UDC 517.521.1; 511.26

I. A. TOKMAKOVA

REPRESENTATION OF REAL NUMBERS BY FIBONACCI SEQUENCE

The paper deals with imaging of real numbers by the Fibonacci sequence. An algorithm for changing from decimal representation of a number to its F – image is developed. The application of the algorithm is demonstrated by considering several specific examples. The correlation between binary numbers and numbers given as their F – images is analyzed.

Key words: Fibonacci sequence, recurrence formulae, F - image of a real number, decimal number system, binary number system.

І. А. ТОКМАКОВА

ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ З ДОПОМОГОЮ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФІБОНАЧЧІ

У даній роботі описано зображення дійсних чисел за допомогою послідовності Фібоначчі. Запропоновано алгоритм переходу від десяткового представлення числа до F – зображення. Продемонстровано дію алгоритму на декількох конкретних прикладах. Проаналізовано зв’язок двійкового зображення з F – зображенням дійсного числа.

Ключові слова: послідовність Фібоначчі, рекурентні співвідношення, Ф - зображення дійсного числа, десяткова система числення, двійкова система числення.

И. А. ТОКМАКОВА

ИЗОБРАЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФИБОНАЧЧИ

В данной работе описано изображение действительных чисел с помощью последовательности Фибоначчи. Предложен алгоритм перехода от десятичного представления числа к F – изображению. Работа алгоритма продемонстрирована на нескольких конкретных примерах. Проанализирована связь двоичного и F – изображения действительного числа.

Ключевые слова: последовательность Фибоначчи, рекуррентное соотношение, Ф - изображение действительного числа, десятичная система счисления, двоичная система счисления.

Introduction. Nowadays a vast diversity of *number representation systems* is used in mathematics and its applications. There are systems exploiting either finite of infinite sets of digits, as well as systems based on a single number or infinite number sequence.

Among the number representation systems the *two-symbol systems* (systems with binary alphabet) are numerous and are supposed to be convenient from the technical point of view. Some of the two-symbol systems are of zero redundancy, like the classical $0-1$ based binary system. Hence, the interest to the systems of non-zero redundancy is natural. The systems with comparatively simple geometry are of interest as well since they are more convenient when dealing with mathematical objects of complicated structure, in particular those with fractal properties.

In order to obtain simple and convenient for applications number representation system we propose using *the Fibonacci sequence*, i.e. the sequence which terms starting from the third one equal the sum of the two preceding terms of the same sequence. We consider the representation of real numbers by the number series which terms are reciprocal to the terms of *the Fibonacci series*.

Analysis of the previous results. The representations of real numbers using the Fibonacci sequence were studied by mathematicians at different times. In particular, the irrationality of the sum of the number series with terms reciprocal to *the Fibonacci numbers* was studied by *M. Prevost* [1], the Fibonacci imaging of real numbers and its geometry was discussed by *M. V. Pratsovytyy* and *N. M. Vasylenko* [2, 3, 4], the generalized Fibonacci sequences were studied by *D. M. Kravatskyy* [5, 6].

In recent decades the theories of imaging of real numbers using positive or alternating series have been developed by various scientists. Thus imaging of real numbers by *the Ostrogradsky-Serpinskyy-Pierce series* were studied in the papers by *S. Albeverio*, *J. V. Baranovskyy*, M. V. Pratsovyty, *G. M. Torbin* [7, 8], *the 2-nd kind Ostrogradsky series* were used by M. V. Pratsovyty [9], the applications of *Engel expansions* were discussed by M. V. Pratsovyty and *B. I. Getman* [10], *the positive Lüroth series* were used by *Yu. I. Zhyhkhareva*, M. V. Pratsovyty [11], *the alternating Lüroth series* were considered by *S. Kalpazidou*, *A. Knopfmacher* [12], *Yu. V. Khvorostina* [13].

Purpose of the paper. The purpose of the paper is to explore the theoretical knowledge on the transition from F – image of a real number to its decimal representation and backwards, to develop an algorithm for transiting from the decimal representation of a number to its F – image, and to study the connection between the binary representation of a number and its F – image.

Main results. Let $u_0 = 1, \quad u_1 = 1$,

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ n \ge 2 \ . \qquad (1)$$

Recurrent formula (1) determines the classical sequence of the Fibonacci numbers. Consider the number series with the terms reciprocal to the respective Fibonacci numbers (1) (see [14]):

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{u_i}=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_n}+\ldots. \qquad (2)$$

Series (2) was studied by different mathematicians (*M. Laisant*, *P. Erdos* and *R. L. Graham* [15]); in particular, the French mathematician Mark Prevost proved that the sum of the series is irrational. In 1978 he computed the sum to be approximately equal to $2,35988566...$. Due to this fact the sum of series (2) is sometimes referred to as Prevost constant [14].

Theorem 1. [16]. *An arbitrary real number* $x\in[0;S]$, *where* $S=2,35988566\ldots$, *admits the following expansion:*

$$x=\sum_{k\in\mathbb{L}}^{\infty}\frac{1}{u_k}, \qquad (3)$$

where $\mathbb{L}\subseteq\mathbb{N}$.

Proof. Let x be an arbitrary real number from the interval $[0;S]$. If $x=S$, then $\mathbb{L}=\mathbb{N}$ and equality (3) is obviously true.

Let $0<x<S$. Then there exists $k_1\in\mathbb{N}$ such that

$$\frac{1}{u_{k_1}}<x<\frac{1}{u_{k_1-1}};$$

and the following inequality holds:

$$0\le x-\frac{1}{u_{k_1}}=x_1<\frac{1}{u_{k_1-1}}-\frac{1}{u_{k_1}}.$$

Hence,

$$x=\frac{1}{u_{k_1}}+x_1, \qquad (4)$$

for some $x_1\in\left[0;\frac{1}{u_{k_1-1}}-\frac{1}{u_{k_1}}\right)$. If $x_1=0$, then $x=\frac{1}{u_{k_1}}$ and equality (3) is true. If $x_1>0$, then there exists $k_2\in\mathbb{N}$ such that:

$$\frac{1}{u_{k_2}}<x<\frac{1}{u_{k_2-1}},$$

and $k_2>k_1$ (since $x_1<x$ and the sequence $\left\{\frac{1}{u_n}\right\}$ is monotonously decreasing). Then

$$0\le x_1-\frac{1}{u_{k_2}}=x_2<\frac{1}{u_{k_2-1}}-\frac{1}{u_{k_2}},$$

which implies $x_1=\frac{1}{u_{k_2}}+x_2$, for $x_2\in\left[0;\frac{1}{u_{k_2-1}}-\frac{1}{u_{k_2}}\right)$.

Substituting x_1 in (4) we get

$$x=\frac{1}{u_{k_1}}+\frac{1}{u_{k_2}}+x_2. \qquad (5)$$

If $x_2=0$, then we arrive at (3), which in this case becomes: $x=\frac{1}{u_{k_1}}+\frac{1}{u_{k_2}}$.

If $x_2>0$, then there exists $k_3>k_2$, $k_3\in\mathbb{N}$ such that

$$\frac{1}{u_{k_3}}\le x_2<\frac{1}{u_{k_3-1}}.$$

Arguing as above, we compute $x_3, x_4, \ldots$.

If at some n – th step we get

$$x_n=x_{n-1}-\frac{1}{u_{k_n}}=0,$$

then expansion (3) has finite number of non-zero term:

$$x=\frac{1}{u_{k_1}}+\frac{1}{u_{k_2}}+\ldots+\frac{1}{u_{k_n}}.$$

In case there is no such integer *n* for which $x_n=0$, then

$$0<x_n=x_{n-1}-\frac{1}{u_{k_n}}<\frac{1}{u_{k_n-1}}-\frac{1}{u_{k_n}},$$

and there is $k_{n+1}>k_n$, $k_{n+1}\in\mathbb{N}$ such that

$$\frac{1}{u_{k_{n+1}}}\le x_n<\frac{1}{u_{k_{n+1}-1}}.$$

Hence,

$$0\le x_n-\frac{1}{u_{k_{n+1}}}=x_{n+1}<\frac{1}{u_{k_{n+1}-1}}-\frac{1}{u_{k_{n+1}}}$$

and

$$x=\frac{1}{u_{k_1}}+\frac{1}{u_{k_2}}+\ldots+\frac{1}{u_{k_{n+1}}}+x_{n+1}.$$

Since $\frac{1}{u_{k_{n+1}-1}}-\frac{1}{u_{k_{n+1}}}\to 0$, then $x_{n+1}\to 0\left(n\to\infty\right)$. Thus Theorem 1 is proved.

Corollary. [4]. For an arbitrary $x\in[0;S]$ there exists a sequence $\{f_k\}$, $f_k\in\{0,1\}$ such that

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{u_k}=\frac{f_1}{u_1}+\frac{f_2}{u_2}+\ldots+\frac{f_k}{u_k}+\ldots. \tag{6}$$

Lemma 1. [16]. *Given a sequence* $\{f_k\}$, $f_k\in\{0,1\}$, *the series* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{u_k}$ *converges to a number* $x\in[0;S]$.

The statement of Lemma 1 follows from the inequality:

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{0}{u_k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{u_k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u_k}=S,$$

where $f_k\in\{0,1\}$.

Definition 1. The $F-$ *representation* (or $F-$ *expansion*) of a number $x\in[0;S]$ is the representation of the number x be the series:

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{u_k},\quad f_k\in\{0,1\}. \tag{7}$$

Here and below the symbol:

$$x=\Delta^F_{f_1\ldots f_k\ldots} \tag{8}$$

is used to denote the $F-$ expansion of the number x. $\Delta^F_{f_1\ldots f_k\ldots}$ is also referred to as an $F-$ *image* of x, the number f_k is called the $k-$*th number of the* $F-$ *image of* x.

Lemma 1 suggests the algorithm of transiting form the $F-$ image of a real number to its decimal representation. The natural problem which thus arrises is the one of the backwards transition: from the decimal representation to the $F-$ image. That is why we now deal with developing an algorithm of constructing an $F-$ image of a real number given its decimal representation.

Using the corollary of Theorem 1 and Lemma 1, we transit from the $F-$ image of a real number to its decimal representation.

The corollary of Theorem 1 implies that

$$x=\frac{f_1}{u_1}+\frac{f_2}{u_2}+\ldots+\frac{f_k}{u_k}+\ldots=\Delta^F_{f_1\ldots f_k\ldots},$$

$$f_k\in\{0,1\},\ f_1=0,\ x\in[0;S],\text{ with } S=1{,}35988566\ldots,$$

$$u_1=1,\ u_2=2,\ u_3=3,\ u_4=5,\ \ldots,\ u_k=u_{k-1}+u_{k-2},\ k\ge 3.$$

Example 1. Find the decimal representation of the number $x=\Delta^F_{0011(0)}$.

By the definition of the $F-$ image of a real number (7) we write:

$$x = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0 + \ldots + 0 = \frac{5}{6} = 0{,}8(3).$$

Thus $x = \Delta^F_{0011(0)} = 0{,}8(3)$.

Until recently no recurrent algorithm for trasiting from decimal representation of a number to its F – image existed. We describe it below.

Let x be an arbitrary real number from the interval $[0; S]$ and

$$f_1 = [x], \quad x_1 = x - f_1,$$

where $[x]$ stands for the integer part of x, i.e. the greatests integer less than or equal to x.

We set by recurrence:

$$f_{n+1} = [u_{n+1} x_n], \quad x_{n+1} = (u_{n+1} x_n - f_{n+1}) \frac{1}{u_{n+1}}.$$

The termination step of the algorithm is when $x_n = 0$, it is infinite otherwice.

Example 2. Find the F – image of the decimal number $x = 0{,}8(3)$.

$$f_1 = [0{,}8(3)] = 0, \quad x_1 = 0{,}8(3) - 0 = 0{,}8(3);$$

$$f_2 = [2 \cdot 0{,}8(3)] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{5}{6} - 1\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{3}\right] = 1, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right)\frac{1}{3} = 0.$$

Hence, $x = 0{,}8(3) = \Delta^F_{011(0)}$.

Example 3. Find the F – image of the decimal number $x = 0{,}7$.

$$f_1 = [0{,}7] = 0, \quad x_1 = 0{,}7 - 0 = 0{,}7;$$

$$f_2 = [2 \cdot 0{,}7] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{7}{10} - 1\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{5};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{5}\right] = 0, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{5} - 0\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{5};$$

$$f_4 = \left[5 \cdot \frac{1}{5}\right] = 1, \quad x_4 = \left(5 \cdot \frac{1}{5} - 1\right)\frac{1}{5} = 0;$$

Hence, $x = 0{,}7_{10} = \Delta^F_{0101}$.

When applying the algorithm for finding an F – image of a real number it is not always possible to get the F – image with the least number of terms.

Example 4. Find the F-image of the number $x = \frac{8}{15}$.

$$f_1 = \left[\frac{8}{15}\right] = 0, \quad x_1 = \frac{8}{15} - 0 = \frac{8}{15};$$

$$f_2 = \left[2 \cdot \frac{8}{15}\right] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{8}{15} - 1\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{30};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{30} - 0\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{30};$$

$$f_4 = \left[5 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_4 = \left(5 \cdot \frac{1}{30} - 0\right)\frac{1}{5} = \frac{1}{30};$$

$$f_5 = \left[8 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_5 = \left(8 \cdot \frac{1}{30} - 0\right)\frac{1}{8} = \frac{1}{30};$$

$$f_6 = \left[13 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_6 = \left(13 \cdot \frac{1}{30} - 0\right)\frac{1}{13} = \frac{1}{30};$$

$$f_7=\left[21\cdot\frac{1}{30}\right]=0,\quad x_7=\left(21\cdot\frac{1}{30}-0\right)\frac{1}{21}=\frac{1}{30};$$
$$f_8=\left[34\cdot\frac{1}{30}\right]=1,\quad x_8=\left(34\cdot\frac{1}{30}-1\right)\frac{1}{34}=\frac{1}{255};$$
$$\ldots$$

$x=\frac{8}{15}=\Delta^F_{0100000100001\ldots}$.

On the other hand the number Δ^F_{0011} also equals $\frac{8}{15}$ since

$$\Delta^F_{0011}\equiv\frac{0}{1}+\frac{0}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}.$$

Nevertheless, this representation has less term than the one obtained by the algorithm (see Example 4).

Let us compare now the binary representation of a numbe with its $F-$ image.

Lemma 2. [4]. *Given a fixed sequence of zeroes and ones (c_n) we have*

$$\Delta^F_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}>\Delta^2_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}.$$

Proof. Apparently any sequence of zeroes and ones determines two numbers (possibly different) one of which is given in its binary representation and another one as its $F-$ image. Let x and y be two such numbers:

$$x=\Delta^F_{c_1c_2\ldots c_n\ldots},\quad y=\Delta^2_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}.$$

By the definitions of these representations we have:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{u_n},\ u_1=1,\ u_2=2,\ u_{n+2}=u_n+u_{n+1},\quad y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n}.$$

Thus for all $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{c_n}{u_n}>\frac{c_n}{2^n}.$$

Hence, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{u_n}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n}$. The equality is possible only if $c_n=0,\forall n\in\mathrm{N}$. Lemma 2 is now proved.

Lemma 3. *Given a fixed sequence of zeroes and ones (c_n) we have*

$$\Delta^F_{0c_1c_2\ldots c_n\ldots}\geq\Delta^2_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}.$$

Proof. Let x and y be two real numbers such that:

$$x=\Delta^F_{0c_1c_2\ldots c_n\ldots},\quad y=\Delta^2_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}.$$

By the definition of the binary and $F-$ representation of a real number we have:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{u_n},\ u_1=1,\ u_2=2,\ u_{n+2}=u_n+u_{n+1},\quad y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n}.$$

Noting that $u_2=2,\ u_3<2^2,\ \ldots,\ u_{n+1}<2^n,\ldots$ we deduce that for all numbers $n\in\mathbb{N}$ the following estimate holds:

$$\frac{c_n}{u_n}\geq\frac{c_n}{2^n}.$$

Hence, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{u_n}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n}$. The equality is possible only in the case $c_n=0,\forall n\in\mathrm{N}$, or $c_1=1,\ c_n=0,\forall n\geq 2$. Lemma 3 is thus proved.

Let $x=\Delta^F_{0c_1c_2\ldots c_n\beta},\ y=\Delta^2_{c_1c_2\ldots c_n\alpha}$.

Theorem 2. [3]. *Assume*

$$x_1=\Delta^F_{0c_1\beta},\ x_2=\Delta^F_{0c_1c_2\beta},\quad and\quad y_1=\Delta^2_{c_1\alpha},\ y_2=\Delta^2_{c_1c_2\alpha}. \tag{9}$$

Then $x_i>y_i$ *for* $\alpha\leq\beta$*, and* $x_i<y_i$ *for* $\alpha>\beta,\ \forall i\in\{1,2\}$.

Proof. From Lemma 3 it follows that if $\alpha\leq\beta$ in (9) then $x_i>y_i,\ \forall i\in\{1,2\}$. Consider the case $\alpha>\beta$, which is only possible if $\alpha=1,\ \beta=0$. Then

1) $x_1=\frac{c_1}{2},\ y_1=\frac{c_1}{2}+\frac{1}{4}$ and $x_1<y_1,\forall c_i\in\{0,1\}$, which is obvious;

2) $x_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3}$, $y_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{1}{8}$ and since $\frac{8c_2}{24} < \frac{6c_2 + 3}{24}$, $\forall c_1, c_2 \in \{0, 1\}$, then $x_2 < y_2$.

Thus Theorem 2 is proved.

Conclusions. In the paper the examples of transferring from the F – image of a real number to its decimal representation are presented. The algorithm for transferring from the decimal to F – representation of a real number is developed. Several examples of the algorithm applications are proposed. The correlation between binary numbers and numbers given as their F – images is analyzed.

Bibliography

1. *Matala-aho T., Prevost M.* Irrationality measures for the series of reciprocals from recurrence sequences // Journal of Number Theory. – 2002. – Vol. 96. – No 2. – P. 275 – 292.
2. *Працьовитий М. В., Василенко Н. М.* Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 9. – С. 171 – 181.
3. *Василенко Н. М.* Деякі метричні співвідношення, породжені Ф–зображенням дійсних чисел // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 192 – 194.
4. *Василенко Н. М.* Фібоначчієве подання дійсних чисел // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 2. – С. 1 – 12.
5. *Карвацький Д. М., Василенко Н. М.* Математичні структури у просторах узагальнених послідовностей Фібоначчі // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2012. – Т. 13. – № 1. – С. 118 – 127.
6. *Карвацький Д. М.* Про один клас узагальнених послідовностей Фібоначчі та ряди, що з ними пов'язані // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2015. – Т. 17. – № 1. – С. 186 – 201.
7. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorf-Besicovitch dimension // Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2004. –Vol. 24. – No 1. – P. 1 – 16.
8. *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59. – № 9. – С. 1155 – 1168.
9. *Працьовита І. М.* Про розклади чисел в знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-го та 2-го виду // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61. – № 7. – С. 958 – 968.
10. *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 105 – 116.
11. *Жихарєва Ю. І., Працьовитий М. В.* Зображення чисел знакододатними рядами Люрота : основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Наук. часоп. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 9. – С. 200 – 211.
12. *Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Metric properties of alternating Lüroth series // Portugal. Math. – 1991. – Vol. 48. – No 3. – P. 319 – 325.
13. *Хворостіна Ю. В.* Концептуальні основи дослідження розподілів випадкових величин, пов'язаних зі знакозмінними рядами Люрота // Фізико-математична освіта. – 2015. – Вип. 2. – С. 73 – 81. – Режим доступу : http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2015_2_11. – Дата звертання : 12 квітня 2019.
14. Numerical constants. – Режим доступу : http://www.numericana.com/answer/constants.htm. – Дата звертання : 12 травня 2019.
15. *Erdös P., Graham R.* Old and new problems and results in combinatorial number theory – Geneve : Monographies de l'EnseignementMath, 1980. – No. 28. – 128 p.
16. *Працьовитий М. В.* Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел // Студентські фізико-математичні етюди. – 2010. – № 9. – С. 6 – 16.

References (transliterated)

1. Matala-aho T., Prevost M. Irrationality measures for the series of reciprocals from recurrence sequences. *Journal of Number Theory*. 2002, vol. 96, no. 2, pp. 275–292.
2. Prats'ovytyy M. V., Vasylenko N. M. Matematychni struktury v prostori poslidovnostey Fibonachchi [Mathematical structures in Fibonacci sequence space]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2008, no. 9, pp. 171–181.
3. Vasylenko N. M. Deyaki metrychni spivvidnoshennya, porodzheni F–zobrazhennyam diysnykh chysel [Some metric relations generated by Φ – images of specific numbers]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2006, no. 7, pp. 192–194.
4. Vasylenko N. M. Fibonachchiyeve podannya diysnykh chisel [Fibonacci representation of some specific numbers]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2007, no. 2, pp. 1–12.
5. Karvats'kyy D. M., Vasylenko N. M. Matematychni struktury u prostorakh uzagal'nenykh poslidovnostey Fibonachchi [Mathematical structures in Fibonacci generalized sequence space]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2012, vol. 13, no. 1, pp. 118–127.
6. Karvats'kyy D. M. Pro odyn klas uzahal′nenykh poslidovnostey Fibonachchi ta ryady, shcho z nymy pov″yazani [On a class of generalized Fibonacci sequences and associated series]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2015, vol. 17, no. 1, pp. 186–201.
7. Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorf-Besicovitch dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 2004, vol. 24, no. 1, pp. 1–16.
8. Baranovs'kyy O. M., Prats′ovytyy M. V., Torbin H. M. Topoloho-metrychni vlastyvosti mnozhyn diysnykh chysel z umovamy na yikh rozklady v ryady Ostrohrads′koho [Topological and metric properties of sets of real numbers with conditions on their Ostrogradsky series expansion]. *Ukr. mat. Zhurn* [Ukrainian Mathematical Journal]. 2007, vol. 59, no. 9, pp. 1155–1168.
9. Prats'ovytyy M. V. Pro rozklady chysel v znakozminni s-adychni ryady i ryady Ostrohrads'koho 1-go ta 2-go vydu [On expansion of numbers into alternating s-adic series and 1-st and 2-nd kind Ostrogradsky series]. *Ukr. mat. Zhurn* [Ukrainian Mathematical Journal]. 2009, vol. 61, no. 7, pp. 958–968.
10. Prats'ovytyy M. V., Get'man B. I. Ryady Enhelya ta yikh zastosuvannya [Engel series and their applications]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky.* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2006, no. 7, pp. 105–116.
11. Zhykharyeva Yu. I., Prats'ovytyy M. V. Zobrazhennya chysel znakododatnymy ryadamy Lyurota : osnovy topoloho-metrychnoyi, fraktal'noyi i

ymovirnisnoyi teoriy [Imaging of numbers by positive Lüroth series: fundamentals of topological and metric, fractal, and probability theories]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Dragomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2008, no. 9, pp. 200-211.

12. Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J. Metric properties of alternating Lüroth series. *Portugal. Math.* 1991, vol. 48, no. 3, pp. 319–325.

13. Khvorostina Yu. V. Kontseptual'ni osnovy doslidzhennya rozpodiliv vypadkovykh velychyn, pov"yazanykh zi znakozminnymy ryadamy Lyurota [Conceptual bases of studying distribution of random variables associated with alternating Lüroth series]. *Fizyko-matematychna osvita* [Physical and Mathematical Education]. 2015, issue. 2, pp. 73–81. – Available at : http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2015_2_11 (accessed : 12.05.19)

14. Numerical constants. – Available at : http://www.numericana.com/answer/constants.htm (accessed : 12.04.19).

15. Erdös P., Graham R. *Old and new problems and results in combinatorial number theory*. Geneve : Monographies de l'EnseignementMath, 1980, no. 28. 128 p.

16. Prats'ovytyy M. V. Dvosymvol'ni systemy zobrazhennya (koduvannya) diysnykh chysel [Two-symbol representation systems (coding) of real numbers] *Students'ki fizyko-matematychni etyudy* [Students' sketches in physics and mathematics]. 2010, no. 9, pp. 6–16.

Received (надійшла) 17.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna) – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 630-07-43; e-mail: irina777111@ukr.net.

УДК 519.6

N. V. CHEREMSKAYA

DEPENDENCE OF PROGNOSIS AND FILTRATION FAILURE ON DIFFERENT VALUES OF PARAMETERS FOR SOME CLASSES OF NON-STATIONARY RANDOM SEQUENCES

The article continues the study of estimates of random functions at a future moment of time, linear with respect to the values of pre-histories of processes. The article considers the dependence of the mean square of the forecast error of a random sequence on the last value at different values of the parameters. For non-stationary random sequences, even with correlation functions of the simplest form, such studies haven't been conducted. To obtain representations of correlation functions, a Hilbert approach is used to calculate correlation functions as scalar products in the corresponding Hilbert space. Investigations of the dependence of the mean square of the prediction error of a random sequence on the last value at various values of the parameters discussed in the article can be used to simulate filtration and prognosis processes in real systems in the case of non-stationary random signals.

Key words: correlation function, mathematical expectation, prognosis and filtering of non-stationary random sequences and processes, mean square error.

Н. В. ЧЕРЕМСЬКА

ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОМИЛКИ ПРОГНОЗУ І ФІЛЬТРАЦІЇ ВІД РІЗНИХ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Продовжуються дослідження оцінок випадкових функцій в майбутній момент часу, лінійних відносно значень передісторій процесів. У статті розглядається залежність середнього квадрату помилки прогнозу випадкової послідовності за останнім значенням при різних значеннях параметрів. Для нестаціонарних випадкових послідовностей, навіть з кореляційними функціями найпростішого вигляду, такі дослідження не проводились. Для отримання зображень кореляційних функцій використовується гільбертів підхід, який дозволяє обчислювати кореляційні функції як скалярні добутки у відповідному гільбертовому просторі. Дослідження залежності середнього квадрату помилки прогнозу випадкової послідовності за останнім значенням при різних значеннях параметрів, яка була розглянута в статті, може бути використано для моделювання процесів фільтрації та прогнозу в реальних системах у випадку нестаціонарних випадкових сигналів.

Ключові слова: кореляційна функція, математичне очікування, прогноз та фільтрація нестаціонарних випадкових послідовностей і процесів, середня квадратична помилка.

Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ

ЗАВИСИМОСТЬ ОШИБКИ ПРОГНОЗА И ФИЛЬТРАЦИИ ОТ РАЗНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Продолжается исследование оценок случайных функций в будущий момент времени, линейных относительно значений предысторий процессов. В статье рассматривается зависимость среднего квадрата ошибки прогноза случайной последовательности по последнему значению при различных значениях параметров. Для нестационарных случайных последовательностей, даже с корреляционными функциями простейшего вида, такие исследования не проводились. Для получения представлений корреляционных функций используется гильбертов подход, позволяющий вычислять корреляционные функции как скалярные произведения в соответствующем гильбертовом пространстве. Исследование зависимости среднего квадрата ошибки прогноза случайной последовательности по последнему значению при различных значениях параметров, рассмотренное в статье, может быть использовано для моделирования процессов фильтрации и прогноза в реальных системах в случае нестационарных случайных сигналов.

Ключевые слова: корреляционная функция, математическое ожидание, прогноз и фильтрация нестационарных случайных последовательностей и процессов, средняя квадратическая ошибка.

Introduction. The tasks of predicting the values of random processes (sequences) for known values in the past or the allocation of a signal on the background of random noise are partial but very important tasks of the general theory of linear transformations of a random signal. Solving the extrapolation problem with partial views of the correlation func-