Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Новіков Федір Васильович (Новиков Федор Васильевич, Novikov Fedir Vasyl'ovych) – доктор технічних наук, професор, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків; тел.: (0572) 69-55-62; e-mail: novikovfv@i.ua.

Полянський Володимир Іванович (Полянский Владимир Иванович, Polyansky Vladimir Ivanovich) – кандидат технічних наук, Генеральний директор, ТОВ «Імперія металів», м. Харків; тел.: (067) 578-09-06; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПОРІВНЯННЯ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СИЛИ УДАРУ ТІЛ В ТЕОРІЇ ГЕРЦА

Проведено порівняльний аналіз наближених аналітичних розв'язків інтегрального рівняння сили удару пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку в області їх взаємодії. Для порівняння використано як відомі розв'язки, так і нові, побудовані методом послідовних наближень. Завдяки наближеному обчисленню сум повільно збіжних функціональних рядів способом Шенкса, вдалося одержати компактну форму розв'язку, відносна похибка якого менше одного відсотка. Для оцінки похибок було використано результати числового інтегрування диференціального рівняння удару на комп'ютері. Показано, що одержані наближені аналітичні розв'язки можна використовувати і для апроксимації деяких періодичних Ateb–функцій.

Ключові слова: теорія Герца, сила удару, інтегральне рівняння, аналітичні розв'язки, метод Шенкса, апроксимація Ateb–функцій.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ

СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЫ УДАРА ТЕЛ В ТЕОРИИ ГЕРЦА

Проведен сравнительный анализ приближённых аналитических решений интегрального уравнения силы удара упругих тел, ограниченных поверхностями второго порядка в области их взаимодействия. Для сравнения использованы как известные решения, так и новые, построенные методом последовательных приближений. Благодаря приближённому суммированию медленно сходящихся функциональных рядов способом Шенкса, удалось получить компактную форму решения, относительная погрешность которого меньше одного процента. Для установления погрешностей были использованы результаты численного интегрирования дифференциального уравнения удара на компьютере. Показано, что полученные приближённые аналитические решения можно использовать и для аппроксимации некоторых периодических Ateb–функций.

Ключевые слова: теория Герца, сила удара, интегральное уравнение, аналитические решения, метод Шенкса, аппроксимация Ateb–функций.

V. P. OLSHANSKIY

COMPARISON OF APPROXIMATE SOLUTIONS TO IMPACT STRENGTH INTEGRAL EQUATION IN THE FRAMEWORK OF HERTZ THEORY

Analytical solutions to the integral equation describing the strength of impact of elastic bodies bounded by second order surfaces in the area of the impact were compared. Previously known solutions to the integral equation as well the new ones, constructed by the method of successive approximations, were considered. Approximate summation of slowly converging functional series by Shanks's method allowed to derive a compact form of the solution which relative error is less than one percent. The errors were computed by using the results of numerical integration of the impact differential equation. It was shown that the analytical solutions obtained could also be applied for approximating some periodic Ateb–functions.

Key words: Hertz theory, strength of impact, integral equation, analytical solution, Shanks's method, approximation of Ateb–functions.

Вступ. При обчисленні сили ударної взаємодії пружних тіл, як функції часу, традиційно використовують інтегральні рівняння. Першим, хто склав таке рівняння сили удару був *С. П. Тимошенко* [1, 2]. В подальшому інтегральні рівняння такого типу використовували в багатьох публікаціях, як в задачах удару [3 – 6], так і в інших задачах механіки [7 – 9]. Їх розв'язки одержували чисельними методами. Для цього проміжок інтегрування розділяли на малі ділянки і на кожній з них певним чином апроксимували силу удару. Найбільш поширеним є спосіб *ступінчастої апроксимації*, де як і в роботі [1], силу вважали сталою в межах ділянки. Використання *лінійної апроксимації* дозволило *А. П. Філіпову* [4] прискорити збіжність рядів і обчислити не тільки прогини, а і напруження в балках і пластинах, спричинені пружним ударом.

Значно менше публікацій присвячено побудові наближених аналітичних розв'язків інтегральних рівнянь. Такі спроби зроблено в [10, 11]. У випадку удару двох пружних тіл, без урахування їх коливань, *компактний аналітичний розв'язок* вдалося побудувати *М. О. Кільчевському* [11] для випадку, коли незакріплені тіла, піддані удару, обмежені в області контакту поверхнями другого порядку. Саме його розв'язок будемо далі використовувати для порівняння з тими, що одержано в цій роботі.

Метою даної статті є побудова наближених аналітичних розв’язків інтегрального рівняння сили удару двох незакріплених пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку, аналіз їх точності та можливостей використання в інженерних розрахунках ударних процесів.

Інтегральне рівняння сили удару. Якщо тіла в області динамічної взаємодії обмежені поверхнями: $z_1 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2$; $z_2 = -\left(b_{11}x^2 + b_{22}y^2\right)$, причому $A = a_{11} + b_{11} \geq B = a_{22} + b_{22}$, то, у відповідності з *теорією Герца*, зближення центрів мас тіл x, під дією сили P, становить:

$$x = k \cdot P^{2/3}.$$

Для обчислення k використовують розв’язок статичної контактної задачі теорії пружності, згідно якому [12]:

$$k = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_1 + Q_2}{\pi b_1} K(\varepsilon).$$

Тут:

$$Q_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1};\ Q_2 = \frac{1-\mu_2^2}{E_2};\ b_1 = \sqrt[3]{\frac{3E(\varepsilon)}{2\left(1-\varepsilon^2\right)} \frac{Q_1 + Q_2}{\pi(A+B)}},$$

де $K(\varepsilon)$, $E(\varepsilon)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду, відповідно; E_1, E_2, μ_1, μ_2 – *модулі пружності* та *коефіцієнти Пуассона* матеріалів тіл.

Параметр ε – ексцентриситет площадки контакту – є коренем трансцендентного рівняння:

$$\left(1-\varepsilon^2\right)\left[\frac{K(\varepsilon)}{E(\varepsilon)} - 1\right] = \frac{B\varepsilon^2}{A+B},$$

тобто він залежить лише від геометрії граничних поверхонь тіл (коефіцієнтів A і B).

В рамках припущень квазістатичної теорії удару Герца інтегральне рівняння сили динамічного стискання тіл має вигляд [11]:

$$kP^{2/3} = \vartheta_0 t - \frac{1}{M}\int_0^t\int_0^{t_1} P(t_2)\,dt_2 dt_1, \tag{1}$$

де $M = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, m_1, m_2 – маси тіл, задіяних в ударі; ϑ_0 – початкова швидкість зіткнення тіл; t – час; $P = P(t)$ – сила удару.

Введенням в роботі [11] нових змінних:

$$P(t) = \left(\frac{M\vartheta_0}{k}\right)^{3/5} \cdot f(\tau),\quad t = \frac{M^{2/5}k^{3/5}}{\vartheta_0^{1/5}}\tau, \tag{2}$$

рівнянню (1) надано наступну форму:

$$f^{2/3}(\tau) + \int_0^\tau\int_0^{\tau_1} f(\tau_2)\,d\tau_2 d\tau_1 - \tau = 0, \tag{3}$$

куди явно не входять фізичні та геометричні параметри тіл. Тому автор монографії [11] називає (3) *універсальним рівнянням удару*. Про його наближені розв’язки піде мова далі.

Наближені розв’язки універсального рівняння удару. Як відзначалось вище, вперше такий розв’язок побудовано в [11]. Він має вигляд:

$$f(\tau) = -\frac{10\tau^{3/2}}{13,793 + 0,73\tau^{5/2}} \cdot \frac{0,015\tau^{5/2} - 0,276}{0,2 + 0,013\tau^{5/2}}. \tag{4}$$

Громіздка процедура його отримання детально викладена в [11] і її тут повторювати не будемо.

Щоб мати форми наближених розв’язків, замість (3), використаємо ітераційне співвідношення:

$$f_n(\tau) = \left(\tau - \int_0^\tau\int_0^{\tau_1} f_{n-1}(\tau_2)\,d\tau_2 d\tau_1\right)^{3/2},\quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{5}$$

Поклавши в ньому $f_0(\tau) = 0$, одержуємо:

$$f_1(\tau) = \tau^{3/2};\quad f_2(\tau) = \left(\tau - \frac{4}{35}\tau^{7/2}\right)^{3/2} \approx \tau^{3/2} - \frac{6}{35}\tau^4 + \frac{6}{1225}\tau^{13/2} + \frac{4}{42875}\tau^9. \tag{6}$$

Тут прийняли до уваги, що на етапі динамічного стискання тіл $\tau \in (0;\tau_c)$, де $\tau_c \approx 1,60904$.

Підставивши (6) в (5), одержуємо наступний розв’язок:

$$f(\tau) \approx f_3(\tau) \approx \left(\tau - \frac{4}{35}\tau^{7/2} + \frac{1}{175}\tau^6 - \frac{8}{104125}\tau^{17/2} - \frac{2}{2358125}\tau^{11}\right)^{3/2}. \tag{7}$$

Щоб мати замість (7) більш компактний вираз $f(\tau)$, аналогічно [11], скористаємося *методом Шенкса*. За цим методом сума ряду S наближено подається співвідношенням:

$$S \approx \frac{S_{n-1} \cdot S_{n+1} - S_n^2}{S_{n+1} - S_{n-1}}, \tag{8}$$

де S_{n-1}, S_n, S_{n+1} – суми з $(n-1)$, n і $(n+1)$ членів ряду, відповідно.

Оскільки $S_{n-1} = S_n - a_n$, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, то:

$$S_{n-1} \cdot S_{n+1} - S_n^2 = S_n(a_{n+1} - a_n) - a_n a_{n+1}; \quad S_{n+1} + S_{n-1} = 2S_n + a_{n+1} - a_n.$$

Тут a_n і a_{n+1} – n–й і $(n+1)$–й члени ряду, відповідно.

Отже, (8) зводиться до формули:

$$S \approx S_n - \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}. \tag{9}$$

Розглянемо ряд:

$$S = 1 - \frac{4}{35}\tau^{5/2} + \frac{1}{175}\tau^5 - \frac{8}{104125}\tau^{15/2} - \ldots$$

Покладемо в ньому: $S_n = 1 - \frac{4}{35}\tau^{5/2}$; $a_n = -\frac{4}{35}\tau^{5/2}$; $a_{n+1} = \frac{1}{175}\tau^5$.

Підстановкою цих виразів в (9) отримуємо:

$$S \approx 1 - \frac{4}{35}\tau^{5/2} + \frac{4}{35}\frac{\tau^5}{20 + \tau^{5/2}} = 1 - \frac{16}{7}\frac{\tau^{5/2}}{20 + \tau^{5/2}}.$$

Тоді:

$$f(\tau) \approx (\tau \cdot S)^{3/2} \approx \left(\tau - \frac{16}{7}\frac{\tau^{7/2}}{20 + \tau^{5/2}}\right)^{3/2}. \tag{10}$$

Ця форма розв’язку значно компактніша, ніж (7).

Щоб використати наближені розв’язки для розрахунку характеристик удару, приймемо до уваги, що максимум сили стискання P_c і максимум зближення центрів мас тіл x_c подаються формулами (11):

$$P_c = \left(\frac{5}{4}\right)^{3/5}\left(\frac{M\vartheta_0^2}{k}\right)^{3/5}; \quad x_c = k\left(\frac{5}{4}\right)^{2/5}\left(\frac{M\vartheta_0^2}{k}\right)^{2/5}, \tag{11}$$

де згідно з (2): $\left(\frac{M\vartheta_0^2}{k}\right)^{3/5} = \frac{P(t)}{f(\tau)}$.

Тоді у безрозмірній формі:

$$\frac{P(t)}{P_c} = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/5} \cdot f(\tau); \quad \frac{x(t)}{x_c} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2/5}\left(f(\tau)\right)^{2/3}, \tag{12}$$

причому $\tau = \left(\frac{5}{4}\right)^{2/5}\frac{\vartheta_0 t}{x_c}$.

Підставляючи в формули (12) розв’язки (4), (7) і (10), будемо мати різні значення характеристик удару тіл на етапі їх стискання.

На етапі розтискання, що проходить на проміжку $\tau \in [\tau_c, \tau_y]$, де $\tau_y = 3{,}21808$, зберігає чинність лише розв’язок (4). У виразах (7) і (10) треба змінити τ на $\tau_y - \tau$, тоді при $\tau = \tau_y$: $x(\tau) = 0$ і $P(\tau) = 0$, що настає в кінці удару.

В роботі [13] встановлено, що:

$$\frac{x(t)}{x_c} = Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{\vartheta_0 t}{x_c}\right), \tag{13}$$

тобто вказане відношення дорівнює *Ateb–синусу*.

Тому, використовуючи надруковану в [13] таблицю цієї функції, скористаємося можливістю з’ясувати похибки наближених розв'язків (4), (7) і (10), бо згідно з (12) і (13), маємо:

$$Sa\left(\frac{3}{2},1,\frac{5}{4},\frac{\vartheta_0 t}{x_c}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^{2/5}\left(f\left(\tau\right)\right)^{2/3}. \tag{14}$$

Результати обчислень значень вказаної функції чотирма способами наведено в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення Ateb–синуса для різних $\eta=\left(\frac{4}{5}\right)^{2/5}\cdot\tau$

η	Значення $Sa\left(\frac{3}{2},1,\frac{5}{4},\eta\right)$			
	Формули: (4) і (14)	Формули: (7) і (14)	Формули: (10) і (14)	Таблиця в [13]
0,2	0,200	0,199	0,199	0,199
0,4	0,394	0,394	0,394	0,394
0,6	0,577	0,577	0,577	0,577
0,8	0,738	0,737	0,737	0,737
1,0	0,868	0,866	0,866	0,866
1,2	0,961	0,956	0,954	0,954
1,47164	1,020	1,006	0,997	1,000

Як бачимо, тут кращим наближенням є компактна формула (10). Її максимальна похибка становить $0,3$ %. Розв'язок (4) дає дещо завищені результати з похибкою 2 %.

Використовуючи розв'язок (10), отримуємо наступну формулу апроксимації Ateb–синуса в першій чверті його періоду $\eta\in\left[0;I\right]$:

$$Sa\left(\frac{3}{2},1,\frac{5}{4},\eta\right)\approx\eta-2,2857\frac{\eta^{7/2}}{16+\eta^{5/2}}, \tag{15}$$

де $I=1,47164$.

По аналогії з (15), для апроксимації *Ateb–косинуса* в першій чверті його періоду одержуємо вираз:

$$Ca\left(\frac{3}{2},1,\frac{5}{4},\eta\right)\approx I-\eta-\frac{2,2857\left(I-\eta\right)^{7/2}}{16+\left(I-\eta\right)^{5/2}}. \tag{16}$$

Інформація про похибки цієї формули надана в табл. 2, де, крім значень, обчислених за допомогою (16), вказано табличні значення, які запозичено з роботи [14].

Таблиця 2 – Значення Ateb–косинуса

η	Значення $Ca\left(\frac{3}{2},1,\frac{5}{4},\eta\right)$		η	Значення $Ca\left(\frac{3}{2},1,\frac{5}{4},\eta\right)$	
	Формула (16)	Таблиця з [14]		Формула (16)	Таблиця з [14]
0,0	0,997	1,000	0,8	0,637	0,637
0,2	0,974	0,975	1,0	0,461	0,461
0,4	0,902	0,902	1,2	0,270	0,270
0,6	0,787	0,787	1,47164	0,000	0,000

Найбільша відносна похибка апроксимації (16) становить $0,3$ %.

Таким чином, наближення (15), (16) цілком придатні для обчислення значень Ateb–функцій в інженерних розрахунках.

Проілюструємо на конкретному прикладі використання формули (10).

Приклад. Проведемо розрахунок зміни у часі сили удару двох сталевих куль однакового радіуса $R=0,05$ м зі швидкістю $\vartheta_0=4$ м/с. Для вказаного матеріалу куль $E_1=E_2=2\cdot10^{11}$ Па; $\mu_1=\mu_2=0,25$. Геометричні параметри: $a_{11}=b_{11}=a_{22}=b_{22}=10$ м$^{-1}$, $A=B=20$ м$^{-1}$. Ексцентриситет кругової площадки контакту $\varepsilon=0$ і, в такому випадку, $K\left(\varepsilon\right)=E\left(\varepsilon\right)=\pi/2$. Фізичні сталі $Q_1=Q_2=4,6875\cdot10^{-12}$ Па$^{-1}$. Параметр $b_1=$ $=5,601859\cdot10^{-5}$ (м/Па)$^{1/3}$. Йому відповідає $k=1,25518\cdot10^{-7}$ мН$^{-2/3}$. Маса кожної кулі $m_1=m_2=4,08407$ кг. Їх зведена маса становить $M=2,04204$ кг. Розрахунки за формулами (11) дають: $P_c=128065,7325$ Н; $x_c=0,0003189$ м. Обчислені відношення $P\left(t\right)/P_c$ для різних t за формулами (10), (12) записано в табл. 3.

Таблиця 3 – Значення $P(t)/P_c$, обчислені двома способами

$\frac{\vartheta_0 t}{x_c}$	Значення $P(t)/P_c$		$\frac{\vartheta_0 t}{x_c}$	Значення $P(t)/P_c$	
	Формули (10), (12)	Числов. інт.		Формули (10), (12)	Числов. інт.
0,2	0,0891	0,0891	1,0	0,8053	0,8055
0,4	0,2476	0,2476	1,2	0,9316	0,9324
0,6	0,4377	0,4377	1,4	0,9924	0,9952
0,8	0,6325	0,6325	I	0,9958	1,0000

Для порівняння, тут також записано відношення $P(t)/P_c$, одержані чисельним методом. Враховуючи, що, згідно з (12):

$$P(t)/P_c = \left(x(t)/x_c\right)^{3/2},$$

на комп'ютері проводимо чисельне інтегрування диференціального рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{Mk^{3/2}}x^{3/2},$$

при початкових умовах: $x(0)=0$, $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = \vartheta_0$ і вказаних вище значеннях: M, k, ϑ_0.

Маємо невелику розбіжність відповідних числових результатів в табл. 3, що підтверджує вірогідність отриманих аналітичних розв'язків.

Перспективи подальших досліджень. Викладений метод може бути поширеним на випадки удару тіл, обмежених поверхнями і більш високих порядків, а також поверхнями, що мають сингулярні точки, але це потребує складання нових інтегральних рівнянь і побудови їх конкретних аналітичних розв'язків.

Висновки. В рамках теорії Герца, методом послідовних наближень, з використанням формули Шенкса побудовано компактний наближений аналітичний розв'язок інтегрального рівняння сили удару двох незакріплених пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку в області їх взаємодії. Цей розв'язок має вищу точність, ніж відомі в літературі. Він служить також гарним наближенням періодичних Ateb–функцій в першій чверті їх періоду.

Список літератури

1. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М. : Машиностроение, 1985. – 472 с.
2. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. – М. – Л. : Физматгиз, 1959. – 439 с.
3. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М. : Госстройиздат, 1965. – 447 с.
4. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. – М. : Машиностроение, 1970. – 734 с.
5. *Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев : Наукова думка, 1977. – 340 с.
6. *Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В.* Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков : Міськдрук, 2012. – 320 с.
7. *Янютин Е. Г., Янчевский И. В.* Импульсные воздействия на упруго-деформируемые элементы конструкций. – Харьков : Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с.
8. *Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С.* Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
9. *Воропай А. В.* Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. – Харьков : Лидер, 2018. – 214 с.
10. *Петренко М. П.* Про наближений розв'язок уточненого функціонального рівняння теорії удару // Прикладна механіка. – 1961. – Т. 7. – № 5. – С. 565 – 568.
11. *Кильчевский Н. А.* Динамическое контактное сжатие твёрдых тел. Удар. – Киев : Наукова думка, 1976. – 319 с.
12. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. – М. – Л. : Гостехиздат, 1949. – 272 с.
13. *Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.* Ateb–синус у розв'язку задачі Герца про удар // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 98 – 103.
14. *Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.* Дініміка осцилятора з жорсткою характеристикою пружності при дії силового імпульсу // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 33 (1309). – С. 37 – 42.

References (transliterated)

1. Timoshenko S. P., Yang D. Kh., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibrations in Engineering Practice]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 472 p.
2. Timoshenko S. P. *Steganoalgoritmy Kolebaniya v inzhenernom dele* [Steganography algorithm in engineering practice]. Moscow – Leningrad, Fizmatgiz Publ., 1959. 439 p.
3. Gol'dsmit V. *Udar. Teoriya i fizicheskie svoystva soudaryaemykh tel* [Impact. Theory and physical properties of impacted bodies]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1965. 447 p.
4. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruemykh sistem* [Vibrations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 734 p.
5. Goloskokov E. G., Filippov A. P. *Nestatsionarnye kolebaniya deformituemykh sistem* [Non-stationary vibrations of deformable systems]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1977. 340 p.
6. Olshanskiy V. P., Tishchenko L. N., Olshanskiy S. V. *Kolebaniya sterzhney i plastin pri mekhanicheskom udare* [Oscillations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv, Urban printing Publ., 2012. 320 p.
7. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V. *Impul'snye vozdeystviya na uprugo-deformiruemye eylementy konstruktsiy* [Pulse impact on elastically deformable structural units]. Kharkov, Izd-vo KhGADTU (KhADI) Publ., 2001. 184 p.

8. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruktsiy* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, HNADU PUBL., 2004. 392 p.

9. Voropay A. V. *Integral'nye uravneniya Vol'terra v nekorrektnykh zadachakh nestatsionarnogo deformirovaniya plastin* [Volterra integral equations in some problems of non-stationary deformation of plates]. Kharkov, Lider Publ., 2018. 214 p.

10. Petrenko M. P. Pro nablyzhenyy rozv"yazok utochnenogo funktsional'nogo rivnyannya teoriyi udaru [On approximate solution to specified functional equation of impact theory]. *Prykladna mekhanika* [Applied mechanics]. 1961, vol. 7, no. 5, pp. 565–568.

11. Kil'chevskiy N. A. *Dinamicheskoe kontaktnoe szgatie tveiyrdykh tel. Udar* [Dynamic contact compression of solid. Impact]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1976. 319 p.

12. Shtaerman I. Ya. *Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti* [Contact problem of elasticity theory]. Moscow – Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949. 272 p.

13. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Ateb-synus u rozv"yazku zadachi Gertsa pro udar [Ateb–sine in the solution of Hertz’s problem of impact]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1279), pp. 98–103.

14. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Dynamika ostsilyatora z zhorstkoyu kharakterystykoyu pruzhnosti pry diyi sylovogo impul'su [Dynamics of oscillator with stiff elasticity characteristic under force]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. 2018, no. 33 (1309), pp. 37–42.

Надійшла (received) 06.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ, М. В. СЛІПЧЕНКО

НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ МЕМБРАНИ НА ОДНОБІЧНІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ, СПРИЧИНЕНІ СИЛОВИМ ІМПУЛЬСОМ

Розглянуто динамічне деформування прямокутної та круглої мембран, однобічно підкріплених двопараметричною пружною основою, що чинить опір лише стисканню, в умовах силового імпульсного навантаження. Показано, що внаслідок несиметрії характеристики пружності системи, після відриву та віддалення мембрани від основи її прогин може бути більший за той, що вона мала при контакті з основою за дії імпульсу. Визначено умови, коли можлива така нерівність. Вони пов’язані з натягом мембрани, пружними характеристиками основи і тривалістю дії прямокутного імпульсу, а величина динамічного тиску на мембрану не входить до цих умов, що є наслідком кусково-лінійної силової характеристики коливальної системи, поданої відрізками двох прямих. Наведено приклади розрахунків і проведено аналіз числових результатів.

Ключові слова: прямокутна і кругла мембрани, однобічна пружна основа, прямокутний силовий імпульс.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, М. В. СЛИПЧЕНКО

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ НА ОДНОСТОРОННЕМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ВЫЗВАННЫЕ СИЛОВЫМ ИМПУЛЬСОМ

Рассмотрено динамическое деформирование прямоугольной и круглой мембран, односторонне подкрепленных двухпараметрическим упругим основанием, которое сопротивляется только сжатию, в условиях силового импульсного нагружения. Показано, что в результате несимметрии характеристики упругости системы, после отрыва и отдаления мембраны от основания её прогиб может быть больше того, который она имела при контакте с основанием при действии импульса. Определены условия, когда возможно такое неравенство. Они связаны с натяжением мембраны, упругими характеристиками основания и продолжительностью действия прямоугольного импульса, а величина динамического давления на мембрану не входит в этих условия, что является следствием кусочно-линейной силовой характеристики колебательной системы, представленной отрезками двух прямых. Приведены примеры расчетов и проведен анализ числовых результатов.

Ключевые слова: прямоугольная и круглая мембраны, одностороннее упругое основание, прямоугольный силовой импульс.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY, M. V. SLIPCHENKO

NONSTATIONARY OSCILLATIONS OF THE MEMBRANE ON A ONE-SIDED ELASTIC BASE, CAUSED BY A FORCE IMPULSE

Dynamic deformation of rectangular and round membranes unilaterally supported by a two-parameter elastic base, which resists only compression, under conditions of force impulse loading is considered. It is shown that as a result of asymmetry of the elasticity characteristics of the system, after separation and removal of the membrane from the base, its deflection may be larger than that which it had in contact with the base under the action of the impulse. Conditions are determined when such an inequality is possible. They are related to the membrane tension, the elastic characteristics of the base, and the duration of the rectangular pulse, that is, the value of the dynamic pressure on the membrane is not one of these conditions, which is the result of the piecewise-linear force characteristic of the oscillatory system given by segments of two straight lines. Examples of calculations are given and analysis of numerical results is carried out.

Key words: rectangular and round membranes, unilateral elastic base, rectangular force impulse.