів виродженої симетричної матриці C , а саме: усі мінори мають однаковий знак. Звідки витікає умова чергування знаків мінору $C_{ii}(\lambda_0)$ діагонального елементу c_{ii} матриці $C = A - \lambda_0 E$, де λ_0 послідовно приймає власні значення $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ матриці A . Крім цього, доведено, що у загальному випадку спектральні траєкторії не мають спільних точок. Введено поняття наближено кратного спектру, тобто таких значень $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$, для яких відстань між траєкторіями $\lambda_{j,1}(k)$ і $\lambda_{j,2}(k)$ є мінімальною за значеннями параметра k . Показано на прикладах, що в околі параметра k_0 відбувається спільне обертання власних форм $\bar{X}_{j,1}(k)$ і $\bar{X}_{j,2}(k)$, яке приводить до обміну їх координат. Тому при динамічному аналізі зв'язаних коливань, насамперед, необхідно вивчати поведінку системи при усіх значеннях параметра k_0 , які відповідають наближено кратному спектру.

Ключові слова: динамічний аналіз, пучок симетричних матриць, спектральні траєкторії, власні форми коливань, монотонність спектру, кратний спектр, мінор матриці.

А. П. КОЖУШКО, Е. А. НАБОКА, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ И ТЕОРЕМЫ О СВОЙСТВАХ ПУЧКА СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Показано, что динамический анализ транспортного средства с прицепом или полуприцепом приводит к задаче на собственные значения для однопараметрического пучка $A + kB$, $k \in \mathbb{R}$ симметричных матриц. Изучается поведение спектральных траекторий $\lambda_j(k)$ и изменения собственных форм $\bar{X}_j(k)$ этого пучка. В дополнительном предположении о неотрицательности матрицы B доказано, что функции $\lambda_j(k)$ являются монотонными по аргументу k . Сформулировано и доказано нетривиальное утверждение о знаках миноров диагональных элементов вырожденной симметричной матрицы C , а именно: все миноры имеют одинаковый знак. Отсюда вытекает условие чередования знаков миноров $C_{ii}(\lambda_0)$ диагонального элемента c_{ii} матрицы $C = A - \lambda_0 E$, где λ_0 последовательно принимает собственные значения $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ матрицы A . Кроме того, доказано, что в общем случае спектральные траектории не имеют общих точек. Введено понятие приближенно кратного спектра, то есть таких значений $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$, для которых расстояние между траекториями $\lambda_{j,1}(k)$ и $\lambda_{j,2}(k)$ является минимально по значениям параметра k . Показано на примерах, что в окрестности параметра k_0 происходит совместное вращение собственных форм $\bar{X}_{j,1}(k)$ и $\bar{X}_{j,2}(k)$, которое приводит к обмену их координат. Поэтому при динамическом анализе связанных колебаний, прежде всего, необходимо изучать поведение системы при всех значениях параметра k_0 , которые отвечают приближенно кратному спектру.

Ключевые слова: динамический анализ, пучок симметричных матриц, спектральные траектории, собственные формы колебаний, монотонность спектра, кратный спектр, минор матрицы.

A. P. KOZHUSHKO, O. O. NABOKA, O. L. GRIGORIEV

SPECTRAL EFFECTS AND THEOREMS ON SYMMETRIC MATRIX BUNDLE SPECTRUM PROPERTIES IN COMPOSITE MECHANICAL SYSTEM DYNAMICAL PROBLEMS

Dynamic analysis of vehicles with trailer or semitrailer evokes the problem on the eigenvalues of one-parameter bundle of symmetric matrices $A + kB$, $k \in \mathbb{R}$. The behavior of spectral trajectories $\lambda_j(k)$ and changes in eigenforms $\bar{X}_j(k)$ of the bundle are studied. Under the additional assumption that the matrix B is non-negative the functions $\lambda_j(k)$ are proved to be monotone in k . A non-trivial statement about the sign of the minors of diagonal elements of degenerate symmetric matrix C is formulated and proved, namely, it is shown that all the minors are of the same sign. This fact implies sign alternation for the minors $C_{ii}(\lambda_0)$ of the diagonal elements c_{ii} of the matrix $C = A - \lambda_0 E$, where λ_0 takes on sequentially the eigenvalues $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ of the matrix A . Moreover, it is proved that in general case the spectral trajectories do not intersect. The notion of approximately multiple spectrum is introduced, which means the values $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$ such that the distance between the trajectories $\lambda_{j,1}(k)$ and $\lambda_{j,2}(k)$ is minimal in k . The examples given testify that in the vicinity of k_0 the eigenforms $\bar{X}_{j,1}(k)$ and $\bar{X}_{j,2}(k)$ mutually rotate, which results into exchange of their coordinates. Hence, when studying the dynamics of connected vibrations the behavior of the system needs to be considered foremost for all the values of the parameter k_0 corresponding to the approximately multiple spectrum.

Key words: dynamic analysis, symmetric matrix bundle, spectral trajectories, eigenforms of vibrations, monotone spectrum, multiple spectrum, matrix minor.

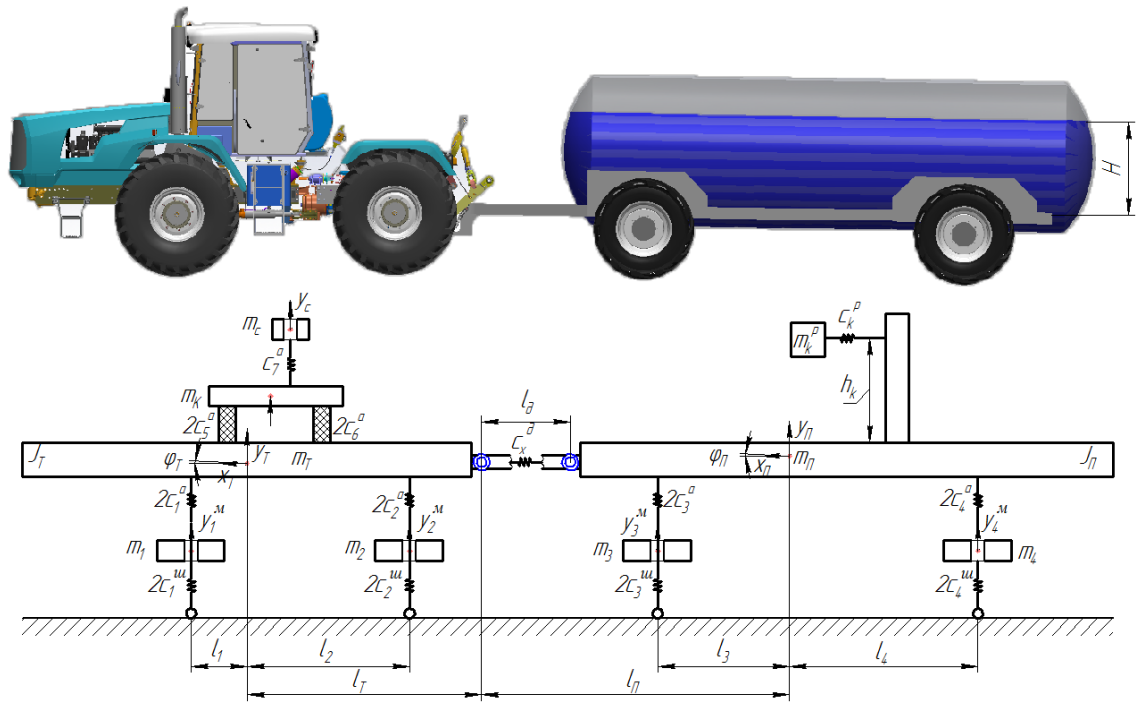


Рис. 1 – Розрахункова схема транспортного засобу з причепом (деякі рухи та зв'язки не зображено).

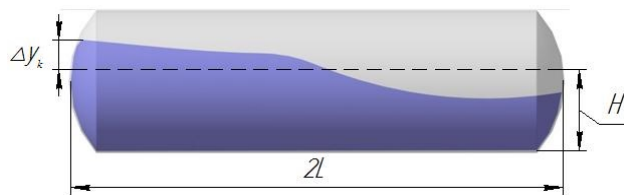


Рис. 2 – Підняття вільної поверхні рідини у цистерні при розгоні або гальмуванні машинно-тракторного агрегату.

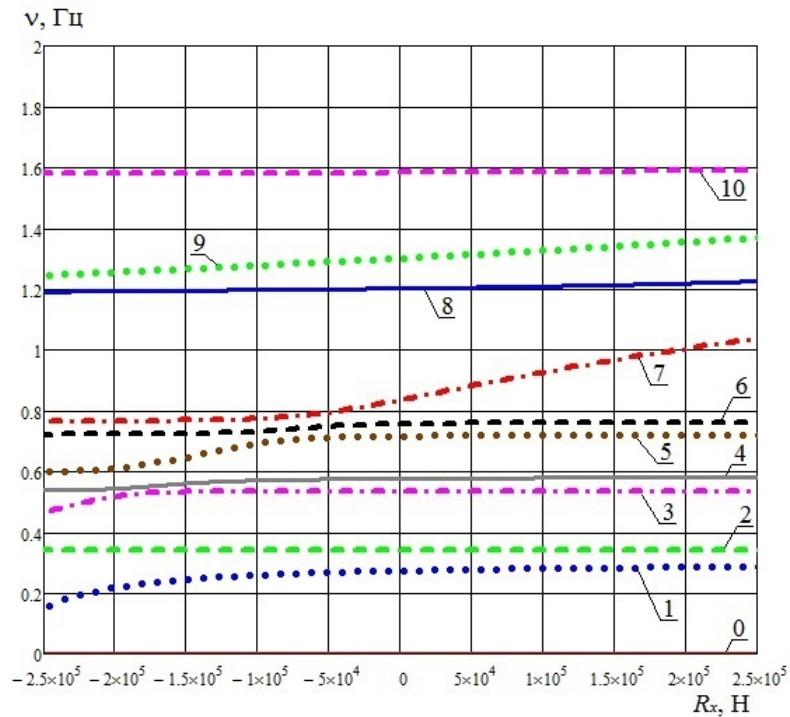


Рис. 3 – Залежність власних частот від поздовжньої сили R_x для засобу з причепом (цифри позначають номер спектральної тракторії).

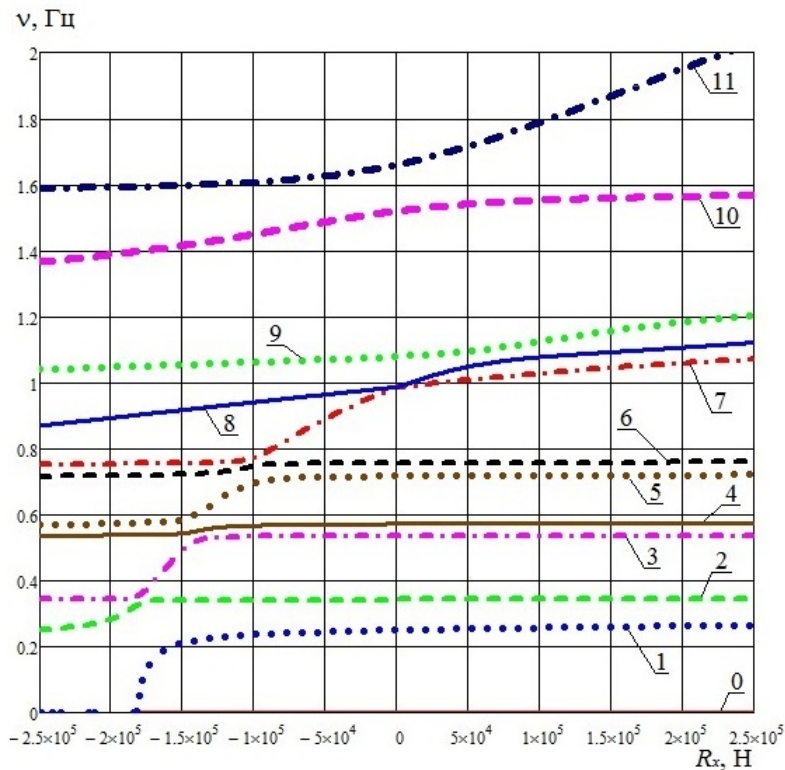


Рис. 4 – Залежність власних частот від поздовжньої сили R_x для засобу з напівприцепом (цифри позначають номер спектральної траєкторії).

Вступ та постановка задачі. До складних механічних систем відносять сукупність об'єктів, однакових чи різних за своїми властивостями, приєднаних один до одного за допомогою деяких механічних зв'язків. При вивченні таких систем важливо враховувати взаємодію їх компонентів, бо вона може призвести до таких специфічних явищ, притаманних лише пов'язаній динаміці, як, наприклад, галопающий резонанс [1], чи синхронізація [2].

У роботі [1] із застосуванням дискретної математичної моделі досліджувалися спектри та власні форми вільних коливань трактора з причепом, який перевозить рідину у цистерні (рис. 1). Коливання рідини (рис. 2) було враховано на основі розробленого у роботі [3] метода, який моделював низькочастотні поверхневі хвилі Релея за допомогою рівнянь для потенціалів відповідних векторних та скалярних полів.

В результаті було складено квазілінійну систему диференціальних рівнянь наступного вигляду:

$$d^2 \vec{X} / dt^2 + (A + kB) \cdot \vec{X} = \vec{0}, \quad (1)$$

де вектор \vec{X} містить $n = 19$ координат; параметр $k \in \mathbb{R}$ є пропорційним силі R_x , що діє вздовж причіпного пристрою; матриці $A[n \times n] \geq 0$; $B[n \times n] \geq 0$ є симетричними, причому $rgA \leq n - 1$; $rgB \ll rgA$.

Блоковий вигляд матриць A і B надано у [1]. З (1) отримаємо алгебраїчне рівняння для резонансних кругових частот ω :

$$\det(A + kB - \omega^2 E) = 0, \quad (2)$$

де $E[n \times n]$ – одинична матриця.

Таким чином, резонансні значення ω^2 належать до спектру матриці $A + kB$. Як відомо, симетрична матриця n -го порядку має дійсний спектр $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, причому, як це витікає з умови поставленої задачі, вона є виродженою, і принаймні одне власне число дорівнює 0. Що забезпечує стійку рівновагу системи за умови зупинки транспортного засобу у довільному місці прямого шляху. Числам $\lambda_j > 0$ відповідають гармонійні коливання з кутовою частотою

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$$

та довільною амплітудою і фазою. Числа $\lambda_j < 0$ виникають за умови суттєво від'ємного значення параметра k , тобто коли транспортний засіб котиться з достатньо крутої гори, і причіп тисне на трактор. При цьому у русі зчіпного пристрою виникає нестійкість та спостерігається загрозливе для усього транспортного засобу явище, яке називають *галопающим резонансом*. Щоб обмежити амплітуду коливань при цьому резонансі, у конструкції причепа використовуються міцні упори.

Розрахунок спектру матриці $A + kB$ та її власних форм проводився у програмному середовищі MathCAD за допомогою стандартних процедур `eigenvals(.)` та `eigenvector(.,.)`. Результати цих розрахунків для низькочастот-

ної частини спектру, які було виконано для двох типів машино – тракторного агрегату (із причепом та із напівпричепом [1]), наведено на графіках рис. 3, 4 та у табл. 1, 2. На рисунках частоти ν резонансних коливань надано у герцах; у таблицях їх наведено у першій строчці, а інші строчки нормовані у сенсі простору l_2 .

Таблиця 1 – Компоненти перших нормованих власних форм коливань для причіп-цистерни

Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ν	0	0.27	0.34	0.54	0.57	0.72	0.76	0.86	1.21	1.32	1.58
y_T	0	0.01	0.02	-0.01	0	0.14	0.01	0.16	0.69	-0.43	0.09
y_1^m	0	0.03	0	0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.2	0	-0.06	-0.04
y_2^m	0	0	0.01	-0.01	0	0.06	0.01	0.07	0.29	-0.18	0.04
y_K	0	0	0.14	-0.01	0	0.97	-0.05	-0.14	-0.13	0.06	-0.01
y_C	0	-0.01	0.99	-0.02	-0.01	-0.15	0	0	0	0	0.02
φ_T	0	0.09	-0.01	0.03	-0.07	-0.12	-0.12	-0.62	-0.21	-0.03	-0.13
φ_K	0	0.01	-0.03	-0.06	-0.04	-0.02	-0.03	-0.16	-0.09	-0.02	0.98
y_{II}	0	0.02	0	0.01	-0.02	-0.02	-0.06	-0.42	0.58	0.57	-0.01
y_3^m	0	0.01	0	0	-0.01	-0.01	-0.02	-0.1	0.14	0.14	0
y_4^m	0	0.01	0	0	-0.01	-0.01	-0.02	-0.1	0.14	0.14	0
φ_{II}	0	-0.11	0	-0.02	0.08	0.03	0.12	0.48	-0.04	0.64	0.1
x_1^p	0.54	-0.83	-0.01	0.05	-0.01	-0.01	-0.03	-0.1	0	-0.05	-0.01
x_2^p	0.14	0.08	0	-0.3	0.93	-0.01	-0.02	-0.1	0	-0.04	0
x_3^p	0.06	0.03	0	-0.03	-0.02	0.03	0.98	-0.19	0	-0.03	0
x_{II}	0.57	0.35	0	-0.13	-0.14	0	-0.04	0.08	0	0.05	-0.01
x_T	0.53	0.34	0	-0.12	-0.14	0	-0.04	0.05	0	0.01	-0.01
x_K	0.17	0.16	0.02	0.93	0.26	0.01	0.02	0.02	0	0	0.07
x_T^m	0.21	0.13	0	-0.05	-0.05	0	-0.02	0.02	0	0	0
x_{II}^m	0.1	0.06	0	-0.02	-0.02	0	-0.01	0.02	0	0.02	0

Таблиця 2 – Компоненти нормованих власних форм коливань для напівпричіп-цистерни

Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ν	0	0.27	0.34	0.54	0.58	0.72	0.76	1.02	1.02	1.35	1.53	1.69
y_T	0	0	-0.02	-0.01	0	0.14	0	-0.42	0.28	-0.06	0.56	-0.5
y_1^m	0	0	0	0.01	0	-0.02	0	0.18	-0.11	-0.01	0.14	-0.28
y_2^m	0	0	-0.01	-0.01	0	0.06	0	-0.18	0.12	-0.03	0.23	-0.2
y_K	0	0	-0.14	-0.01	0	0.97	0	0.15	-0.1	0.01	-0.06	0.04
y_C	0	0	-0.99	-0.02	0	-0.15	0	0	0	0	0.02	0.01
φ_T	0	0	0.02	0.03	0.01	-0.1	0	0.63	-0.4	-0.01	0.18	-0.52
φ_K	0	0	0.03	-0.07	-0.02	-0.02	0	0.2	-0.13	-0.01	0.76	0.6
y_{II}	0	-0.03	0	0	0.03	0	0.03	0.47	0.7	-0.43	-0.03	0.02
y_3^m	0	-0.01	0	0	0.01	0	0.01	0.12	0.17	-0.1	-0.01	0.01
y_4^m	0	-0.01	0	0	0.01	0	0.01	0.11	0.17	-0.11	-0.01	0.01
φ_{II}	0	-0.11	0	0	0.08	0	0.07	0.22	0.38	0.88	0.04	-0.03
x_1^p	0.54	-0.83	0	0.04	-0.01	0	-0.01	-0.03	-0.06	-0.07	0	0
x_2^p	0.14	0.08	0	-0.26	0.95	0	-0.01	-0.03	-0.05	-0.05	0	0
x_3^p	0.06	0.03	0	-0.03	-0.02	0	0.99	-0.03	-0.05	-0.04	0	0
x_{II}	0.57	0.36	0	-0.13	-0.14	0	-0.05	0.03	0.05	0.07	-0.01	-0.01
x_T	0.53	0.34	0	-0.12	-0.13	0	-0.05	0.01	0.02	0.01	-0.01	-0.01
x_K	0.17	0.15	-0.02	0.94	0.22	0.01	0.02	-0.01	0	0	0.05	0.05
x_T^m	0.21	0.13	0	-0.05	-0.05	0	-0.02	0.01	0.01	0	0	0
x_{II}^m	0.1	0.06	0	-0.02	-0.02	0	-0.01	0.01	0.01	0.02	0	0

У статті [1] для динамічних параметрів використано наступні позначення: $y_T, y_{II}, y_K, y_C, y_{1,\dots,4}^M$ – це вертикальні зміщення центрів ваги трактора, кабіни, сидіння, причепа та мостів; $\varphi_T, \varphi_{II}, \varphi_K$ – кути повороту трактора, причепа та кабіни; $x_T, x_{II}, x_K, x_{1,\dots,3}^P$ – горизонтальні зміщення центрів мас трактора, причепа, кабіни та трьох шарів рідини поблизу її вільної поверхні; x_T^u, x_{II}^u – горизонтальні зміщення точок контакту дороги із шинами трактора або причепа. У стовбцях табл. 1, 2 вказані відносні амплітуди вільних гармонійних коливань із зазначеною частотою; причому якщо амплітуда є від’ємною, то відповідний параметр коливається у протифазі до руху, який є визначальним для цієї форми.

Зауважимо, що при русі транспортного засобу значення R_x постійно та неперервно змінюється, а чинники, які збуджують коливання внаслідок нерівностей шляху, через зміни у швидкості руху можуть мати довільну частоту. І тому усі точки, які наведено на рис. 3, 4, можуть призвести до резонансних явищ. У механіці такий резонанс називають *зовнішнім*. Крім нього вивчають й так звані *внутрішні резонанси*, коли співпадають дві або більше власних частот. Уважне вивчення графіків показало, що на них такі резонанси не спостерігаються.

Замість цього спостерігаємо явище, яке можна трактувати як *відштовхування частот* одне від одного в разі їх наближення. Зауважимо, що один із авторів цієї статті спостерігав аналогічне відштовхування, коли у [4] вивчав вплив крайових умов на спектр власних коливань циліндричної пружини. Проте та задача була складніша і розв’язувалася за допомогою теорії лінійних диференціальних операторів, які описували пружний континуум. В нашому випадку йдеться про задачу лінійної алгебри, і зазначена властивість формулюється у вигляді наступної теореми.

Теорема 1 (про збереження простого спектру).

Припустимо, що матриці $A[n \times n]$, $B[n \times n]$ не мають спільних власних векторів, а спектр матриці A простий. Тоді спектральні траєкторії $\lambda_j(k)$, $j = 1, \dots, n$ матричного пучка $A + kB$, $k \in \mathbb{R}$ перетинаються тільки у випадку спеціального вибору елементів a_{ij}, b_{ij} матриць A і B .

Оскільки у відомій літературі [5 – 10], де викладається теорія матриць, такого твердження немає, ми були вимушені у тексті цієї статті надати своє доведення цього нетривіального результату. На рис. 4 можна спостерігати каскад потенційних зіткнень спектральних траєкторій, які, у наслідок дії теореми 1, так і не відбулися.

Зауважимо, що коли у системі диференціальних рівнянь спостерігається зовнішній та внутрішній резонанс одночасно, то амплітуда коливань зростає додатково. Тут співпадіння трьох частот немає, проте на окремих ділянках спектральні траєкторії суттєво наближуються, і це все рівно призводить до додаткового зростання коливань.

Щоб систематизувати дослідження цього явища, ми ввели наступні визначення. Будемо пару чисел $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$ називати *наближено кратним спектром*, якщо відстань між траєкторіями $\lambda_{j,1}(k)$ і $\lambda_{j,2}(k)$ є мінімальною за значеннями параметра k . При цьому значення параметра k_0 називатимемо *резонансним*, а власні форми $\bar{X}_{j,1}(k), \bar{X}_{j,2}(k)$ назвемо *резонуючою парою*.

Наступна теорема, яка не потребує формального доведення, фіксує особливість зміни власних форм у цьому випадку.

Теорема 2 (про спільне обертання резонуючої пари власних форм).

В околі резонансного значення k_0 резонуюча пара власних ортонормованих форм $\bar{X}_{j,1}(k), \bar{X}_{j,2}(k)$ спільно обертається у багатовимірному просторі та при значеннях $k = k_0 - \Delta k$ і $k = k_0 + \Delta k$, де значення Δk є малим числом, ці форми фактично обмінюються координатами, тобто

$$\bar{X}_{j,1}(k_0 - \Delta k) \approx \pm \bar{X}_{j,2}(k_0 + \Delta k), \quad \bar{X}_{j,2}(k_0 - \Delta k) \approx \pm \bar{X}_{j,1}(k_0 + \Delta k),$$

де вибір знаку в правих частинах не є принциповим і залежить від налаштування програми пошуку власних векторів матриці.

Для матриць, які вивчалися у [1], більшість власних векторів були наближені до однокомпонентної форми (яка, як відомо, відповідає діагональній матриці). В результаті чого вимушені коливання, які збуджувалися по деякій координаті, залишалися локалізованими і суттєвого зв’язку між різними рухами вузлів транспортного засобу не спостерігалось. Проте, ця закономірність порушувалася в околі резонансного значення k_0 , де власні форми мали найбільшу кількість координат, значення яких суттєво відрізнялися від нуля (табл. 1, 2). Тому при динамічному аналізі зв’язаних коливань, насамперед, необхідно вивчати поведінку системи при всіх резонансних значеннях параметра k .

До сказаного необхідно додати наступне. Якщо у задачі, що розглядається, крім зусилля R_x змінювати й рівень H рідини у цистерні, то задача на власні значення зводиться до пошуку спектра двопараметричного пучка вигляду

$$A(H) + kB, \quad k \in \mathbb{R}, \quad H \in [0, D_u],$$

де D_y – це діаметр цистерни.

Формули, які описують нелінійні залежності елементів матриці A від рівня H , а також графіки відповідних спектральних траєкторій наведено у [1]. В цьому випадку при зміні параметра H спостерігаються перетини траєкторій, і точки наближено кратного спектру перетворюються у точки кратного спектру. У цьому ж контексті діє тертя, яке згладжує резонанси та зближує результати розрахунку кратного та наближено кратного спектрів.

Застосування розробленого в [1] методу динамічного аналізу виявило ще одну особливість поведінки власних частот. А саме, аналіз наведених графіків вказує на монотонну залежність спектру від значень параметра k . Якщо зважити на невід’ємність матриці B , така поведінка спектру не є дивною. Проте, оскільки в цитованій та іншій відомій літературі ми так і не знайшли обґрунтування цієї властивості, то були вимушені сформулювати та довести наступну теорему.

Теорема 3 (про монотонність спектру).

Нехай матриці A і B , що утворюють матричний пучок $A+kB, k \in \mathbb{R}$, є симетричними, причому матриця B є невід’ємною, а функції $\lambda_j(k), j=1, \dots, n$ описують спектральні траєкторії цього пучка. Тоді кожна функція $\lambda_j(k)$ є монотонно зростаючою (або неспадною) за аргументом $k \in \mathbb{R}$.

Таким чином, задачею цієї публікації є доведення теорем 1 та 3.

Доведення теореми 1 (про збереження простого спектру). Матриця B у своєму власному базисі має діагональну структуру D , а матриця A приймає недіагональний симетричний вид \hat{A} . У подальшому доведенні ми не використовуватимемо тильду у позначенні цієї матриці.

Припустимо, що для деякого значення параметру $k = k_0$ матриця $A + k_0D$ має кратне власне значення λ_0 .

Тоді у матриці

$$C = A + k_0D - \lambda_0E, \quad (1)$$

ранг не перевищує числа $n-2$.

Відмітимо, що матриця C відмінна від матриці A тільки у елементах головної діагоналі. Позначимо ці елементи x_1, x_2, \dots, x_n , тобто

$$x_1 = c_{11}, x_2 = c_{22}, \dots, x_n = c_{nn}.$$

Для мінорів вказаних елементів використовуватимемо позначення

$$C_{11}, C_{22}, \dots, C_{nn}.$$

Значимо, що через ущербність рангу зазначені визначники дорівнюють нулю.

Отримаємо систему n рівнянь для n невідомих x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\{C_{11}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; C_{22}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, C_{nn}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (2)$$

Кожне із рівнянь системи (2) при довільному виборі недіагональних елементів є незалежним від інших. У просторі \mathbb{R}^n воно описує циліндричну поверхню, яка по сукупності змінних має $n-1$ порядок, та зменшує кількість вільних параметрів на 1 одиницю. Тобто, розв’язкам системи (2) відповідатиме скінченне число $m \geq 0$ точок у просторі \mathbb{R}^n .

Так, для випадку $n=2$ для недіагональної матриці отримаємо значення $m=0$, і ця задача розв’язків не має зовсім, а для випадку $n=3$ при ненульових недіагональних елементах a, b, c матриця C може приймати лише два значення:

$$C = \begin{bmatrix} (ac)/b & a & c \\ a & (ab)/c & b \\ c & b & (bc)/a \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad C = \begin{bmatrix} -(ac)/b & a & c \\ a & -(ab)/c & b \\ c & b & -(bc)/a \end{bmatrix},$$

тобто тут $m=2$.

Отже, нам вдалося за елементами матриці A , що лежать поза її головною діагоналлю, знайти лише m матриць C , тобто матриці C_1, C_2, \dots, C_m . Відповідні до них діагональні матриці позначимо D_1, D_2, \dots, D_m ; причому зауважимо, що матриці D_j залежать від недіагональних елементів матриці A .

З (1) витікає, що діагональ D_A матриці A задовольняє умові:

$$D_A = D_j - k_0D + \lambda_0E, \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

В правій частині (3) використовуються дві константи k_0, λ_0 , значеннями яких можна розпоряджатися довільно. Отже, за умови $n \geq 3$ рівняння (3) можна виконати лише за рахунок узгодженого вибору елементів матриць A і D , що і потрібно було довести.

У випадку $n=1$ наявна тільки одна спектральна траєкторія, а значить задача о перетині не є актуальною.

Випадок $n=2$ ми розглянемо окремо. Характеристичне рівняння матричного пучка тут має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + kd_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} + kd_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

звідки отримуємо квадратне рівняння:

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + k(d_{11} + d_{22})) + [(a_{11} + kd_{11}) \cdot (a_{22} + kd_{22}) - a_{21}^2] = 0.$$

У випадку кратного спектру

$$\{(a_{11} + kd_{11}) + (a_{22} + kd_{22}) = 0, (a_{11} + kd_{11}) \cdot (a_{22} + kd_{22}) = a_{21}^2\}.$$

Позначимо $y_1 = a_{11} + kd_{11}$, $y_2 = a_{22} + kd_{22}$ та отримаємо систему:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 0; \\ y_1 \cdot y_2 = a_{21}^2, \end{cases}$$

звідки $y_1^2 = -a_{21}^2$. Що можливо лише за умови $a_{21} = 0$, тобто коли матриця A є діагональною, а значить має спільну власну базу з матрицею B . Отримане протиріччя завершує доведення теореми.

Зауваження. Якщо матриця A є діагональною, то система (2) має нескінченну множину розв'язків:

$$x_j = 0, \text{ для } j \neq l, \quad x_l \in \mathbb{R}.$$

Цей випадок за умов теореми не вивчається.

Зазначене вище справедливо і для випадку кусково-діагональної матриці A , оскільки вона має спільні з матрицею B власні вектори, локалізовані всередині діагонального блоку.

Доведення теореми 3 (про монотонність спектру). Аналогічно доведенню теореми 1, у власному базисі матриці B пучок набуває вигляду:

$$A + kD, \quad (4)$$

де D – діагональна матриця, $d_{jj} \geq 0$.

Запишемо характеристичне рівняння пучка (4):

$$\det(A + kD - \lambda E) = 0. \quad (5)$$

Нехай рівняння (5) виконано для деяких $k = k_0$, $\lambda = \lambda_0$, тобто власне значення λ_0 відповідає значенню параметра k_0 і $\det(A + k_0D - \lambda_0E) = 0$. Підставимо в (5) $k = k_0 + \Delta k$, $\lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$ і обчислимо визначник у лівій частині (5), лишаючи доданки першого порядку малості за Δk і $\Delta \lambda$. Як результат перетворень, отримаємо:

$$\sum_{j=1}^n (\Delta k d_{jj} C_{jj} - \Delta \lambda C_{jj}) = 0, \quad (6)$$

де C_{jj} – мінори елемента c_{jj} матриці $C = A + k_0D - \lambda_0E$. Наслідком (6) є наступне рівняння:

$$\frac{\Delta \lambda}{\Delta k} = \frac{\sum_{j=1}^n d_{jj} C_{jj}(\lambda_0)}{\sum_{j=1}^n C_{jj}(\lambda_0)}. \quad (7)$$

Доведемо, що права частина (7) у точках спектру матриці C : $\lambda_0 \in \sigma(C)$, є додатною (принаймні, невід'ємною).

Нехай $\lambda_0 = \min \sigma(C)$. Тоді $C \geq 0$, і всі мінори цієї матриці є додатними. Зокрема, $C_{jj}(\lambda_0) \geq 0$, що доводить твердження.

Нехай $\lambda_0 = \max \sigma(C)$. Розглянемо матрицю

$$-C = \lambda_0 E - A - k_0 D.$$

Матриця $-C \geq 0$ і всі її мінори є додатними. Усі мінори елементів матриці $-C$ або співпадають із мінорами відповідних елементів матриці C , або відрізняються від них лише за знаком. Тому формула (7) зберігає свій вигляд для матриці $-C$ і її права частина є додатною, що завершує доказ нашого твердження у цьому випадку.

Таким чином для випадку розмірності матриць $n = 2$ ми довели *теорему 3*. Припустимо, розмірність матриць, що утворюють пучок, $n \geq 3$. Тоді існує власне значення λ_0 : $\min \sigma(C) \leq \lambda_0 \leq \max \sigma(C)$, і матриця C є невизначеною у сенсі квадратичних форм. Доведення *теореми 3* у цьому випадку базується на наступній нетривіальній лемі.

Лема (про знаки кутових мінорів). Нехай матриця A є симетричною і число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ належить її спектру $\sigma(A)$. Тоді матриця $C = A - \lambda_0 E$ є виродженою і всі її мінори $C_{jj}(\lambda_0)$ мають один знак (або дорівнюють нулю, але це окремий випадок, оскільки є характерним для діагональних матриць).

Доведення лемми для випадку $n = 3$. У цьому випадку проведемо пряме доведення, яке не спирається на складні теореми інших авторів. Задля зручності запису, позначимо елементи матриці $C = A - \lambda_0 E$ наступним чином:

$$C = \begin{pmatrix} x & a & c \\ a & y & b \\ c & b & z \end{pmatrix}.$$

Матриця C є виродженою, тобто

$$\det C = xyz - b^2x - c^2y - a^2z + 2abc = 0. \quad (8)$$

Обчислимо мінори матриці C :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} y & b \\ b & z \end{vmatrix} = yz - b^2, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} x & a \\ a & y \end{vmatrix} = xy - a^2.$$

Доведемо, що $C_{11} \cdot C_{33} \geq 0$, тобто

$$(xy - a^2)(yz - b^2) \geq 0. \quad (9)$$

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що

$$(xy - a^2)(yz - b^2) < 0. \quad (10)$$

Тоді, за неперервності, умова (10) виконуватиметься при $x, z \neq 0$, а рівність (8) можна зберегти за рахунок корегування c . Тому, не обмежуючи спільності міркувань, вважатимемо, що $x, z \neq 0$, і, задля визначеності,

$$\frac{a^2}{x} \leq \frac{b^2}{z}.$$

а) нехай $x > 0, z > 0$. Тоді значення y , що задовольняє (10), лежить у проміжку

$$\frac{a^2}{x} < y < \frac{b^2}{z}, \quad (11)$$

тобто

$$y = \frac{a^2}{x} \cdot \theta + \frac{b^2}{z} \cdot (1 - \theta), \text{ де } \theta \in (0; 1).$$

Підставляючи такий вираз для y в співвідношення (8) і спрощуючи отримане рівняння, находимо:

$$\begin{aligned} & (xz - c^2) \left(\frac{a^2}{x} \theta + \frac{b^2}{z} (1 - \theta) \right) - b^2x - a^2z + 2abc = \\ & = (xz - c^2) \left(\frac{a^2}{x} \theta + \frac{b^2}{z} (1 - \theta) \right) - b^2x [\theta + (1 - \theta)] - a^2z [\theta + (1 - \theta)] + 2abc [\theta + (1 - \theta)] = \\ & = \left\{ (xz - c^2) \frac{a^2}{x} - b^2x - a^2z + 2abc \right\} \cdot \theta + \left\{ (xz - c^2) \frac{b^2}{z} - b^2x - a^2z + 2abc \right\} \cdot (1 - \theta) = \\ & = -\frac{1}{x} \{ a^2c^2 - 2abcx + b^2x^2 \} \cdot \theta - \frac{1}{z} \{ b^2c^2 - 2abcz + a^2z^2 \} \cdot (1 - \theta) = -\frac{(ac - bx)^2}{x} \cdot \theta - \frac{(bc - az)^2}{z} \cdot (1 - \theta). \end{aligned}$$

Останній вираз дорівнює нулю, якщо $\{ac - bx = 0, bc - az = 0\}$, тобто $\{x = ac/b, z = bc/a\}$.

Але у цьому випадку

$$\frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{ac/b} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{b^2}{z} = \frac{b^2}{bc/a} = \frac{ab}{c},$$

і, приймаючи до уваги (11), проміжок для y вироджується в одну точку, а ліва частина (10) дорівнює нулю.

Таким чином, випадок **а)** призводить до протиріччя.

б) випадок $x < 0, z < 0$ зводиться до попереднього після переходу до матриці $-C$.

в) у випадку $x < 0, z > 0$ маємо наступну нерівність для y :

$$\left[(-x)y + a^2 \right] \cdot \left[yz - b^2 \right] > 0, \text{ що можливо, якщо } y < \frac{a^2}{x} \text{ або } y > \frac{b^2}{z}.$$

Очевидно, що

$$\frac{a^2}{x} < 0 < \frac{b^2}{z} \text{ і } y = \frac{a^2}{x} \cdot \theta + \frac{b^2}{z} \cdot (1 - \theta), \text{ де } \theta \notin (0; 1).$$

Повторюючи викладки доведення пункту **а**), отримуємо рівність: $-\frac{(ac-bx)^2}{x} \cdot \theta - \frac{(bc-az)^2}{z} \cdot (1-\theta) = 0$, звідки

$$\theta \cdot \left[\frac{(cb-az)^2}{z} + \frac{(ca+(-x))^2}{(-x)} \right] = \frac{(cb-az)^2}{z}. \quad (12)$$

Із рівності (12) маємо умову $\theta \in (0;1)$, тобто і в цьому випадку ми прийшли до протиріччя.

г) випадок $x > 0, z < 0$ зводиться до попереднього заміною матриці C на протилежну їй матрицю $-C$.

Таким чином, для випадку розмірності матриці $n = 3$ лему доведено.

Відзначимо, що із леми впливає чергування знаку мінору $C_{jj}(\lambda_k)$ на послідовних власних значеннях

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Доведення леми у загальному випадку. Непряме доведення базується на **твердженні 231** про спектр *проєктора* [9, стор. 189], яке є не менш нетривіальним, ніж сама лема. З твердження витікає, що власні значення матриці $C = A - \lambda_0 E$ і її мінорів $C_{jj}(\lambda_0)$ перемежуються для будь-якого $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\lambda_1^C \geq \lambda_1^{C_{jj}} \geq \lambda_2^C \geq \lambda_2^{C_{jj}} \geq \dots \geq \lambda_{n-1}^C \geq \lambda_n^C,$$

де $\lambda_k^C, k = 1, 2, \dots, n, \lambda_k^{C_{jj}}, k = 1, 2, \dots, (n-1)$ – це власні значення C і $C_{jj}(\lambda_0)$, відповідно.

Матриця C є виродженою, отже принаймні одне з її власних значень дорівнює нулю. Нехай $\lambda_s^C = 0$, а, значить, маємо для будь-якого мінору $C_{jj}(\lambda_0)$:

$$\lambda_1^C \geq \lambda_1^{C_{jj}} \geq \lambda_2^C \geq \lambda_2^{C_{jj}} \geq \dots \geq \lambda_{s-1}^C \geq 0 \geq \lambda_s^C \geq \dots \geq \lambda_{n-1}^C \geq \lambda_n^C,$$

тобто кількість додатних та від'ємних власних значень однакове для будь-якого $C_{jj}(\lambda_0)$. Оскільки кожен міноур дорівнює добутку своїх власних значень, то всі мінори $C_{jj}(\lambda_0)$ матриці C мають один знак.

Таким чином, лему, а разом з нею і теорему 3, доведено.

Зауважимо, що із доведення леми витікає наступне твердження.

Теорема 4 (про чергування знаків кутового мінору характеристичної матриці).

Знаки кутового мінору матриці $C = A - \lambda_0 E$, де λ_0 послідовно приймає значення $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, а λ_k – це власні значення симетричної матриці A , чергуються.

Тобто, якщо об'єднати твердження **леми** та **теорему 4**, то прийдемо до наступного. При числі λ_j всі кутові мінори деякого порядку у матриці C є від'ємними або позитивними одночасно, а при переході до числа λ_{j+1} всі вони змінюють знак на протилежний.

Зауважимо, що тих властивостей симетричних матриць, які було встановлено у цій статті, бракувало не лише для вирішення проблеми визначення власних значень ермітових операторів у скінченновимірному просторі, але й для більшого розуміння матеріалу під час викладання теорії симетричних матриць як ускладнених аналогів дійсних чисел. Тому ми звертаємося до наших колег – математиків, які у цей час готують нові учбові посібники або монографії з лінійної алгебри, із пропозицією включити ці теореми до складу так званої *обов'язкової програми курсу* (під назвою **теорема** або **леми Олени Набоки**, яка їх сформулювала та довела).

Щодо внеску інших авторів статті. *А. П. Кожушко* розробив математичну модель роботи транспортного засобу і, за її допомогою, виявив важливі властивості спектру та власних форм матриці коливань, які стали предметом цього дослідження і підґрунтям для **теорем 1 – 3**, а саме:

- монотонну залежність спектральних траєкторій від значення зусилля R_x у зчпному засобі;
- ефект відштовхування спектральних траєкторій, який приводить до відсутності кратних резонансів;
- ефект обміну координат у власних формах при проходженні зони наближеного резонансу.

Тому у застосуваннях відповідної теорії до техніки та технологій бажано використовувати назву **спектральні ефекти** (або **спектральні явища**) *Андрія Кожушка*.

Проф. О. Л. Григор'єв знайшов зв'язок цієї теми із відомими задачами теорії коливань для складних механічних систем, які розв'язував раніше, а також забезпечив плідну комунікацію між співавторами та єдність використаної термінології.

Висновки. Показано, що динамічний аналіз транспортного засобу із причепом чи напівпричепом приводить до задачі на власні значення для однопараметричного пучка симетричних матриць.

За додаткового припущення невід'ємності матричного коефіцієнту пучка доведена монотонна залежність спектру від параметра.

Доведено, що при довільному виборі матричних коефіцієнтів будь які зміни параметру пучка не призводять до появи кратного спектру.

При динамічному аналізі транспортного засобу виявлено явище *відштовхування спектральних траєкторій* матричного пучка та вивчено особливості обертання власних форм в околі точок відштовхування.

Доведено нові теореми про розподіл знаків у кутових мінорах симетричної матриці.

Список літератури

1. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Моделювання пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни з рідиною на прямому шляху зі складним рельєфом // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 27 (1303). – С. 34 – 61.
2. Набока О. О. Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 1. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – № 18 (1127). – С. 98 – 108.
3. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Математичне моделювання вільних і вимушених коливань рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 41 – 51.
4. Григор'єв А. Л., Дерієнко А. І. Алгебраический метод последовательной локализации и расчёта частот свободных колебаний винтового цилиндрического стержня // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 39 (1082). – С. 45 – 70.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1967. – 575 с.
6. Ланкастер П. Теория матриц. – М. : Наука, 1978. – 280 с.
7. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М. : Наука, 1979. – 392 с.
8. Воеводин В. В. Линейная алгебра. – М. : Наука, 1980. – 400 с.
9. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. – М. : Наука, 1969. – 477 с.
10. Геворкян Ю. Л., Григор'єв А. Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике : учебник. – Харьков : НТУ «ХПІ», 2002. – 542 с.

References (transliterated)

1. Kozhushko A. P., Grigiriev A. L. Modelyuvannya pov'yazanykh kolyvan' kolisnoho traktora ta tsysterny z ridynoyu na pryamomu shlyakhу zi skladnym rel'yefom [Modeling of coupled oscillations of wheeled tractors and tanks with liquid on a straight road with difficult terrain]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 27 (1303), pp. 34–61.
2. Naboka O. O. Sinkhronizatsiya kolebaniy dvukh svyazanykh plastin Bergera s nelineynym vnutrennim i granichnym dempfirovaniyem. Chast' 1 [On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior and boundary damping. Part 1]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2015, no. 18 (1127), pp. 98–108.
3. Kozhushko A. P., Grigiriev A. L. Matematychnе modelyuvannya vil'nykh i vymushenykh kolyvan' ridyny v horyzontal'niy yemnosti z vil'noyu poverkhneyu [Mathematical modelling of low-frequency oscillations of viscous fluid in horizontal container with free surface]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1279), pp. 41–51.
4. Grigiriev A. L., Derienko A. I. Algebraicheskiy metod posledovatel'noy lokalizatsii i raschota chastot svobodnykh kolebaniy vintovogo tsilindricheskogo stержnya [Algebraic methods for consequential localizing and computing screwed cylinder shaft free oscillations frequencies]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2014, no. 39 (1082), pp. 45–70.
5. Gantmake F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka, 1967. 575 p.
6. Lancaster P. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka, 1978. 280 p.
7. Golovina L. I. *Lineynaya algebra i nekotoryye yeye prilozheniya* [Linear algebra and some of its applications]. Moscow, Nauka, 1979. 392 p.
8. Voevodin V. V. *Lineynaya algebra* [Linear algebra]. Moscow, Nauka, 1980. 400 p.
9. Glazman I. M., Lyubich Yu. I. *Konechnomernyy lineynyy analiz* [Finite dimensional linear analysis]. Moscow, Nauka, 1969. 477p.
10. Gevorkyan Yu. L., Grigiriev A. L. *Osnovy lineynoy algebrы i yeye prilozheniy v tekhnike : uchebnik* [Fundamentals of linear algebra and its technical applications : textbook]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2002. 542 p.

Надійшла (received) 16.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович (Кожушко Андрей Павлович, Kozhushko Andriy Pavlovych) – кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Набока Олена Олексіївна (Набока Елена Алексеевна, Naboka Olena Oleksiyivna) – кандидат фізико-математичних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: lena622651@gmail.com.

Григор'єв Олександр Львович (Григор'єв Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.