

- an polynomial interflatation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and systems analysis]. 2014, no. 3, pp. 97–106.
17. Nechuiwiter O. P., Keyta K. V. Obchyslennya 2 D integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo–staloyi interlinatsiyi [Calculation of 2 D integrals of trigonometric functions using piecewise constant spline-interlineation]. *Matematychni ta komp'uterne modelyuvannya. Seriya : Fizyko-matematychni nauky : zb. nauk. prats'* [Mathematical and computer modeling. Series: Physics and mathematics: Coll. Scientific works]. Kamenetz – Podolsky, Kam'yanets' – Podil'skyu natsional'nyy universitet im. Ivana Ogiienka Publ., 2016, vol. 13, pp. 124–131.
18. Nechuiwiter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo–staloyi interflatatsii [Computing triple integrals of trigonometric function using piecewise constant interflatation]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 16 (1188), pp. 67–71.

Надійшла (received) 22.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Нечуйвітер Олеся Петрівна (Нечуйвистер Олеся Петровна, Nechuiwiter Olesia Petrivna) – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Чорна Олена Сергіївна (Чорна Елена Сергеевна, Chorna Olena Sergiivna) – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena1402@ukr.net.

Дараган Катерина Володимирівна (Дараган Катерина Владимировна, Darahan Kateryna Volodymyrivna) – аспірантка, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: keitakaterina@gmail.com.

Підлісний Олександр Валерійович (Подлесный Александр Валерьевич, Pidlisnyi Oleksandr Valeriyovych) – аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: podlesnyy1994@gmail.com.

Чорний Сергій Олександрович (Чорный Сергей Александрович, Chornyi Sergii Oleksandrovych) – студент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: sergej131280@ukr.net.

УДК 621.923

Ф. В. НОВИКОВ, В. И. ПОЛЯНСКИЙ**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ**

Предложен теоретический подход к расчету параметров механической обработки с позиции закона сохранения энергии. Показана определяющая роль условного напряжения резания в формировании параметров силовой напряженности процесса резания. Расчетно-экспериментальным путем установлено, что условное напряжение резания при лезвийной обработке до 10 раз и более превышает предел прочности на сжатие обрабатываемого материала. Это связано с тем, что основную часть энергетического баланса процесса составляет энергия трения инструмента с обрабатываемым материалом. В связи с этим произведена оценка долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса механической обработки. Показано, что условный угол сдвига обрабатываемого материала вполне однозначно определяется отношением предела прочности на сжатие обрабатываемого материала и условного напряжения резания.

Ключевые слова: сила резания, условное напряжение резания, энергоёмкость, сдвиг материала, точение, инструмент, трение.

Ф. В. НОВИКОВ, В. И. ПОЛЯНСКИЙ**АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ МЕХАНІЧНОЇ ОБРОБКИ**

Запропоновано теоретичний підхід до розрахунку параметрів механічної обробки з позиції закону збереження енергії. Показано визначальну роль умовного напруження різання у формуванні параметрів силової напруженості процесу різання. Розрахунково-експериментальним шляхом встановлено, що умовне напруження різання при лезовій обробці до 10 разів і більше перевищує межу міцності на стиск оброблюваного матеріалу. Це пов'язано з тим, що основна частина енергетичного балансу процесу є енергія тертя інструменту з оброблюваним матеріалом. У зв'язку з цим проведено оцінювання часток енергій "чистого" різання і тертя в загальній енергоємності процесу механічної обробки. Показано, що умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу цілком однозначно визначається відношенням межі міцності на стиск оброблюваного матеріалу і умовного напруження різання.

Ключові слова: сила різання, умовне напруження різання, енергоємність, зсув матеріалу, точіння, інструмент, тертя.

F. V. NOVIKOV, V. I. POLYANSKY**ANALYTIC DETERMINATION OF TECHNOLOGICAL PARAMETERS OF MECHANICAL PROCESSING**

A theoretical approach to the calculation of the parameters of mechanical processing from the standpoint of the law of energy conservation is proposed. The decisive role of the conditional cutting stress in the formation of the parameters of the power intensity of the cutting process is shown. By calculation and experimentally it is established that the conditional cutting voltage during blade processing is up to 10 times or higher than the com-

© Ф. В. Новиков, В. И. Полянский, 2019

pressive strength of the material being processed. This is due to the fact that the main part of the energy balance of the process is the energy of friction of the tool with the material being processed. In this regard, an assessment was made of the fraction of the energies of "clean" cutting and friction in the overall energy intensity of the machining process. It is shown that the conditional shear angle of the material being processed is quite uniquely determined by the ratio of the compressive strength of the material being processed to the conditional cutting stress.

Key words: cutting force, conditional cutting stress, energy intensity, material shear, turning, tool, friction.

Введение. Механическая обработка среди всего многообразия методов физико-технической обработки материалов является наименее энергозатратной и наиболее экологически чистой, что способствует ее широкому применению в производстве, обеспечивая высокие показатели качества, точности и производительности. В настоящее время благодаря применению на предприятиях современных металлорежущих станков с ЧПУ типа «обрабатывающий центр» и сборных твердосплавных и керамических режущих инструментов с износостойкими покрытиями зарубежного производства появились новые технологические возможности совершенствования механической обработки. Как показывает практика, производительность может быть увеличена до 10 и более раз при одновременном обеспечении высококачественной обработки. Однако для практической реализации указанных технологических возможностей новых станков и режущих инструментов необходимо правильно выбрать оптимальные условия обработки. Важное значение при этом имеет математическое моделирование процесса механической обработки и установление его основных физических закономерностей с целью выявления и реализации наиболее существенных физических эффектов обработки, обеспечивающих повышение технико-экономических показателей процесса резания. В связи с этим, настоящая работа посвящена аналитическому определению технологических параметров механической обработки.

Анализ последних исследований. Вопросы математического моделирования и оптимизации процессов механической обработки отражены в многочисленных работах, опубликованных в научно-технической литературе, среди которых особо следует выделить работы [1 – 3], посвященные математическому моделированию механики процесса резания и установлению аналитических зависимостей основных технологических параметров обработки. Однако, учитывая сложность механических процессов, происходящих при резании, полностью эти задачи не решены. Отсутствуют аналитически установленные взаимосвязи параметров режима резания с параметрами процесса стружкообразования при резании, а расчетные и экспериментальные данные, например, условного угла сдвига обрабатываемого материала имеют значительные расхождения. Это не позволяет аналитически определить параметры силовой и тепловой напряженностей процесса резания, что требует применения новых теоретических подходов для раскрытия физических закономерностей процесса резания, основанных, в первую очередь, на фундаментальном законе сохранения энергии.

Постановка задачи. В настоящей работе с позиции закона сохранения энергии необходимо разработать математическую модель определения основных параметров механической обработки, обеспечивающую высокую степень их сходимости с экспериментальными данными. Это позволит аналитически описать технологические параметры механической обработки и научно обоснованно подойти к выбору оптимальных параметров режима резания и характеристик режущего инструмента в зависимости от технических требований на обработку.

Математическая модель. В процессе резания лезвийным инструментом происходит отделение стружки от обрабатываемого материала по схеме, показанной на рис. 1. Так, при перемещении инструмента (резца) со скоростью резания V в горизонтальном направлении на величину Δz в условной плоскости сдвига OA (где касательное напряжение τ максимально) происходит сдвиг обрабатываемого материала на величину Δl . При этом одновременно происходит перемещение обрабатываемого материала вдоль передней поверхности резца на величину Δy . В этих трех рассмотренных направлениях соответственно возникают три силы: P_z , P и P_y .

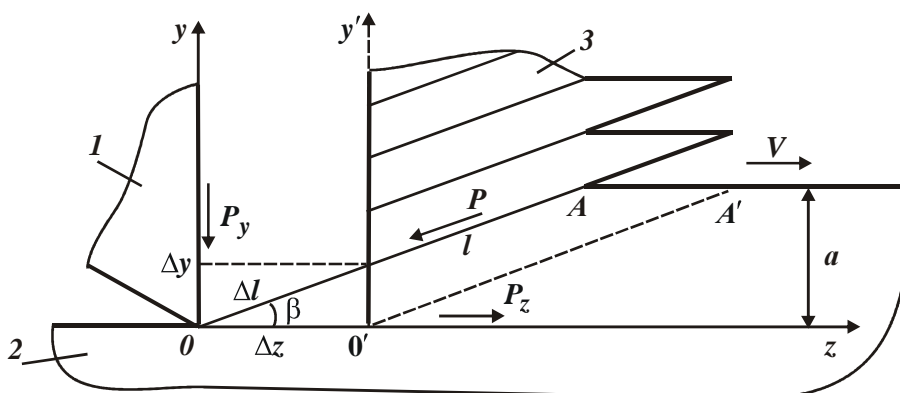


Рис. 1 – Расчетная схема параметров процесса резания:

1 – инструмент; 2 – обрабатываемый материал; 3 – образующая стружка.

При нулевом переднем угле резца силы P_z и P_y определяют тангенциальную и радиальную составляющие силы резания. Тогда работа резания, определяемая произведением $P_z \cdot \Delta z$, равна сумме работ, выполняемых

двумя остальными силами P и P_y , то есть $P \cdot \Delta l$ и $P_y \cdot \Delta y$. В итоге получено уравнение, соответствующее закону сохранения энергии при резании:

$$P_z \cdot \Delta z = P_y \cdot \Delta y + P \cdot \Delta l, \quad (1)$$

где $P = \tau \cdot \delta \cdot l$ – сила, возникающая в условной плоскости сдвига ОА (рис. 1), Н; τ – касательное напряжение, возникающее в условной плоскости сдвига ОА длиной l , Н/м²; δ – ширина среза, м; $l = a / \sin \beta$ – длина условной плоскости сдвига ОА, м; a – толщина среза, м; β – условный угол сдвига обрабатываемого материала.

Разделив все слагаемые уравнения (1) на величину Δl , с учетом $\cos \beta = \Delta x / \Delta l$; $\sin \beta = \Delta y / \Delta l$, получаем:

$$P_z \cdot \cos \beta = P_y \cdot \sin \beta + P. \quad (2)$$

Принимая при точении резцом с нулевым передним углом γ известные соотношения [4]: $P_y / P_z = \operatorname{tg} \psi = f$; $P_z = \sigma \cdot a \cdot \delta$, и разрешая уравнение (2) относительно касательного напряжения τ , имеем:

$$\tau = \frac{\sigma}{2 \cos \psi} \cdot [\sin(\psi + 2\beta) - \sin \psi], \quad (3)$$

где ψ – условный угол трения на передней поверхности резца; f – коэффициент трения инструментального и обрабатываемого материалов; σ – условное напряжение резания, Н/м².

Максимальное касательное напряжение τ_{\max} достигается при условии $\sin(\psi + 2\beta) = 1$ или

$$\beta = 45^\circ - \frac{\psi}{2}. \quad (4)$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы $\tau_{\max} = \tau_{\text{сдв}} \approx 0,5 \cdot \sigma_{\text{сж}}$, а условное напряжение резания σ приняло значение, определяемое из зависимости (3):

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{сж}} \cdot \cos \psi}{1 - \sin \psi} = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\psi}{2} \right)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}, \quad (5)$$

где $\tau_{\text{сдв}}$, $\sigma_{\text{сж}}$ – соответственно, пределы прочности на сдвиг и сжатие обрабатываемого материала, Н/м².

Из зависимости (5) вытекает, что угол β вполне однозначно определяется отношением $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$, то есть:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\text{сж}}}{\sigma}. \quad (6)$$

Из зависимости (5) также вытекает, что с увеличением угла ψ условное напряжение резания σ увеличивается. Наименьшее значение σ достигается при $\psi = 0$, то есть при условии $\sigma = \sigma_{\text{сж}}$, что имеет место при одноосном сжатии стержня. В табл. 1 приведены рассчитанные по зависимости (6) значения условного угла сдвига обрабатываемого материала β в зависимости от отношения $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$. Как видно, угол β увеличивается с увеличением отношения $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$.

Таблица 1 – Расчетные значения условного угла сдвига β обрабатываемого материала

$\sigma_{\text{сж}} / \sigma$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	1,0
β , град	6	11	17	22	27	31	45

Располагая экспериментальными значениями угла β , можно по зависимости (6) определить условное напряжение резания σ , а по нему – тангенциальную составляющую силы резания P_z . Очевидно, после достижения в условной плоскости сдвига ОА касательным напряжением τ предела прочности на сдвиг обрабатываемого материала $\tau_{\text{сдв}}$, имеет место дальнейшее скольжение (перемещение) отделяющегося элемента материала вдоль условной плоскости сдвига ОА до тех пор, пока произойдет отделение нижерасположенного элемента материала (при условии $\tau_{\max} = \tau_{\text{сдв}} \approx 0,5 \cdot \sigma_{\text{сж}}$). В результате возникающая тангенциальная составляющая силы резания P_z равна удвоенному значению элементарной тангенциальной составляющей силы резания, вызывающей сдвиг материала в условной плоскости сдвига ОА. Кроме того, суммарную тангенциальную составляющую силы резания P_z будет определять еще и составляющая, вызванная трением задней поверхности инструмента с обрабатываемым материалом. Поэтому, зная экспериментальное значение P_z , с использованием зависимости (6) можно определить все составляющие силы P_z , связанные с процессом стружкообразования на передней поверхности инструмента и трением на задней поверхности инструмента.

Определение долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоемкости процесса механической обработки. В табл. 2 приведены экспериментальные значения тангенциальной составляющей силы резания P_z , полученные профессором *Коломийцем В. В.* [4], при продольном точении закаленных сталей: Р6М5

(HRC 64) и стали 45 (HRC 50) резцами из эльбора–Р с главным углом резца в плане $\varphi = 45^\circ$, режимом резания: $S = 0,07$ мм/об.; $t = 0,2$ мм и $h_{зад} = 0,1$ мм. Также приведены расчетные значения параметров $\sigma = P_z / (S \cdot t)$ и $\sigma_{сж} / \sigma$, полученные с учетом $\sigma_{сж} = 970$ Н/мм² (для стали 45) и $\sigma_{сж} = 3600$ Н/мм² (для стали Р6М5).

В табл. 3 приведены экспериментальные значения условного угла сдвига обрабатываемого материала β и рассчитанные по зависимости (6) значения условного напряжения "чистого" резания $\sigma_{рез} = \sigma_{сж} / \operatorname{tg} \beta$, отношений $\sigma_{рез} / \sigma$ и $\sigma_{тр} / \sigma$, определяющих доли энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса механической обработки, где $\sigma_{тр} = \sigma - \sigma_{рез}$ – условное напряжение трения, Н/м².

Как видно, доля энергии "чистого" резания меньше доли энергии трения, что указывает на необходимость дальнейшего совершенствования процессов механической обработки с точки зрения уменьшения энергоёмкости обработки. Основным путем снижения силовой напряженности процесса резания является уменьшение трения инструмента с обрабатываемым материалом, применяя для этого алмазные инструменты, обеспечивая ввод в зону резания дополнительной механической и электрической энергии, интенсифицирующей процесс резания, и т.д.

Как следует из табл. 2 и табл. 3, при обработке стали 45 отношения $\sigma_{сж} / \sigma$ и $\sigma_{рез} / \sigma$ меньше, чем при обработке стали Р6М5 в связи с большей долей энергии трения в общей энергоёмкости процесса резания [5, 6]. Таким образом показано, что применение условного напряжения резания σ в качестве основного параметра резания позволяет раздельно учесть параметры процессов "чистого" резания и трения, определить доли "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса резания.

Таблица 2 – Экспериментальные значения P_z и расчетные значения параметров σ и $\sigma_{сж} / \sigma$

V, м/мин	25	50	75	100	125	150	200	250
Сталь 45								
P_z , Н	100	135	140	138	125	122	120	105
σ , Н/мм ²	7143	9643	10000	9857	8929	8714	8571	7500
$\sigma_{сж} / \sigma$	0,136	0,1	0,097	0,098	0,109	0,111	0,113	0,13
Сталь Р6М5								
P_z , Н	225	210	200	190	185	180	178	175
σ , Н/мм ²	16071	15000	14286	13571	13214	12857	12714	12500
$\sigma_{сж} / \sigma$	0,224	0,24	0,252	0,265	0,272	0,28	0,283	0,288

Таблица 3 – Экспериментальные значения β и расчетные значения параметров $\sigma_{рез}$, $\sigma_{рез} / \sigma$ и $\sigma_{тр} / \sigma$

V, м/мин	50	100	150	200	250	300
Сталь 45						
β , град	17	17	19	20,5	21,5	22
$\sigma_{рез}$, Н/мм ²	3129	3129	2853	2621,6	2487,2	2425
$\sigma_{рез} / \sigma$, %	32,5	31,8	32,7	30,6	33,2	32,9
$\sigma_{тр} / \sigma$, %	67,5	68,2	67,3	69,4	66,8	67,1
Сталь Р6М5						
β , град	30	35	38,5	40	40,5	40,5
$\sigma_{рез}$, Н/мм ²	6234,8	5142,9	4557	4290,8	4210,5	4212
$\sigma_{рез} / \sigma$, %	41,6	37,9	35,4	33,8	33,7	33,7
$\sigma_{тр} / \sigma$, %	58,4	62,1	64,6	66,2	66,3	66,3

Полученные теоретические решения справедливы при условии достижения в условной плоскости сдвига материала ОА (рис. 1) максимального касательного напряжения $\tau_{\max} = \tau_{сдв} \approx 0,5 \cdot \sigma_{сж}$ и, соответственно, условного угла сдвига обрабатываемого материала β согласно зависимости (3). Однако, исходя из этой зависимости, условие $\tau = \tau_{сдв} \approx 0,5 \cdot \sigma_{сж}$ можно выполнить и при меньшем значении угла β :

$$\sin(\psi + 2\beta) = \frac{\sigma_{сж}}{\sigma} \cdot \cos \psi + \sin \psi. \quad (7)$$

Зависимость (7) можно упростить, преобразуя уравнение (2) к виду:

$$\sigma \cdot (1 - f \cdot \operatorname{tg} \beta) = \frac{\sigma_{сж}}{\sin 2\beta}. \quad (8)$$

Принимая в первом приближении $(1 - f \cdot \operatorname{tg} \beta) \rightarrow 1$, имеем:

$$\sin 2\beta = \frac{\sigma_{сж}}{\sigma}. \quad (9)$$

Как видно, угол β тем больше, чем меньше условное напряжение резания σ . В табл. 4 приведены рассчитанные по зависимости (7) значения угла β для разных значений угла ψ , а также значения угла β , рассчитанные по упрощенной зависимости (9). Из табл. 4 следует, что угол ψ мало влияет на изменение угла β (особенно для $\sigma_{сж} / \sigma \leq 0,5$), а расхождение значений угла β , рассчитанных по зависимостям (7) и (9), незначительно. Поэтому расчеты угла β можно производить по зависимости (9). Кроме того, значения угла β , рассчитанные по зависимостям (7) и (9), меньше аналогичных значений угла β , рассчитанных по зависимости (6), табл. 1.

Необходимо отметить, что предложенный в работе теоретический подход к определению параметров механической обработки соответствует приведенному в работе [4] подходу, основанному на условии равновесия сил, действующих в плоскости сдвига материала ОА (рис. 1):

$$P_z \cdot \cos \beta = P_y \cdot \sin \beta + P. \quad (10)$$

Как видно, уравнение (10) идентично уравнению (2), что свидетельствует о достоверности приведенных в настоящей работе теоретических решений.

Таблица 4 – Расчётные значения условного угла сдвига β обрабатываемого материала

$\sigma_{сж} / \sigma$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
β , (для $\psi = 17^\circ$)	3	6	9	12,5	17	21,5
β , град (для $\psi = 22^\circ$)	3	6	9,5	13	17,5	23,5
β , град (для $\psi = 27^\circ$)	3	6	9,5	13,5	18,5	27
β , град, по зависимости (9)	3	6	9	12	15	18,5

Перспективы дальнейших исследований. Автор считает перспективными пути исследования, связанные с оценкой долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процессов лезвийной и абразивной обработки и на этой основе установление условий уменьшения силовой напряженности процесса резания.

Выводы. В работе получены аналитические зависимости для определения параметров механической обработки с позиции закона сохранения энергии. Показана определяющая роль условного напряжения резания в формировании параметров силовой напряженности процесса резания. Установлено, что условное напряжение резания при лезвийной обработке до 10 раз и более превышает предел прочности на сжатие обрабатываемого материала, поскольку основную часть энергетического баланса процесса составляет энергия трения инструмента с обрабатываемым материалом. В связи с этим произведена раздельная оценка долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса механической обработки и определены условия уменьшения энергоёмкости. Показано, что условный угол сдвига обрабатываемого материала вполне однозначно определяется отношением предела прочности на сжатие обрабатываемого материала и условного напряжения резания.

Список литературы

1. Силин С. С. Метод подобия при резании материалов. – М. : Машиностроение, 1979. – 152 с.
2. Лолодзе Т. Н. Прочность и износостойкость режущего инструмента. – М. : Машиностроение, 1982. – 320 с.
3. Бобров В. Ф. Основы теории резания металлов. – М. : Машиностроение, 1975. – 343 с.
4. Физико-математическая теория процессов обработки материалов и технологии машиностроения / Под общ. ред. Ф. В. Новикова и А. В. Якимова. В десяти томах. Т. 1. "Механика резания материалов". – Одесса : ОНПУ, 2002. – 580 с.
5. Новиков Ф. В. Основы математического моделирования технологических процессов механической обработки : монография. – Днепр : ЛІРА, 2018. – 400 с.
6. Полянський В. І. Розширення технологічних можливостей підвищення точності механічної обробки отверстий // Перспективні технології та прилади : Збірник наукових праць. – Луцьк : Луцький НТУ, 2017. – № 11 (2). – С. 87 – 92.

References (transliterated)

1. Silin S. S. *Metod podobiya pri rezanii materialov* [The method of similarity when cutting materials]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1979. 152 p.
2. Loladze T. N. *Prochnost' i iznosostoykost' rezhushego instrumenta* [Strength and wear resistance of the cutting tool]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1982. 320 p.
3. Bobrov V. F. *Osnovy teorii rezaniya metallov* [Fundamentals of the theory of metal cutting]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1975. 343 p.
4. *Fiziko-matematicheskaya teoriya protsessov obrabotki materialov i tekhnologii mashinostroyeniya V desyati tomakh. Tom. 1. "Mekhanika rezaniya materialov"* [Physical and mathematical theory of material processing theory and mechanical engineering technologies. In ten volumes. V. 1. "Mechanics of metal cutting"]. Ed. F. V. Novikov, A. V. Yakimov. Odessa, ONPU Publ., 2002. 580 p.
5. Novikov F. V. *Osnovy matematicheskogo modelirovaniya tekhnologicheskikh protsessov mekhanicheskoy obrabotki : monografiya* [Fundamentals of Mathematical Modeling of Technological Processes of Mechanical Processing : monograph]. Dnepr, LIRA Publ., 2018. 400 p.
6. Polyanskiy V. I. *Rasshirenie tekhnologicheskikh vozmozhnostey povysheniya tochnosti mekhanicheskoy obrabotki otverstiy* [Expansion of technological capabilities to improve the accuracy of machining holes]. *Perspektivni tekhnologiyi ta pryklady : Zbirnyk naukovykh prats'* [Perspective technologies and devices: Collection of scientific works]. Lutsk, Luts'kyu NTU Publ., 2017, no. 11 (2), pp. 87–92.

Поступила (received) 16.04.2019

Новіков Федір Васильович (Новиков Федор Васильевич, Novikov Fedir Vasylovych) – доктор технічних наук, професор, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків; тел.: (0572) 69-55-62; e-mail: novikovfv@i.ua.

Полянський Володимир Іванович (Полянский Владимир Иванович, Polyansky Vladimir Ivanovich) – кандидат технічних наук, Генеральний директор, ТОВ «Імперія металів», м. Харків; тел.: (067) 578-09-06; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПОРІВНЯННЯ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СИЛИ УДАРУ ТІЛ В ТЕОРІЇ ГЕРЦА

Проведено порівняльний аналіз наближених аналітичних розв'язків інтегрального рівняння сили удару пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку в області їх взаємодії. Для порівняння використано як відомі розв'язки, так і нові, побудовані методом послідовних наближень. Завдяки наближеному обчисленню сум повільно збіжних функціональних рядів способом Шенкса, вдалося одержати компактну форму розв'язку, відносна похибка якого менше одного відсотка. Для оцінки похибок було використано результати числового інтегрування диференціального рівняння удару на комп'ютері. Показано, що одержані наближені аналітичні розв'язки можна використовувати і для апроксимації деяких періодичних Атеб-функцій.

Ключові слова: теорія Герца, сила удару, інтегральне рівняння, аналітичні розв'язки, метод Шенкса, апроксимація Атеб-функцій.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ

СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЫ УДАРА ТЕЛ В ТЕОРИИ ГЕРЦА

Проведен сравнительный анализ приближённых аналитических решений интегрального уравнения силы удара упругих тел, ограниченных поверхностями второго порядка в области их взаимодействия. Для сравнения использованы как известные решения, так и новые, построенные методом последовательных приближений. Благодаря приближённому суммированию медленно сходящихся функциональных рядов способом Шенкса, удалось получить компактную форму решения, относительная погрешность которого меньше одного процента. Для установления погрешностей были использованы результаты численного интегрирования дифференциального уравнения удара на компьютере. Показано, что полученные приближённые аналитические решения можно использовать и для аппроксимации некоторых периодических Атеб-функций.

Ключевые слова: теория Герца, сила удара, интегральное уравнение, аналитические решения, метод Шенкса, аппроксимация Атеб-функций.

V. P. OLSHANSKIY

COMPARISON OF APPROXIMATE SOLUTIONS TO IMPACT STRENGTH INTEGRAL EQUATION IN THE FRAMEWORK OF HERTZ THEORY

Analytical solutions to the integral equation describing the strength of impact of elastic bodies bounded by second order surfaces in the area of the impact were compared. Previously known solutions to the integral equation as well the new ones, constructed by the method of successive approximations, were considered. Approximate summation of slowly converging functional series by Shanks's method allowed to derive a compact form of the solution which relative error is less than one percent. The errors were computed by using the results of numerical integration of the impact differential equation. It was shown that the analytical solutions obtained could also be applied for approximating some periodic Ateb-functions.

Key words: Hertz theory, strength of impact, integral equation, analytical solution, Shanks's method, approximation of Ateb-functions.

Вступ. При обчисленні сили ударної взаємодії пружних тіл, як функції часу, традиційно використовують інтегральні рівняння. Першим, хто склав таке рівняння сили удару був *С. П. Тимошенко* [1, 2]. В подальшому інтегральні рівняння такого типу використовували в багатьох публікаціях, як в задачах удару [3 – 6], так і в інших задачах механіки [7 – 9]. Їх розв'язки одержували чисельними методами. Для цього проміжок інтегрування розділяли на малі ділянки і на кожній з них певним чином апроксимували силу удару. Найбільш поширеним є спосіб *ступінчастої апроксимації*, де як і в роботі [1], силу вважали сталою в межах ділянки. Використання *лінійної апроксимації* дозволило *А. П. Філіпову* [4] прискорити збіжність рядів і обчислити не тільки прогини, а і напруження в балках і пластинах, спричинені пружним ударом.

Значно менше публікацій присвячено побудові наближених аналітичних розв'язків інтегральних рівнянь. Такі спроби зроблено в [10, 11]. У випадку удару двох пружних тіл, без урахування їх коливань, *компактний аналітичний розв'язок* вдалося побудувати *М. О. Кільчевському* [11] для випадку, коли незакріплені тіла, піддані удару, обмежені в області контакту поверхнями другого порядку. Саме його розв'язок будемо далі використовувати для порівняння з тими, що одержано в цій роботі.