ISSN 2222-0631 (print)

УДК 519.6

О. П. НЕЧУЙВІТЕР, О. С. ЧОРНА, К. В. ДАРАГАН, О. В. ПІДЛІСНИЙ, С. О. ЧОРНИЙ

НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ЗАДАЧАХ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Розглядається питання наближеного обчислення інтегралів від функцій двох змінних у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях, її значеннями в точках. Кубатурні формули будуються з використанням оператора інтерлінації з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Отримано оцінки похибки наближення кубатурних формул. Наведено чисельний експеримент, який підтверджує теоретичні результати дослідження.

Ключові слова: інтеграли від функцій двох змінних, кубатурні формули, інтерлінація функцій.

О. П. НЕЧУЙВИТЕР, Е. С. ЧЕРНАЯ, К. В. ДАРАГАН, А. В. ПОДЛЕСНЫЙ, С. А. ЧЕРНЫЙ

НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЗАДАЧАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Работа посвящена применению новых информационных операторов для построения кубатурных формул приближенного вычисления интегралов функций двух переменных. В статье рассматриваются кубатурные формулы вычисления двойных интегралов с использованием интерлинации в случае, когда информация о функции задана ее следами на линиях, значениями функции в точках. Получена оценка погрешности приближения кубатурных формул на классе дифференцированных функций.

Ключевые слова: интегралы функций двух переменных, кубатурные формулы, интерлинация функций.

O. P. NECHUIVITER, O. S. CHORNA, K. V. DARAHAN, O. V. PIDLISNYI, S. O. CHORNYI

NEW INFORMATIONAL OPERATORS IN PROBLEMS OF NUMERICAL INTEGRATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

The thesis is dedicated to applying of new information operators for constructing cubature formulas of approximate calculation of integrals of functions of two variables. The feature of the proposed cubature formulas is using the input information about function as a set of traces of function on lines, a set of values of the function at points. The theory of interlineations of functions is the most effective in this case. The estimate for error of cubature formulas of approximate calculation of the integrals of functions of two variables was derived in case when the information about the function is its traces on perpendicular lines, a set of values of the function at some points. Cubature formula is constructed using the interlineation operator. A computational experiment confirming the validity of the theorem about the computational error is given.

Key words: integrals of functions of two variables, cubature formula, interlineation of functions.

Вступ. Питанню чисельного інтегрування функцій декількох змінних присвячено багато досліджень. До найбільш відомих класичних методів можна віднести *метод центральних прямокутників*, *метод трапецій*, *формулу Сімпсона* та *формулу Гаусса*. Якщо проводити класифікацію цих досліджень в багатовимірному випадку за типом задання інформації, то при побудові кубатурних формул наближеного обчислення подвійних інтегралів інформація про функцію задавалась значеннями в точках. Чисельне інтегрування при різних інформаційних операторах розглядалося для швидкоосцилюючих функцій двох змінних. У випадку, коли інформація про функцію задавалась її слідами на лініях, її значеннями в точках, були побудовані кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням інтерлінації функцій. Однак для подвійних інтегралів такі методи детально не були розглянуті.

Аналіз останніх досліджень. На даний час дуже багато досліджень в чисельних методах присвячено використанню нових інформаційних операторів. Зокрема, в роботах [1 – 6] викладена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням операторів інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємно перпендикулярних лініях та значеннями функції в точках. Для наближеного обчислення інтегралів від функцій, зокрема і від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних, в [7, 8] викладений алгоритм побудови та досліджена якість кубатурної формули, яка в своїй побудові використовує сліди функції на оптимально вибраних лініях. В роботах [9 – 15] висвітлена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням операторів інтерфлетації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємно перпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції в точках. В [16] доведена оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерфлетації та оптимальним вибором взаємно перпендикулярних площин. Нові інформаційні оператори (*інтерлінанти* та *інтерфлетанти*) можуть також бути використані при чисельному інтегруванні функцій двох та трьох змінних. Так при досліджені питання наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних загального виду у випадку різних інформаційних операторів першим кроком були роботи [17], [18], де досліджувались тригонометричні інтеграли від функцій двох та трьох змінних. Інформація про функцію задавалася відповідно її слідами на лініях та площинах; при побудові кубатурних формул використовувалися оператори кусково-сталої інтерлінації та кусково-сталої інтерфлетації. Питання ж наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів з використанням операторів інтерлінації та інтерфлетації не досліджувалось.

Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$I_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy \,, \tag{1}$$

побудувати та дослідити *кубатурні формули* з використанням *операторів кусково-сталої сплайн-інтерлінації*. Інформація про функцію $f(x,y)$ задається її слідами на лініях (рис. 1) та її значеннями в точках. На класі диференційовних функцій отримати оцінки похибок наближення кубатурних формул.

Кубатурні формули обчислення інтегралу від функції двох змінних на основі кусково-сталої сплайн-інтерлінації.

Означення. Під слідом функції $f(x,y)$ на лініях

$$x_k = k\Delta - \Delta/2\,,\ \ y_j = j\Delta - \Delta/2\,,\ \ k,\, j = \overline{1,\ell}\,,\ \ \Delta = 1/\ell$$

розуміємо відповідно функції однієї змінної:

$$f(x_k, y),\ \ 0 \le y \le 1;\ \ f(x, y_j),\ \ 0 \le x \le 1.$$

а *б*

Рис. 1 – Сліди функції $f(x,y)$: *а* – $f(x_k, y),\ 0 \le y \le 1$; *б* – $f(x, y_j),\ 0 \le x \le 1$.

Введемо позначення:

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k, \\ 0, x \notin X_k, \end{cases} \ \ k = \overline{1,\ell}; \qquad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases} \ \ j = \overline{1,\ell};$$

$$X_k = \left[x_{k-1/2}, x_{k+1/2}\right],\ Y_j = \left[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}\right];$$

$$x_k = k\Delta - \Delta/2\,,\ \ y_j = j\Delta - \Delta/2\,,\ \ k,\, j = \overline{1,\ell}\,,\ \Delta = 1/\ell\,.$$

Розглянемо оператор-інтерлінант:

$$Jf\left(x,y\right) = \sum_{k=1}^{\ell} f\left(x_k, y\right) h_{0k}\left(x\right) + \sum_{j=1}^{\ell} f\left(x, y_j\right) H_{0j}\left(y\right) - \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f\left(x_k, y_j\right) h_{0k}\left(x\right) H_{0j}\left(y\right).$$

Для обчислення інтегралу (1) пропонується формула

$$\Phi_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x,y)dxdy\,. \tag{2}$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерлінанта $Jf(x,y)$ та отримаємо явний вигляд відповідних кубатурних формул:

$$\Phi_1^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_0^1 f(x_k, y)dy + \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j)dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy - \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy.$$

Розглянемо $H_1^{2,1}\left(M, \widetilde{M}\right)$ – клас дійсних функцій, визначених на $G = [0,1]^2$ і таких, що частинні похідні по змінній x та y обмежені, тобто $\left|f^{(1,0)}(x,y)\right| \le M$, $\left|f^{(0,1)}(x,y)\right| \le M$, $\left|f^{(1,1)}(x,y)\right| \le \widetilde{M}$.

Теорема 1. *Нехай* $f(x,y) \in H_1^{2,r}\left(M, \widetilde{M}\right)$ *та функція задана* $N = 2\ell$ *слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих* $f\left(x_k, y\right)$, $k = \overline{1,\ell}$, $f\left(x, y_j\right)$, $j = \overline{1,\ell}$ *в області* $G = [0,1]^2$. *Для кубатурної формули* Φ_1^2 *справедлива наступна оцінка*:

$$\rho\left(I_1^2,\Phi_1^2\right)=\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-Jf(x,y)\right)dxdy\right|\le\frac{\widetilde{M}}{16\ell^2}=\frac{\widetilde{M}}{4N^2}.$$

Доведення. Використавши представлення залишку

$$f(x,y)-Jf(x,y)=\int_{x_k}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

наближення $f(x,y)$ оператором інтерлінантом через $f^{(1,1)}(x,y)$, маємо

$$\rho\left(I_1^2,\Phi_1^2\right)=\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-Jf(x,y)\right)dxdy\right|\le\left|\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\left[f(x,y)-Jf\left(x,y\right)\right]dxdy\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\left|\int_{x_k}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right|dxdy\le$$

$$\le\widetilde{M}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|x-x_k\right|dx\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\left|y-y_j\right|dy=\widetilde{M}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\left(-\frac{\left(x-x_k\right)^2}{2}\Bigg|_{x_{k-\frac12}}^{x_k}+\frac{\left(x-x_k\right)^2}{2}\Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac12}}\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{\left(y-y_j\right)^2}{2}\Bigg|_{y_{j-\frac12}}^{y_j}+\frac{\left(y-y_j\right)^2}{2}\Bigg|_{y_j}^{y_{j+\frac12}}\right)=\widetilde{M}\ell^2\frac{\Delta^2}{4}\frac{\Delta^2}{4}=\frac{\widetilde{M}}{16\ell^2}=\frac{\widetilde{M}}{4N^2}.$$

Теорема 1 доведена.

Нехай $m_1=m_2=\ell^2$ та $N=\ell^4$. Введемо позначення:

$$X_k=\left[x_{k-1/2},x_{\kappa+1.2}\right],\ Y_j=\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right],\ \ \tilde{X}_{\tilde{k}}=\left[\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2},\tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}\right],\ \tilde{Y}_{\tilde{j}}=\left[\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2},\tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}\right];$$

$$h_{0k}(x)=\begin{cases}1, x\in X_k,\\0, x\notin X_k,\end{cases}\quad k=\overline{1,\ell};\quad H_{0j}(y)=\begin{cases}1, y\in Y_j,\\0, y\notin Y_j,\end{cases}\quad j=\overline{1,\ell};$$

$$\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x)=\begin{cases}1, x\in \tilde{X}_{\tilde{k}},\\0, x\notin \tilde{X}_{\tilde{k}},\end{cases}\quad \tilde{k}=\overline{1,\ell^2};\quad \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y)=\begin{cases}1, y\in \tilde{Y}_{\tilde{j}},\\0, y\notin \tilde{Y}_{\tilde{j}},\end{cases}\quad \tilde{j}=\overline{1,\ell^2};$$

$$x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\ y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\ \ k,j=\overline{1,\ell},\quad \Delta=\frac{1}{\ell};\ \tilde{x}_{\tilde{k}}=\tilde{k}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{y}_{\tilde{j}}=\tilde{j}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{k},\tilde{j}=\overline{1,\ell^2},\quad \Delta_1=\frac{1}{\ell^2}.$$

Розглянемо оператор-інтерполянт, побудований на основі сплайн-інтерлінанта $Jf\left(x,y\right)$:

$$\tilde{J}f\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2}f\left(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}}\right)h_{0k}\left(x\right)\tilde{H}_{0\tilde{j}}\left(y\right)+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j\right)\tilde{h}_{0\tilde{k}}\left(x\right)H_{0j}\left(y\right)-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}f\left(x_k,y_j\right)h_{0k}\left(x\right)H_{0j}\left(y\right).$$

Для обчислення інтегралу (1) пропонується формула:

$$\widetilde{\Phi}_1^2=\int_0^1\int_0^1\tilde{J}f(x,y)dxdy\,. \tag{3}$$

Підставимо у цю формулу вираз для оператора-інтерполянта $\tilde{J}f(x,y)$ та отримаємо кубатурну формулу:

$$\widetilde{\Phi}_1^2=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2}f(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}})\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}dx\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac12}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac12}}dy+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}f(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j)\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac12}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac12}}dx\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}dy-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}f(x_k,y_j)\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}dx\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}dy\,;$$

$$x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\ y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\ \ k,j=\overline{1,\ell},\quad \Delta=\frac{1}{\ell};\ \tilde{x}_{\tilde{k}}=\tilde{k}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{y}_{\tilde{j}}=\tilde{j}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{k},\tilde{j}=\overline{1,\ell^2},\ \Delta_1=\frac{1}{\ell^2}.$$

Теорема 2. *Нехай* $f(x,y)\in H_1^{2,1}\left(M,\widetilde{M}\right)$ *та значення* $f_{kj}=f\left(x_k,y_j\right)$, $k=\overline{1,m_1}$, $j=\overline{1,m_2}$, *задані не більше,* *ніж в* $N = m_1 m_2$, $m_1 = m_2 = \ell^2$, $N = \ell^4$ *фіксованих вузлових точках* $\left(x_k, y_j\right) \in G$. *Для кубатурної формули* $\widetilde{\Phi}_1^2(m, n)$ *справедлива наступна оцінка* $\rho\left(I_1^2, \widetilde{\Phi}_1^2\right) \le \frac{\widetilde{M} + 8M}{16} \frac{1}{\ell^2} = \frac{\widetilde{M} + 8M}{16} \frac{1}{\sqrt{N}}$. *Для досягнення похибки* $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ *кубатурна формула* $\widetilde{\Phi}_1^2(m, n)$ *використовує не* $O\left(\ell^4\right) = O(N)$ *значень функції як класична, а* $O\left(\ell^3\right) = O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$.

Доведення. Розглянемо

$$J_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f\left(x_k, y\right) h_{0k}(x); \quad J_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} f\left(x, y_j\right) H_{0j}(y);$$

$$\tilde{J}_1 f(x, y) = \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y\right) \tilde{h}_{0\tilde{k}}(x); \quad \tilde{J}_2 f(x, y) = \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} f\left(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}\right) \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y),$$

тоді для оператора-інтерлінанта $Jf(x, y)$ та оператора-інтерполянта $\tilde{J} f(x, y)$, побудованого на основі $Jf(x, y)$, справедливі тотожності $\left(Jf = \left(J_1 + J_2 - J_1 J_2\right) f\right)$ та $\left(\tilde{J} f = \left(J_1 \tilde{J}_2 + \tilde{J}_1 J_2 - J_1 J_2\right) f\right)$.

Знайдемо оцінку $\rho\left(I_1^2, \widetilde{\Phi}_1^2\right)$:

$$\rho\left(I_1^2, \widetilde{\Phi}_1^2\right) = \left| \int_0^1 \int_0^1 \left(f(x, y) - \tilde{J} f(x, y)\right) \right| \le \left| \int_0^1 \int_0^1 \left(f(x, y) - Jf(x, y) + Jf(x, y) - \tilde{J} f(x, y)\right) dxdy \right| \le$$

$$\le \int_0^1 \int_0^1 \left| f(x, y) - Jf(x, y)\right| dxdy + \int_0^1 \int_0^1 \left| Jf(x, y) - \tilde{J} f(x, y)\right| dxdy .$$

Отже, $\rho\left(I_1^2, \widetilde{\Phi}_1^2\right) \le \rho\left(I_1^2, \Phi_1^2\right) + \rho\left(\Phi_1^2, \widetilde{\Phi}_1^2\right)$. З теореми 1 маємо: $\rho\left(I_1^2, \Phi_1^2\right) \le \frac{\widetilde{M}}{16\ell^2}$, а

$$\rho\left(\Phi_1^2, \widetilde{\Phi}_1^2\right) \le \int_0^1 \int_0^1 \left| Jf(x, y) - \tilde{J} f(x, y)\right| dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left| \left(J_1 + J_2 - J_1 J_2\right) f - \left(J_1 \tilde{J}_2 + J_2 \tilde{J}_1 - J_1 J_2\right) f \right| dxdy \le$$

$$\le \int_0^1 \int_0^1 \left| \left(J_1 - J_1 \tilde{J}_2\right) f + \left(J_2 - J_2 \tilde{J}_1\right) f \right| dxdy \le \int_0^1 \int_0^1 \left| \left(J_1 - J_1 \tilde{J}_2\right) f \right| dxdy + \int_0^1 \int_0^1 \left| \left(J_2 - J_2 \tilde{J}_1\right) f \right| dxdy \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \left| f(x_k, y) - f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}})\right| dy + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \left| f(x, y_j) - f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j)\right| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \le$$

$$\le M \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \left| y - \tilde{y}_{\tilde{j}} \right| dy + M \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \left| x - \tilde{x}_{\tilde{k}} \right| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \le$$

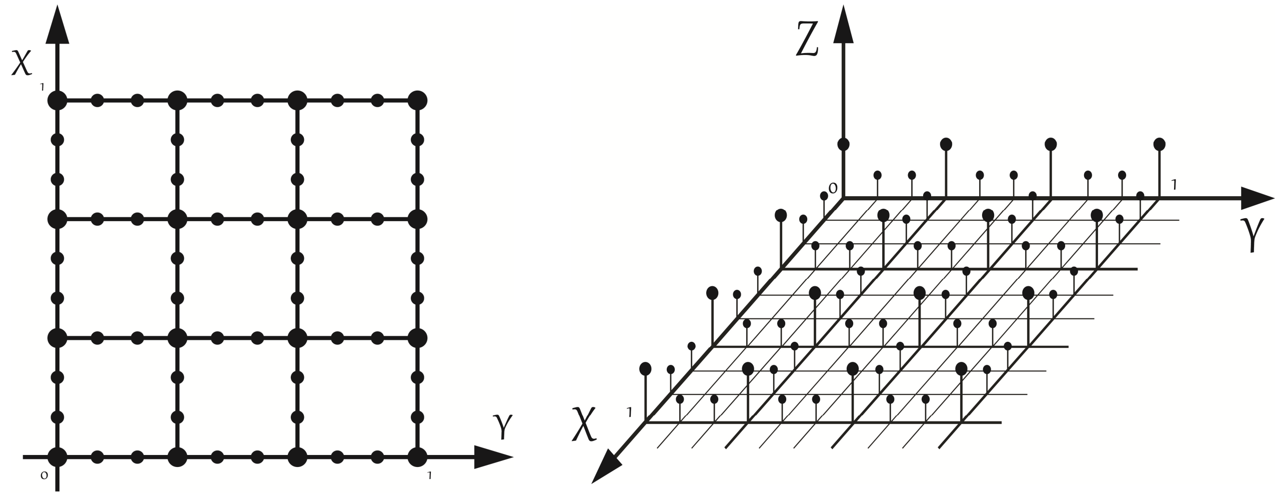
$$\le M \ell \Delta \frac{\Delta_1^2}{4} \ell^2 + M \ell \Delta \frac{\Delta_1^2}{4} \ell^2 = M \ell \frac{1}{\ell} \frac{\Delta_1}{2} = M \frac{1}{2} \Delta^2 = M \frac{\Delta^2}{2} = \frac{M}{2\ell^2} .$$

Таким чином, $\rho\left(\Phi_1^2, \widetilde{\Phi}_1^2\right) \le M \frac{1}{2\ell^2}$ і

$$\rho\left(I_1^2, \widetilde{\Phi}_1^2\right) \le \rho\left(I_1^2, \Phi_1^2\right) + \rho\left(\Phi_1^2, \widetilde{\Phi}_1^2\right) \le \frac{\widetilde{M}}{16\ell^2} + M \frac{1}{2\ell^2} = \left(\frac{\widetilde{M}}{16} + \frac{M}{2}\right) \frac{1}{\ell^2} = \frac{\widetilde{M} + 2M}{16} \frac{1}{\sqrt{N}} .$$

Підрахуємо кількість значень функції, що використовується при побудові кубатурної формули $\widetilde{\Phi}_1^2$, $Q = \ell \cdot \ell^2 + \ell \cdot \ell^2 - \ell^2 = 2\ell^3 - \ell^2 = O\left(\ell^3\right) = O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$. Теорема 2 доведена.

На рис. 2 представлений загальний принцип побудови сітки вузлів, яка використовується в кубатурних формулах з операторами інтерлінації.



а *б*

Рис. 2 – Загальний вигляд сітки вузлів для кубатурних формул з використанням операторів інтерлінації: *а* – вузли сітки; *б* – значення функції у вузлах сітки.

Розрахунковий експеримент. Наведемо результати тестування запропонованих кубатурних формул в системі комп'ютерної математики MathCad.

Приклад 1. Нехай функція задана слідами $f\left(x_k, y\right),\ k=\overline{1,\ell}$, $f\left(x, y_j\right),\ j=\overline{1,\ell}$ на системі взаємно перпендикулярних прямих $x_k = k\Delta - \dfrac{\Delta}{2},\ y_j = j\Delta - \dfrac{\Delta}{2},\ k, j=\overline{1,\ell},\ \Delta=\dfrac{1}{\ell}$, в області $G=\left[0,1\right]^2$. Для обчислення I_1^2 розглянемо кубатурну формулу Φ_1^2. На класі $H_1^{2,1}\left(M,\widetilde{M}\right)$ для функції $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{2}\left(cos\left(2x-2y\right)-cos\left(2x+2y\right)\right)$ справедливі наступні чисельні результати наближеного обчислення за кубатурною формулою Φ_1^2 (табл. 1).

Таблиця 1 – Обчислення I_1^2 за допомогою кубатурної формули Φ_1^2

ℓ	Φ_1^2	I_1^2	$E=\left\|I_1^2-\Phi_1^2\right\|$	$\varepsilon=1/16\ell^2$
4	0.501312762205496	0.50136796566562	0.000055203460124	0.00391
6	0.501357149641647	0.50136796566562	0.000010816023973	0.00174
10	0.501366569721889	0.50136796566562	0.00000139594373	0.00063
15	0.501367690281103	0.50136796566562	0.000000275384517	0.00028
20	0.501367878571774	0.50136796566562	0.000000087093845	0.00016
25	0.501367929999473	0.50136796566562	0.000000035666147	0.0001

Приклад 2.

Для функції $f\left(x,y\right)=\sin(x+y)$, для якої $\tilde{M}=1,\quad M=1$, покажемо, що:

$$\textbf{1. } \left|I_1^2-\tilde{\Phi}_1^2\right| \le \frac{\widetilde{M}}{16}\frac{1}{\ell^2}+\frac{M}{2}\frac{1}{\ell^2}=\left(\frac{\widetilde{M}}{16}+\frac{M}{2}\right)\frac{1}{\ell^2}=\frac{9}{16}\frac{1}{\ell^2}=\varepsilon;$$

$$\textbf{2. } \left|I_1^2-\tilde{\Phi}_1^2\right| \le \left|I_1^2-\Phi_1^2\right|+\left|\Phi_1^2-\tilde{\Phi}_1^2\right|=\varepsilon_1+\varepsilon_2=\tilde{\varepsilon}.$$

Точні значення інтегралів $I_1^2=0.773644542790111$ (табл. 2, 3).

Таблиця 2 – Обчислення I_1^2 за квадратурною формулою $\tilde{\Phi}_1^2$

ℓ	$\tilde{\Phi}_1^2$	$\left\|I_1^2-\tilde{\Phi}_1^2\right\|$	ε
10	0.773650858142159	0.000006315352048	0.018
20	0.773644937376223	0.00000394586111	0.045
30	0.773644620728563	0.000000077938452	0.002

Таблиця 3 – Похибки обчислення I_1^2 за формулою Φ_1^2 та Φ_1^2 за $\tilde{\Phi}_1^2$

ℓ	$\varepsilon_1 = \left\| I_1^2 - \Phi_1^2 \right\|$	$\varepsilon_2 = \left\| \Phi_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2 \right\|$	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$
10	0.000006315352048	0.000006449743718	0.000006584135388
20	0.000000008395805	0.000000402981916	0.000000411377721
30	0.000000001658296	0.000000079596748	0.000000081255044

Приклад 3. Метою чисельного експерименту є порівняння формули $\widetilde{\Phi}_1^2$ з формулою:

$$\widehat{\Phi}_1^2 = \sum_{k=1}^{\ell^2} \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \qquad (4)$$

за такими параметрами, як кількість використаних значень Q та $\widehat{Q}$ функції $f(x, y)$ для досягнення заданої точності. Кубатурна формула $\widetilde{\Phi}_1^2$ використовує в своїй побудові $Q = \ell \cdot \ell^2 + \ell \cdot \ell^2 - \ell^2 = 2\ell^3 - \ell^2$ значень функції. Для досягнення такої ж точності за допомогою класичної формули $\widehat{\Phi}_1^2$ необхідно використати $\widehat{Q} = \ell^4$ (табл. 4).

Таблиця 4 – Похибки обчислення I_1^2 за формулою $\widetilde{\Phi}_1^2$ та $\widehat{\Phi}_1^2$

ℓ	ε_1	$Q = 2\ell^3 - \ell^2$	ε_2	$\widehat{Q} = \ell^4$
10	$6.31 \cdot 10^{-6}$	1900	$6.44 \cdot 10^{-6}$	10000
20	$3.94 \cdot 10^{-7}$	15600	$4.02 \cdot 10^{-7}$	160000
30	$7.79 \cdot 10^{-8}$	53100	$7.95 \cdot 10^{-8}$	810000

Перспективи подальших досліджень. В статті розглядаються кубатурні формули обчислення подвійних інтегралів з використанням інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях, її значеннями в точках. Отримано оцінки похибки наближення кубатурних формул на класі диференційовних функцій. Аналогічні результати можна отримати для наближеного обчислення інтегралів від функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задається її слідами на площинах, її слідами на лініях, значеннями функції в точках на різних класах функцій.

Висновки. На класі диференційовних функцій отримано оцінки похибки наближеного обчислення інтегралів від функцій двох змінних у випадку, коли інформація задавалась її слідами на лініях, значеннями функції в точках. Кубатурні формули використовують оператор-інтерлінант та оператор-інтерполянт, побудований на основі оператора-інтерлінанта з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Основною перевагою запропонованих кубатурних формул є висока точність обчислення та використання меншої кількості значень функції порівняно з класичною формулою. Проведений розрахунковий експеримент в системі комп'ютерної математики MathCad підтверджує теоретичні результати.

Список літератури

1. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
2. *Нечуйвітер О. П.* Кубатурна формула обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій $f(x, y) \in C^2_{2,L,L,M}$ з використанням інтерлінації // Сб. науч. труд. : Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 1999. – С. 166 – 169.
3. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2006. – № 6. – С. 9 – 13.
4. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Про одну кубатурну формулу для обчислення 2 D–коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
5. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* 2 D–коефіцієнти Фур'є на класі диференційованих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
6. *Lytvyn Oleg N., Nechuyviter Olesya P.* Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – P. 90 – 96.
7. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації / *О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер* // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17–23.
8. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.
9. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення 3 D–коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.

10. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 8. – С. 36 – 41.

11. *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетации функций / *О. Н. Литвин, О. П. Нечуйвитер* // Вестник МГОУ. Сер. : Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9.

12. *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БЕЛГУ. Сер. : Математика. Физика. – 2013. – № 19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107.

13. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційованих функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.

14. *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* Обоснование точности кубатурных формул для приближеного вычисления 3 D - интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – № 5. – С. 206 – 217.

15. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення 3 D–коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково–сталої сплайн-інтерфлетації // Математичні машини та системи. – 2012. – № 4. – С. 127 – 113.

16. *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* Приближенное вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерфлетации // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 97 – 106.

17. *Нечуйвітер О. П., Кейта К. В.* Обчислення 2 D інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. – Вип.13. – С. 124 – 131.

18. *Нечуйвітер О. П.* Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлетації // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – №16 (1188). – С. 67 – 71.

References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystannyam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 1998, no. 1, pp. 23–28.

2. Nechuiviter O. P. Kubaturna formula obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy $f(x,y)\in C^2_{2,L,L,M}$ z vykoristannyam interlinatsiyi [Cubature formula for the computation of Fourier coefficients of functions $f(x,y)\in C^2_{2,L,L,M}$ using interlineation]. *Sb. nauch. trud.* : *Nelineynyie kraevyie zadachi matematicheskoy fiziki i ikh prilozheniya* [Collection of scientific works : Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t matematiki NAN Ukrainy Publ., 1999. pp. 166–169.

3. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'na za poryadkom tochnosti kubaturna formula obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy na osnovi splayn-interlinatsiyi [Optimal by the order of exactness cubature formula for computing double integrals from high oscillating functions based on spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukraiyiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2006, no. 6, pp. 9–13.

4. Lytvyn O.M., Nechuiviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya 2 D–koefitsientiv Fur'ye z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating 2-D Fourier coefficients using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukraiyiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2010, no. 3, pp. 24–29.

5. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. 2 D–koefitsienty Fur'ye na klasi diferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [2D–Fourier coefficients on the class of differentiable functions and spline-interlineation]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.

6. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010).* Novosibirsk, 2010, pp. 90–96.

7. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy z vykorystannyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals of high oscillating functions using polynomial Lagrange interlineation]. *Shtuchnyy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.

8. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystannyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using polynomial Lagrange interlineation]. *Tavriys'kyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72.

9. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3 D–koefitsientiv Fur'ye na klasi diferentsiyovnykh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3 D - Fourier coefficients on the class of differentiable functions using spline-interflatation]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2012, no. 3, pp. 45–50.

10. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy tryiokh zminnykh z vikorystannyam splayn-interfletatsiyi na klasi diferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of Fourier coefficients of functions of three variables using spline-interflatation on a class of differentiable functions]. *Dop. NAN Ukrauiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2012, no. 8, pp. 36–41.

11. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Priblizhennoe vychislenie ostsilliruyuschikh integralov triekh peremennykh s ispol'zovaniem interfletatsii funktsiy [Approximate evaluation of oscillating integrals with three variables using interflatation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser. : Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow state regional University. Series: physics and mathematics]. 2013, no. 2, pp. 3–9.

12. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. O pogreshnosti chislennogo integrirovaniya bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh [On the error of numerical integration of high oscillating functions of three variables]. *Nauchnye vedomosti BELGU. Ser. : Matematika. Fizika* [Scientific statements of the Belgorod state University. Series: Mathematics. Physics]. 2013, no. 19 (162), vol. 32, pp. 101–107.

13. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy triekh zminnykh na klasi diferentsiyovnykh funktsiy [Approximate evaluation of Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differentiable functions]. *Shtuchnyy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.

14. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnykh formul dlya priblizhenogo vychisleniya 3 D–integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy s ispol'zovaniem interfletatsii [Justification of accuracy of cubature formula for computing 3 D–integrals of high oscillating functions using interflatation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217.

15. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3 D–koefitsientiv Fur'ye na klasi Geldera z vykorystannyam kuskovo–staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3 D Fourier coefficients on the Holder class of functions using piecewise constant spline-interflatation]. *Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, no. 4, pp. 127–113.

16. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Priblizhennoe vychislenie integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy triekh peremennykh s ispol'zovaniem lagranzhevoy polinomial'noy interfletatsii [Approximate calculation of integrals of high oscillating functions of three variables by using Lagrangian polynomial interflatation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and systems analysis]. 2014, no. 3, pp. 97–106.

17. Nechuiviter O. P., Keyta K. V. Obchyslennya 2 D integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo–staloyi interlinatsiyi [Calculation of 2 D integrals of trigonometric functions using piecewise constant spline-interlineation]. *Matematychne ta komp"uterne modelyuvannya. Seriya : Fizyko-matematychni nauky : zb. nauk.* prats' [Mathematical and computer modeling. Series: Physics and mathematics: Coll. Scientific works]. Kamenetz – Podolsky, Kam'yanets' – Podil's'kyy natsional'nyy universitet im. Ivana Ogienka Publ., 2016, vol. 13, pp. 124–131.

18. Nechuiviter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo–staloyi interfletatsii [Computing triple integrals of trigonometric function using piecewise constant interflatation]. *Visnyk NTU «KhPIt». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 16 (1188), pp. 67–71.

Надійшла (received) 22.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Нечуйвітер Олеся Петрівна (Нечуйвитер Олеся Петровна, Nechuiviter Olesia Petrivna) **–** доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Чорна Олена Сергіївна (Чорна Елена Сергеевна, Chorna Olena Sergiivna) **–** асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena1402@ukr.net.

Дараган Катерина Володимирівна (Дараган Катерина Владимировна, Darahan Kateryna Volodymyrivna) – аспірантка, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: keitakaterina@gmail.com.

Підлісний Олександр Валерійович (Подлесный Александр Валерьевич, Pidlisnyi Oleksandr Valeriyovych) **–** аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: podlesnyy1994 @gmail.com.

Чорний Сергій Олександрович (Чорный Сергей Александрович, Chornyi Sergii Oleksandrovych) **–** студент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: sergej131280@ukr.net.

УДК 621.923

Ф. В. НОВИКОВ, В. И. ПОЛЯНСКИЙ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

Предложен теоретический подход к расчету параметров механической обработки с позиции закона сохранения энергии. Показана определяющая роль условного напряжения резания в формировании параметров силовой напряженности процесса резания. Расчетно-экспериментальным путем установлено, что условное напряжение резания при лезвийной обработке до 10 раз и более превышает предел прочности на сжатие обрабатываемого материала. Это связано с тем, что основную часть энергетического баланса процесса составляет энергия трения инструмента с обрабатываемым материалом. В связи с этим произведена оценка долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоемкости процесса механической обработки. Показано, что условный угол сдвига обрабатываемого материала вполне однозначно определяется отношением предела прочности на сжатие обрабатываемого материала и условного напряжения резания.

Ключевые слова: сила резания, условное напряжение резания, энергоемкость, сдвиг материала, точение, инструмент, трение.

Ф. В. НОВІКОВ, В. І. ПОЛЯНСЬКИЙ

АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ МЕХАНІЧНОЇ ОБРОБКИ

Запропоновано теоретичний підхід до розрахунку параметрів механічної обробки з позиції закону збереження енергії. Показано визначальну роль умовного напруження різання у формуванні параметрів силової напруженості процесу різання. Розрахунково-експериментальним шляхом встановлено, що умовне напруження різання при лезовій обробці до 10 разів і більше перевищує межу міцності на стиск оброблюваного матеріалу. Це пов'язано з тим, що основна частина енергетичного балансу процесу є енергія тертя інструменту з оброблюваним матеріалом. У зв'язку з цим проведено оцінювання часток енергій "чистого" різання і тертя в загальній енергоємності процесу механічної обробки. Показано, що умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу цілком однозначно визначається відношенням межі міцності на стиск оброблюваного матеріалу і умовного напруження різання.

Ключові слова: сила різання, умовне напруження різання, енергоємність, зсув матеріалу, точіння, інструмент, тертя.

F. V. NOVIKOV, V. I. POLYANSKY

ANALYTIC DETERMINATION OF TECHNOLOGICAL PARAMETERS OF MECHANICAL PROCESSING

A theoretical approach to the calculation of the parameters of mechanical processing from the standpoint of the law of energy conservation is proposed. The decisive role of the conditional cutting stress in the formation of the parameters of the power intensity of the cutting process is shown. By calculation and experimentally it is established that the conditional cutting voltage during blade processing is up to 10 times or higher than the com-