

8. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruksiy* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, HNADU PUBL., 2004. 392 p.
9. Voropay A. V. *Integral'nye uravneniya Vol'terra v nekorrektnykh zadachakh nestatsionarnogo deformirovaniya plastin* [Volterra integral equations in some problems of non-stationary deformation of plates]. Kharkov, Lider Publ., 2018. 214 p.
10. Petrenko M. P. Pro nablyzheny rozv'yazok utochnenogo funktsional'nogo rinvnyannya teorii udaru [On approximate solution to specified functional equation of impact theory]. *Prykladna mekhanika* [Applied mechanics]. 1961, vol. 7, no. 5, pp. 565–568.
11. Kil'chevskiy N. A. *Dinamicheskoe kontaktное szgatie tveirydykh tel. Udar* [Dynamic contact compression of solid. Impact]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1976. 319 p.
12. Shtaerman I. Ya. *Kontaktная zadacha teorii uprugosti* [Contact problem of elasticity theory]. Moscow – Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949. 272 p.
13. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Ateb-synus u rozv'yazku zadachi Gertsya pro udar [Ateb-sine in the solution of Hertz's problem of impact]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1279), pp. 98–103.
14. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. *Dynamika ostsilyatora z zhorstkoyu kharakterystykoyu pruzhnosti pry diyi sylovogo impul'su* [Dynamics of oscillator with stiff elasticity characteristic under force]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. 2018, no. 33 (1309), pp. 37–42.

Надійшла (received) 06.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasily Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ, М. В. СЛІПЧЕНКО**НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ МЕМБРАНИ НА ОДНОБІЧНІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ, СПРИЧИНЕНІ СИЛОВИМ ІМПУЛЬСОМ**

Розглянуто динамічне деформування прямокутної та круглої мембран, однобічно підкріплених двопараметричною пружною основою, що чинить опір лише стисканню, в умовах силового імпульсного навантаження. Показано, що внаслідок несиметрії характеристики пружності системи, після відриву та віддалення мембрани від основи її прогин може бути більший за той, що вона мала при контакті з основою за дії імпульсу. Визначено умови, коли можлива така нерівність. Вони пов'язані з натягом мембрани, пружними характеристиками основи і тривалістю дії прямокутного імпульсу, а величина динамічного тиску на мембрану не входить до цих умов, що є наслідком кусково-лінійної силової характеристики коливної системи, поданої відрізками двох прямих. Наведено приклади розрахунків і проведено аналіз числових результатів.

Ключові слова: прямокутна і кругла мембрани, однобічна пружна основа, прямокутний силовий імпульс.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, М. В. СЛІПЧЕНКО**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ НА ОДНОСТОРОННЕМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ВЫЗВАННЫЕ СИЛОВЫМ ИМПУЛЬСОМ**

Рассмотрено динамическое деформирование прямоугольной и круглой мембран, односторонне подкрепленных двухпараметрическим упругим основанием, которое сопротивляется только сжатию, в условиях силового импульсного нагружения. Показано, что в результате несимметрии характеристики упругости системы, после отрыва и отдаления мембраны от основания её прогиб может быть больше того, который она имела при контакте с основанием при действии импульса. Определены условия, когда возможно такое неравенство. Они связаны с натяжением мембраны, упругими характеристиками основания и продолжительностью действия прямоугольного импульса, а величина динамического давления на мембрану не входит в этих условия, что является следствием кусочно-линейной силовой характеристики колебательной системы, представленной отрезками двух прямых. Приведены примеры расчетов и проведен анализ числовых результатов.

Ключевые слова: прямоугольная и круглая мембраны, одностороннее упругое основание, прямоугольный силовый импульс.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY, M. V. SLIPCHENKO**NONSTATIONARY OSCILLATIONS OF THE MEMBRANE ON A ONE-SIDED ELASTIC BASE, CAUSED BY A FORCE IMPULSE**

Dynamic deformation of rectangular and round membranes unilaterally supported by a two-parameter elastic base, which resists only compression, under conditions of force impulse loading is considered. It is shown that as a result of asymmetry of the elasticity characteristics of the system, after separation and removal of the membrane from the base, its deflection may be larger than that which it had in contact with the base under the action of the impulse. Conditions are determined when such an inequality is possible. They are related to the membrane tension, the elastic characteristics of the base, and the duration of the rectangular pulse, that is, the value of the dynamic pressure on the membrane is not one of these conditions, which is the result of the piecewise-linear force characteristic of the oscillatory system given by segments of two straight lines. Examples of calculations are given and analysis of numerical results is carried out.

Key words: rectangular and round membranes, unilateral elastic base, rectangular force impulse.

Вступ. Динаміку мембран при дії короткочасних імпульсних навантажень розглядали в багатьох роботах, із яких виділимо [1 – 4]. У цих роботах, крім прямих задач розрахунку деформованого стану, розв’язували й обернені задачі по визначенню параметрів динамічних навантажень, які спричиняють зареєстровані (відомі) переміщення. Там також аналізували нестационарні коливання прямокутних і круглих мембран з зосередженими масами, в тому числі мембран підкріплених пружною основою. Але в названих роботах та інших відомих публікаціях розв’язували лінійні динамічні задачі. *Нелінійним задачам* приділено значно менше уваги, бо їх аналітичне розв’язання становить суттєві труднощі, за винятком окремих випадків. Один із таких випадків використано в цій роботі.

Метою статті є дослідження особливостей руху прямокутної та круглої мембран з відривом від основи при силовому імпульсному навантаженні.

Постановка задачі та її розв’язок. Для досягнення поставленої мети вибрано найпростіші варіанти розподілу тиску по поверхні мембрани та його зміну в часі. Такий вибір дав можливість побудувати точні аналітичні розв’язки рівнянь руху, провести їх припасовування та дослідити особливості динамічного процесу в нелінійній системі з несиметричною силовою характеристикою.

Динаміка прямокутної мембрани. Припускаємо, що мембрана має розміри l_1 і l_2 відповідно в напрямі координатних осей Ox і Oy . Її сталий натяг дорівнює T . Знизу вона підкріплена двопараметричною пружною основою, що має характеристики c_f , t_f і ρ_f [5], а зверху навантажена динамічним тиском:

$$q(x, y, t) = q \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2} [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (1)$$

Тут q – максимальне значення тиску, що припадає на центр мембрани; $H(t) - H(t - t_1)$ – *одичні функції Хевісайда*; t – час; t_1 – тривалість дії (ширина) прямокутного імпульсу.

Переміщення (прогини) мембрани $z(x, y, t)$ донизу додатні, а доверху – від’ємні відносно положення статичної рівноваги $z = 0$. Їх описуємо диференціальним рівнянням:

$$-T_* \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + c_f z + \rho_* \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (2)$$

де $T_* = T + 2t_f$; $\rho_* = \rho + \rho_f$; ρ – маса одиниці площі мембрани; ρ_f – приєднана маса основи.

Рівняння (1) враховує контакт мембрани з основою і має чинність при $z > 0$.

Оскільки прогини закріпленої на контурі мембрани дорівнюють нулю, то розв’язок рівняння (2) подаємо добутком:

$$z(x, y, t) = B(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2}, \quad (3)$$

у якому $B(t)$ – невідома функція часу.

Підстановкою (3) в (2), з урахуванням (1), отримуємо:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + \Omega^2 B = \frac{q}{\rho_*} [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (4)$$

Тут $\Omega = \sqrt{\frac{1}{\rho_*} \left[T_* \left(\frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right) + c_f \right]}$ – частота вільних коливань мембрани при двобічному контакті з основою.

Розв’язок рівняння (4), при нульових початкових умовах, має вигляд [6]:

$$B(t) = \begin{cases} z_c (1 - \cos \Omega t), & t < t_1; \\ 2z_c \sin \frac{\Omega t_1}{2} \sin \left(\Omega \left(t - \frac{t_1}{2} \right) \right), & \text{при} \\ & t \geq t_1, \end{cases} \quad (5)$$

де $z_c = \frac{q}{T_* \left(\frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right) + c_f}$ – прогин центру мембрани донизу при дії на її поверхні статичного тиску

$$q(x, y) = q \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2}.$$

Якщо $t_1 < \frac{2\pi}{\Omega}$, то розв'язок (5) має сенс при $t \in (0; t_*)$, де:

$$t_* = \frac{\pi}{\Omega} + \frac{t_1}{2}.$$

У відповідності з (3), (5) амплітуда переміщення центру мембрани донизу $a_0(t_1)$, становить:

$$a_0(t_1) = \begin{cases} 2z_c \sin \frac{\Omega t_1}{2}, & \text{при } t_1 \leq \frac{\pi}{\Omega}; \\ 2z_c, & \text{при } t_1 > \frac{\pi}{\Omega}. \end{cases} \quad (6)$$

Прогин $a_0(t_1)$ мембрана має при:

$$t_e = \frac{2\pi}{\Omega} + \frac{t_1}{2},$$

коли $t_1 \leq \pi/\Omega$ і при $t_e = \pi/\Omega$, коли $t_1 > \pi/\Omega$.

Контакт мембрани з основою порушується в момент часу:

$$t = t_* = \frac{\pi}{\Omega} + \frac{t_1}{2},$$

бо, згідно з (5), $B(t_*) = 0$. При цьому центр мембрани має швидкість

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{t=t_*} = -v_0 = -2z_c \Omega \sin \frac{\Omega t_1}{2}. \quad (7)$$

Далі рух центру мембрани описується рівнянням:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + \omega^2 B = 0, \quad (8)$$

у якому $\omega = \sqrt{\frac{1}{\rho} T \left(\frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right)}$ – частота коливань мембрани при відсутності основи.

Розв'язок рівняння (8), що задовольняє умові (7), має вигляд:

$$B(t) = -2z_c \frac{\Omega}{\omega} \sin \frac{\Omega t_1}{2} \sin(\omega(t - t_*)). \quad (9)$$

Амплітуда переміщення центру мембрани вгору $a_1(t_1)$, згідно з (3), (9), дорівнює:

$$a_1(t_1) = 2z_c \frac{\Omega}{\omega} \sin \frac{\Omega t_1}{2} \quad (10)$$

і досягається вона в момент часу:

$$t = t_m = \frac{2\pi}{\Omega} + t_*.$$

Отже, якщо $t_1 \leq \pi/\Omega$, то відношення амплітуд, визначених формулами (6), (10), наступне:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{\Omega}{\omega} = \text{const}.$$

При більших тривалостях імпульсу, коли $t_1 \in (\pi/\Omega; 2\pi/\Omega)$, $a_0(t_1) = 2z_c$ і

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{\Omega}{\omega} \sin \frac{\Omega t_1}{2}.$$

Таким чином, при $\Omega > \omega$ виконується нерівність $a_1(t_1) > a_0(t_1)$, тобто має місце динамічний ефект несиметрії силової характеристики системи [8, 9]. Він проявляється лише для тривалостей імпульсу $t_1 \in (0; t_G)$, де:

$$t_G = \frac{2}{\Omega} \left(\pi - \arcsin \frac{\omega}{\Omega} \right).$$

У випадку $\Omega < \omega$ названий ефект не проявляється, бо маємо $a_0(t_1) > a_1(t_1)$.

Оскільки в вирази Ω і ω не входить параметр q , то відношення $a_1(t_1)/a_0(t_1)$ не залежить від максимального тиску на мембрану, що є наслідком кусково-лінійної характеристики пружності системи.

Приклад 1. Припустимо, що сталевая мембрана товщиною $1,5 \cdot 10^{-3}$ м: $T = 2,34 \cdot 10^5$ Н/м; $\rho = 11,7$ кг/м²;

$l_1 = l_2 = 1$ м і лежить на пружному шарі гуми, у якої $E_0 = 4 \cdot 10^6$ Па; $\nu_0 = 0,48$; $\rho_0 = 1,2$ кг/м³, товщиною $H = 0,08$ м. Максимальний тиск на мембрану $q = 2 \cdot 10^5$ Па. Обчислимо її максимальні прогини при різних тривалостях дії імпульсу t_1 .

Для розрахунку значень коефіцієнтів c_f , t_f , ρ_f маємо інтеграли [5]:

$$c_f = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \int_0^H \left[\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right]^2 d\xi; \quad t_f = \frac{E_0}{4(1+\nu_0)} \int_0^H \psi^2(\xi) d\xi; \quad \rho_f = \rho_0 \int_0^H \psi^2(\xi) d\xi,$$

в яких $\psi(\xi)$ – функція розподілу вертикальних переміщень по товщині шару.

Враховуючи невелику товщину шару, задаємо наближено:

$$\psi(\xi) = \frac{H - \xi}{H}.$$

$$\text{Тоді: } c_f = \frac{E_0}{H(1-\nu_0^2)} = 6,4969 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3; \quad t_f = \frac{E_0 H}{12(1+\nu_0)} = 18018 \text{ Н/м}; \quad \rho_f = \frac{\rho_0 H}{3} = 32 \rho_0 \text{ кг/м}^2.$$

Подальші обчислення дають: $T_* = 270036$ Н/м; $\rho_* = 43,7$ кг/м²; $\Omega = 1268,3373$ с⁻¹; $z_c = 0,002845$ м; $\omega = 628,3185$ с⁻¹; $t_T = 0,004136$ с.

Одержані для різних t_1 значення $a_0(t_1)$ і $a_1(t_1)$ записано в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення амплітуд прогинів і час їх досягнення при різних t_1

$10^3 t_1, \text{ с}$	$10^3 a_0(t_1), \text{ м}$	$10^3 a_1(t_1), \text{ м}$	$10^3 t_e, \text{ с}$	$10^3 t_m, \text{ с}$
1,000	3,371	6,805	1,738	5,477
2,000	5,432	10,965	2,238	9,977
2,477	5,690	11,486	2,477	6,215
3,000	5,690	10,860	2,477	6,477
4,000	5,690	6,532	2,477	6,977
4,800	5,690	1,119	2,477	7,377

Розрахунки підтверджують, що при $t_1 < t_T$ $a_1(t_1) > a_0(t_1)$, а при $t > t_T$ навпаки $a_1(t_1) < a_0(t_1)$.

На рис. 1 нанесено графіки $B(t)$, одержані числовим інтегруванням на комп'ютері диференціальних рівнянь (4) і (8) для трьох значень t_1 .

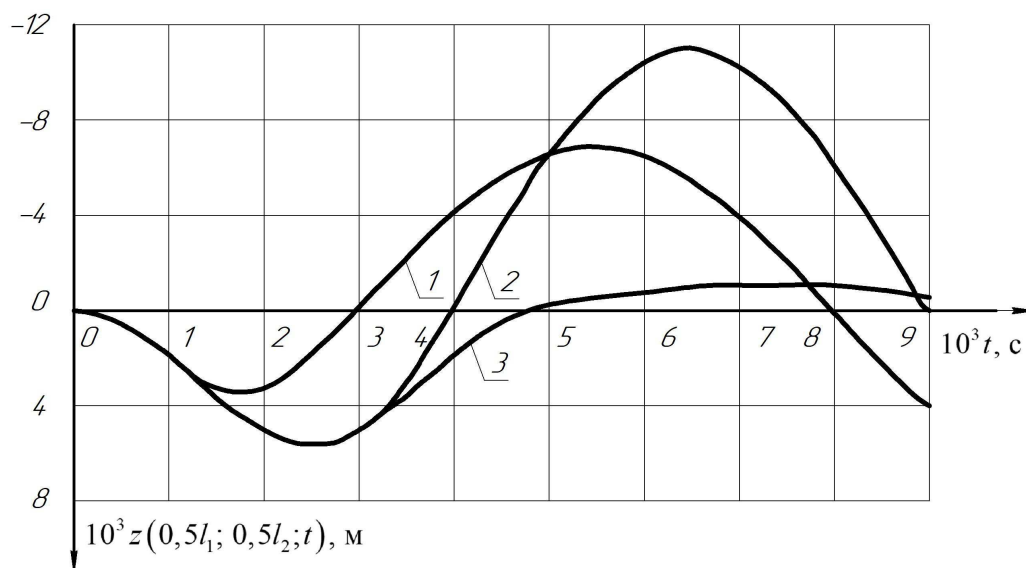


Рис. 1. – Прогини центру мембрани при різних t_1 : 1 – $t_1 = 10^{-3}$ с; 2 – $t_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ с; 3 – $t_1 = 4,8 \cdot 10^{-3}$ с.

Указані в табл. 1 екстремуми попадають на графіки як відповідні точки, що підтверджує вірогідність аналітичних розв'язків.

Динаміка круглї мембрани. Її вертикальні прогини $z = z(r, t)$ при вісесиметричному навантаженні описуємо диференціальним рівнянням:

$$-T_* \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \right) + c_f z + \rho_* \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = q J_0 \left(\frac{s \cdot r}{R} \right) [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (11)$$

Тут r – радіальна координата; R – радіус мембрани; $J_0(z)$ – функція Бесселя першого роду індексу нуль; s – найменший додатній корінь рівняння:

$$J_0(s) = 0.$$

Решту позначень увели раніше.

Значимо, що в [7] $s \approx 2,4048256$.

Рівняння (11) описує рух мембрани лише при її контакті з двопараметричною пружною основою. Його розв'язок подаємо добутком:

$$z(r, t) = A(t) \cdot J_0 \left(\frac{s}{R} r \right), \quad (12)$$

у якому $A(t)$ – невідома функція часу t .

Після підстановки (12) в (11), одержуємо:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + K^2 A = \frac{q}{\rho_*} [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (13)$$

Тут $K = \sqrt{\frac{1}{\rho_*} \left(T_* \frac{s^2}{R^2} + c_f \right)}$ – частота коливань кругової мембрани при двобічному контакті з основою.

По аналогії з (5), розв'язок рівняння (13), що задовольняє нульовим початковим умовам, подаємо в формі:

$$A(t) = \begin{cases} z_{ck} (1 - \cos(Kt)), & t \leq t_1; \\ 2z_{ck} \sin \frac{Kt_1}{2} \sin \left(K \left(t - \frac{t_1}{2} \right) \right), & \text{при} \\ & t \geq t_1, \end{cases} \quad (14)$$

де $z_{ck} = \frac{q}{T_* \frac{s^2}{R^2} + c_f}$ – статичний прогин центру мембрани, спричинений тиском $q(r) = q J_0 \left(s \frac{r}{R} \right)$.

Як і раніше, значення t_1 обмежуємо нерівністю $t_1 < 2\pi / K$. Тоді розв'язок (14) має чинність при $t \in (0; t^*)$, де:

$$t^* = \frac{\pi}{K} + \frac{t_1}{2}.$$

У відповідності з (12), (14) максимальний прогин центру мембрани вниз, куди спрямований силовий імпульс, становить:

$$a_0(t_1) = \begin{cases} 2z_{ck} \sin \frac{Kt_1}{2}, & t_1 \leq \pi / K; \\ 2z_{ck}, & t_1 \geq \pi / K. \end{cases} \quad (15)$$

Час t_e досягнення цього прогину можна знайти за формулами: $t_e = \frac{\pi}{2K} + \frac{t_1}{2}$, коли $t_1 \leq \pi / K$, і $t_e = \pi / K$, коли $t_1 > \pi / K$.

У вихідне положення $z(r, t) = 0$ мембрана повертається при $t = t^*$ зі швидкістю в центрі $r = 0$:

$$-v_0 = \left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=t^*} = -2z_{ck} K \sin \frac{Kt_1}{2}. \quad (16)$$

Подальший рух центру мембрани описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + k^2 A = 0, \quad (17)$$

у якому $k = \frac{s}{R} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – частота вільних коливань круглї мембрани без основи.

Розв'язок рівняння (17), з урахуванням (16), подаємо в формі:

$$A(t) = -2z_{ck} \frac{K}{k} \sin \frac{Kt_1}{2} \sin(k(t-t^*)).$$

Із нього випливає, що амплітуда прогину мембрани вгору становить:

$$a_1(t_1) = 2z_{ck} \frac{K}{k} \sin \frac{Kt_1}{2} \quad (18)$$

і досягається при:

$$t = t_m = \frac{\pi}{2K} + t^*.$$

Згідно з (15), (18), відношення амплітуд прогину мембрани, при $t_1 < \pi/K$, дорівнює:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{K}{k} = \text{const.}$$

Воно залежить від t_1 , коли $t_1 \in (\pi/K; 2\pi/K)$, бо тоді:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{K}{k} \sin \frac{Kt_1}{2}.$$

Таким чином, умовою прояву динамічного ефекту несиметрії пружної характеристики системи, коли $a_1(t_1) > a_0(t_1)$, є виконання нерівності $K > k$. При цьому тривалість дії імпульсу повинна попадати в інтервал $t_1 \in (0; t_T)$, де:

$$t_T = \frac{2}{K} \left(\pi - \arcsin \frac{k}{K} \right).$$

Приклад 2. Беремо для розрахунку круглу мембрану з радіусом $R = 0,5$ м. Решту числових даних залишаємо тими, що в попередньому прикладі. Для них: $K = 1276,5772 \text{ с}^{-1}$; $k = 680,1874 \text{ с}^{-1}$; $z_{ck} = 0,002808$ м; $t_T = 0,004042$ с; $K/k = 1,8768$. Розраховані графіки залежностей амплітуд прогинів центру мембрани від тривалості дії імпульсу в безрозмірних координатах подано на рис. 2.

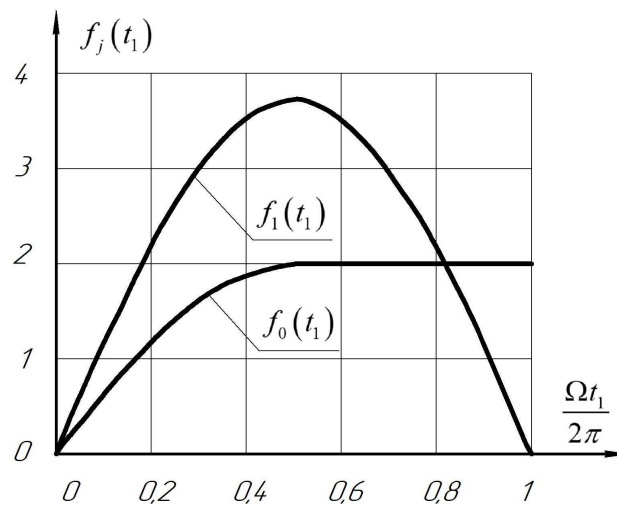


Рис. 2. – Графіки функцій $f_j(t_1) = \frac{a_j(t_1)}{z_{ck}}$; $j = 0; 1$.

Якщо розглядати $f_0(t_1)$ і $f_1(t_1)$ як коефіцієнти динамічності прямої дії та зворотної реакції, то найбільше значення $f_0(t_1) = 2$, що відомо в динаміці лінійних систем. Найбільше значення коефіцієнта динамічності зворотної реакції суттєво більше двох, що є наслідком несиметрії пружної характеристики системи.

Узагальнення. Вище припускали, що тривалість дії імпульсу не перевищує періоду основного тону коливань мембрани, підкріпленої двобічною основою. Але одержані формули можна використовувати для розрахунку коливань мембрани при довільних тривалостях прямокутного імпульсу, якщо в них замінити t_1 і t відповідно на $t_1 - \frac{2\pi n}{\Omega}$ і $t - \frac{2\pi n}{\Omega}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Тоді формули стануть придатні для обчислення переміщень прямокутної

мембрани на проміжку $t \in \left(\frac{2\pi n}{\Omega}; \frac{2\pi(n+1)}{\Omega} \right)$ при умові, що розвантаження мембрани відбувається теж на цьому проміжку, тобто $t_1 \in \left(\frac{2\pi n}{\Omega}; \frac{2\pi(n+1)}{\Omega} \right)$. Це стосується і круглої мембрани, якщо замінити Ω на частоту K .

Висновки. Дослідження показало, що для прямокутної та круглої мембран, підкріплених однобічною пружною основою, існують такі тривалості імпульсного навантаження, коли прогини мембрани в напрямі дії імпульсу менші за прогини її у протилежному напрямі, що є проявом динамічного ефекту несиметрії пружної характеристики коливальної системи.

Список літератури

1. Воронай А. В. Идентификация нестационарной сосредоточенной нагрузки, воздействующей на прямоугольную мембрану // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. Технологии в машиностроении. – 2000. – Вып. 124. – С. 95 – 99.
2. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Шарпата А. С. Идентификация внешней нагрузки, действующей на круговую мембрану // Автомобильный транспорт. – 2001. – Вып. 7 – 8. – С. 226 – 229.
3. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембраны несущей несколько сосредоточенных масс // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 54 (960). – С. 209 – 216.
4. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Колебания мембраны, контактирующей с упругим основанием, при импульсном нагружении // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. – № 37 (1010). – С. 223 – 230.
5. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М. : Физматгиз, 1960. – 492 с.
6. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л. : Машиностроение, 1976. – 320 с.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
8. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при механічному ударі // Вібрації в техніці та технологіях. – 2018. – № 2 (89). – С. 36 – 40.
9. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про динамічний ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при імпульсному навантаженні // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – 2018. – № 33 (1309). – С. 37 – 42.

References (transliterated)

1. Voropay A. V. Identifikatsiya nestatsionarnoy sosredotochennoy nagruzki, vozdeystviyushhey na pryamougol'nyuyu membranu [Identification of non-stationary concentrated load acting on a rectangular membrane]. *Vestnik Khar'kovskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. Tekhnologii v mashinostroyenii* [Bulletin of the Kharkov State Polytechnic University. Technologies in mechanical engineering]. 2000, vol. 124, pp. 95–99.
2. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Sharapata A. S. Identifikatsiya vneshney nagruzki, deystviyushhey na krugovuyu membranu [Identification of the external load acting on a circular membrane]. *Avtomobil'nyy transport* [Automobile transport]. 2001, vol. 7–8, pp. 226–229.
3. Yanyutin E. G., Egorov P. A. Nestatsionarnyye kolebaniya membrany nesushhey neskol'ko sosredotochennykh mass [Unsteady vibrations of the membrane carrying several concentrated masses]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2012, no. 54 (960), pp. 209–216.
4. Yanyutin E. G., Egorov P. A. Kolebaniya membrany, kontaktiruyushhey s uprugim osnovaniem, pri impul'snom nagruzenii [Oscillations of membrane in contact with elastic base under pulsed loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2013, no. 37 (1010), pp. 223–230.
5. Vlasov V. Z., Leont'ev N. N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on an elastic foundation]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 492 p.
6. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of applied theory of vibrations and shock]. Leningrad, Mashinostroyeniye Publ., 1976. 320 p.
7. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
8. Ol'shans'kiy V. P., Ol'shans'kiy S. V. Pro efekt nesymetriyi sylovoyi kharakterystyky kolyval'noyi systemy pry mekhanichnomu udari [On the effect of asymmetry of the power characteristic of the vibrational system during mechanical impact]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Vibrations in technic and technologies]. 2018, no. 2 (89), pp. 36–40.
9. Ol'shans'kiy V. P., Ol'shans'kiy S. V. Pro dynamichnyy efekt nesymetriyi sylovoyi kharakterystyky kolyval'noyi systemy pry impul'snomu navantazhenii [On the dynamic effect of asymmetry of the power characteristic of the oscillatory system under pulsed loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. 2018, no. 33 (1309), pp. 37–42.

Надійшла (received) 09.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Сліпченко Максим Володимирович (Слипченко Максим Владимирович, Slipchenko Maksym Volodimirovich) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 712-09-89; e-mail: Slipchenko_M@ukr.net.