УДК 519.6

А. Я. БОМБА, Ю. В. ТУРБАЛ, М. Ю. ТУРБАЛ

МОДИФІКАЦІЯ «ПІРАМІДАЛЬНОГО» МЕТОДУ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ЧАСОВИХ РЯДІВ НА ОСНОВІ $\mu\lambda$ – ПОХІДНИХ

У статті вперше введено певні узагальнення класичного поняття похідної диференційовної функції, на основі якого пропонується метод екстраполяції часових рядів. В основі цього методу лежить аналіз розділених різниць. Пропонується процедура модифікації відповідних різниць та знаходження такого їх порядку, для якого вдається знайти в певному розумінні найкраще прогнозне значення. Тоді значення вихідної функції у точці , що лежить за межами інтерполяційного інтервалу, знаходиться на основі знайденого прогнозного значення для розділених різниць за допомогою спеціальної обчислювальної процедури.

Ключові слова: екстраполяція, прогноз, розділені різниці, інтерполяція, часові ряди.

А. Я. БОМБА, Ю. В. ТУРБАЛ, М. Ю. ТУРБАЛ

МОДИФИКАЦИЯ «ПИРАМИДАЛЬНОГО» МЕТОДА ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДАННЫХ НА ОСНОВАНИИ $\mu\lambda$ – ПРОИЗВОДНЫХ

В статье впервые введены определенные обобщения классического понятия производной дифференцируемой функции, на основе которых предлагается метод экстраполяции временных рядов. В основе этого метода лежит анализ разделенных разностей. Предлагается процедура модификации соответствующих разностей и нахождения такого их порядка, для которого удается найти в определенном смысле лучшее прогнозное значение. Тогда значение исходной функции в точке, лежащей за пределами интерполяционного интервала, находится на основе найденного прогнозного значения для разделенных разностей с помощью специальной вычислительной процедуры.

Ключевые слова: экстраполяция, прогноз, разделенные разности, интерполяция, временные ряды.

A. YA. BOMBA, YU. V. TURBAL, M. YU. TURBAL

$\mu\lambda$ – DERIVATIVE BASED MODIFICATION OF «PYRAMIDAL» TIME SERIES EXTRAPOLATION METHOD

In this article, for the first time, certain generalizations of the classical derivative of a differentiable function are introduced. The method of extrapolation of time series is proposed on the basis of corresponding generalizations. The method is based on the analysis of separated differences. A procedure is proposed for modifying corresponding differences and determining the order, for which it is possible to find in certain sense the best forecast value. Then the value of the output function at a point that lies outside the interpolation interval is based on the found predictive value for the separated differences using a special computational procedure.

Key words: extrapolation, forecast, separated differences, interpolation, time series.

Вступ. При математичному моделюванні різноманітних процесів часто виникають задачі прогнозування часових рядів. На сьогодні відомими є низка кількісних підходів до прогнозування, що грунтуються на побудові прогнозу як функції від попередніх даних. Найбільш поширеними на сьогодні методами короткострокового прогнозування часових рядів є методи екстраполяції. Серед відомих методів екстраполяції можна виділити методи, що грунтуються на основі інтерполяційних многочленів (найчастіше використовується *інтерполяційний многочлен Н'ютона другого виду*), узагальнених інтерполяційних многочленів по різних системах *функції Чебишева* (многочлени, експоненти, тригонометричні функції та ін.), методи, що грунтуються на основі аналізу тренду, методи екстраполяції на основі *сплайнів* (кубічних, B – сплайнів, *кривих Без'є*), методи, що грунтуються на основі статистичних підходів [1].

При вивченні часових рядів за умов малих об'ємів даних та побудові прогнозів виникає низка проблем. Так, наприклад, за умов відсутності додаткової інформації часто неможливо зробити висновок про детермінованість чи недетермінованість процесу, що суттєво впливає на побудову його моделі. У випадку детермінованості очевидно, що для будь-якої сукупності точок існує безліч кривих, які через них проходять чи якось їх наближають, і тому складно стверджувати, що якась одна крива (модель) є саме тим законом, який вичерпно описує явище та дозволить ефективно спрогнозувати його поведінку у майбутньому.

Останніми роками з'явилась низка публікацій, де робиться спроба побудови оптимального в певному розумінні короткострокового прогнозу в деякій точці за точковими даними без прямого використання будь-яких конкретних класів екстраполяційних функцій. Відповідний метод був названий авторами «*пірамідальним*» [2 – 4]. Специфікою цієї методики є те, що при побудові прогнозу використовується максимальна кількість інформації, яка зосереджена у скінченних різницях спеціального виду. В даній роботі пропонується узагальнення пірамідального методу, що грунтується на новому підході до побудови скінченних різниць.

$\mu\lambda$ – похідні та деякі їх властивості. В основі нашої ідеї узагальнення скінченних різниць лежить наступна модифікація поняття похідної, яку ми назвали $\mu\lambda$ – похідною.

Визначення. $\mu\lambda$ – похідною деякої диференційовної функції $f(x)$ будемо називати границю виду:

$$f^{\partial}(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-\mu^*(\Delta)f(x)-\lambda^*(\Delta)}{\Delta},$$

де $\mu^*(\Delta)$, $\lambda^*(\Delta)$ є розв'язками задачі:

$$\int_{\Omega}(f(x+\Delta)-\mu^*(\Delta)f(x)-\lambda^*(\Delta))^2 p(dx)\to\min_{\lambda^*,\mu^*}. \qquad (1)$$

Очевидно, що за умови (1)

$$\lambda^*(\Delta)=(\int_{\Omega}f(x+\Delta)p(dx)-\mu^*(\Delta)\int_{\Omega}f(x)p(dx))/\int_{\Omega}p(dx),$$

$$\mu^*(\Delta)=(\int_{\Omega}f(x+\Delta)p(dx)\int_{\Omega}f(x)p(dx)/\int_{\Omega}p(dx)-\int_{\Omega}f(x+\Delta)f(x)p(dx))/$$

$$/((\int_{\Omega}f(x)p(dx))^2/\int_{\Omega}p(dx)-\int_{\Omega}f^2(x)dx). \qquad (2)$$

Зауважимо, що *інтеграл Лебега* у визначенні може бути замінений *визначеним інтегралом Рімана* на деякому скінченному інтервалі $[c,d]$. Окрім того, в деяких задачах умова (1) може бути відсутня, тоді $\mu^*(\Delta)$, $\lambda^*(\Delta)$ є параметрами. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай маємо лінійну функцію $f(x)=ax+b$. При $\mu^*(\Delta)=1,\lambda^*(\Delta)=a\Delta$.

Тоді: $\int_c^d(a(x+\Delta)+b-\mu^*(\Delta)(ax+b)-\lambda^*(\Delta))^2dx=0$. Отже, $f^{\partial}(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-\mu^*(\Delta)f(x)-\lambda^*(\Delta)}{\Delta}=$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{a(x+\Delta)+b-ax-b-a\Delta}{\Delta}=0.$$

Приклад 2. Нехай $f(x)=e^x$, $\int_{\Omega}(f(x+\Delta)-\mu^*(\Delta)f(x)-\lambda^*(\Delta))^2p(dx)=\int_c^d(e^{x+\Delta}-\mu^*(\Delta)e^x-\lambda^*(\Delta))^2dx$.

При $\mu^*(\Delta)=e^{\Delta},\lambda^*(\Delta)=0$. Маємо: $\int_c^d(e^{x+\Delta}-\mu^*(\Delta)e^x-\lambda^*(\Delta))^2dx=0$. Тоді

$$f^{\partial}(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-\mu^*(\Delta)f(x)-\lambda^*(\Delta)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{e^{x+\Delta}-\mu^*(\Delta)e^x-\lambda^*(\Delta)}{\Delta}=0.$$

Приклад 3. Нехай $f(x)=x^m$.

Тоді, використовуючи співвідношення (2), маємо:

$$\mu^*(\Delta)=1+m\Delta C+O(\Delta^2),\quad \lambda^*(\Delta)=(\int_{\Omega}f(x+\Delta)p(dx)-\mu^*(\Delta)\int_{\Omega}f(x)p(dx))/\int_{\Omega}p(dx)=$$

$$=(\int_c^d(x+\Delta)^m dx-(1+m\Delta C)\int_c^d(x)^m dx)/(d-c)=m\Delta(\int_c^d(x)^{m-1}dx-C\int_c^d(x)^m dx)/(d-c)+O(\Delta^2).$$

Отже,

$$f^{\partial}(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-\mu^*(\Delta)f(x)-\lambda^*(\Delta)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{(x+\Delta)^m-\mu^*(\Delta)x^m-\lambda^*(\Delta)}{\Delta}=mx^{m-1}(1-Cx)-mC_1,$$

$$C=(\int_c^d x^{m-1}dx\int_c^d(x)^m dx/(d-c)-\int_c^d x^{m-1}(x)^m dx)/((\int_c^d(x)^m dx)^2/(d-c)-\int_c^d(x)^{2m}dx)$$

$$C_1=(\int_c^d(x)^{m-1}dx-C\int_c^d(x)^m dx)/(d-c).$$

Розглянуті властивості $\mu\lambda$ – похідної показують, що вона, на відміну від класичної похідної, за наявності умови (1) «обнуляє» значення функцій, що мають порядок експоненційного зростання чи лінійні функції. А тому очевидно, що використання різницевих аналогів такої похідної дозволить суттєво покращити методи прогнозування, які грунтуються на використанні скінченних різниць чи певних їх модифікацій. Зокрема, застосування різницевих аналогів $\mu\lambda$ – похідної дозволить покращити пірамідальний метод екстраполяції, що був запропонований у роботах [1 – 3].

Модифікація «пірамідального» методу екстраполяції. Нехай маємо значення деякої функції $f_1, f_2, ..., f_n$, визначені в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ відповідно. Класична задача екстраполяції полягає у побудові оцінки значення цієї функції в точці $x > x_n$.

Подальше узагальнення «пірамідального» методу, описаного в роботах [1 – 4], грунтується на застосуванні відповідних $\mu\lambda$ – узагальнень скінченних різниць. Розглянемо середні точки $x_i^c = (x_i + x_{i+1})/2$, а також наступні узагальнення скінченних різниць:

$$\Delta^j f_i = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \mu_{j-1}\Delta^{j-1} f_i - \lambda_{j-1}}{r_i^j - l_i^j}, \tag{3}$$

де $r_i^j = \begin{cases} x^c_{i+j/2}, & j = 2k; \\ x_{i+[j/2]+1}, & j = 2k+1; \end{cases}$ $\quad l_i^j = \begin{cases} x^c_{i+j/2-1}, & j = 2k; \\ x_{i+[j/2]}, & j = 2k+1; \end{cases}$

$$\Delta^j f_i^c = \frac{\Delta^{j-1} f^c_{i+1} - \mu_{j-1}\Delta^{j-1} f_i^c - \lambda_{j-1}}{\hat{r}_i^j - \hat{l}_i^j}, \tag{4}$$

де

$$\hat{r}_i^j = \begin{cases} x_{i+j/2+1}, & j = 2k; \\ x^c_{i+[j/2]+1}, & j = 2k+1; \end{cases} \qquad \hat{l}_i^j = \begin{cases} x_{i+j/2}, & j = 2k; \\ x^c_{i+[j/2]}, & j = 2k+1; \end{cases}$$

$$\tilde{\Delta}^i f^c_{n-i} = \left(\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \mu_{i-2}\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \lambda_{i-2}\right)}{(r_i - c_i)(r_i - l_i)} - \mu_{i-1}\frac{\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \mu_{i-2}\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \lambda_{i-2}\right)}{(c_i - l_i)(r_i - l_i)} - \lambda_{i-2} \right) 2, \tag{5}$$

де $r_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}+1}, & i = 2k; \\ x^c_{n-\left[\frac{i}{2}\right]}, & i = 2k+1; \end{cases}$ $\quad rr_i = \begin{cases} x^c_{n-\frac{i}{2}+1}, & i = 2k; \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]+1}, & i = 2k+1; \end{cases}$ $\quad c_i = \begin{cases} x^c_{n-\frac{i}{2}}, & i = 2k; \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]}, & i = 2k+1; \end{cases}$ $\quad l_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}, & i = 2k; \\ x^c_{n-\left[\frac{i}{2}\right]-1}, & i = 2k+1; \end{cases}$

$$ll_i = \begin{cases} x^c_{n-\frac{i}{2}-1}, & i = 2k; \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]-1}, & i = 2k+1; \end{cases} \qquad i = \overline{2, n-1}.$$

						…						
					$\Delta^5 f_1$	…	$\tilde{\Delta}^5 f^c_{n-5}$					
				$\Delta^4 f_1$	$\Delta^4 f^c_1$	…	$\Delta^4 f_{n-4}$	$\tilde{\Delta}^4 f^c_{n-4}$				
			$\Delta^3 f_1$	$\Delta^3 f^c_1$	$\Delta^3 f_2$	…	$\Delta^3 f^c_{n-4}$	$\Delta^3 f_{n-3}$	$\tilde{\Delta}^3 f^c_{n-3}$			
		$\Delta^2 f_1$	$\Delta^2 f^c_1$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^2 f^c_2$	…	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^2 f^c_{n-3}$	$\Delta^2 f_{n-2}$	$\tilde{\Delta}^2 f^c_{n-2}$		
	$\Delta^1 f_1$	$\Delta^1 f^c_1$	$\Delta^1 f_2$	$\Delta^1 f^c_2$	$\Delta^1 f_3$	…	$\Delta^1 f^c_{n-3}$	$\Delta^1 f_{n-2}$	$\Delta^1 f^c_{n-2}$	$\Delta^1 f_{n-1}$		
f_1	f^c_1	f^c_1	f^c_2	f_3	f^c_3	…	f_{n-2}	f^c_{n-2}	f_{n-1}	f^c_{n-1}	f_n	
x_1	x^c_1	x_2	x^c_2	x_3	x^c_3	…	x_{n-2}	x^c_{n-2}	x_{n-1}	x^c_{n-1}	x_n	x^c_n

Рис. 1 – Таблиця модифікованих скінченних різниць.

Значення параметрів μ_{j-1} та λ_{j-1} знаходяться з умови мінімізації відповідних сум квадратів різниць (дискретного аналогу умови (1)) або загалом можуть розглядатись як деякі параметри, що знаходяться з додаткових умов.

Нехай виконується співвідношення:

$$\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = \Delta^i f_{n-i}^c . \tag{6}$$

Тоді процедура знаходження невідомого значення функції в точці x_n^c визначається так:

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+1}^c = \mu_{j-1} \Delta^{j-1} f_{n-j}^c + \Delta^j f_{n-j}^c \left(\hat{r}_{n-j}^j - \hat{l}_{n-j}^j\right) + \lambda_{j-1}, \quad j = \overline{i,1}. \tag{7}$$

Суть подальших міркувань полягає в тому, щоб визначити такий рядок таблиці модифікованих скінченних різниць (див. рис. 1), при якому співвідношення (6) виконується з мінімальною похибкою. Як було показано в роботі [1], необхідною та достатньою умовою для виконання (6) у випадку $\mu^*(\Delta) = 1, \lambda^*(\Delta) = 0$ є умова, щоб точки $\left(c_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c\right)$, $\left(l_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c\right)$, $\left(r_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c\right)$ лежали на одній прямій. Очевидно, що остання умова виконуватиметься (з точністю, яка відповідає точності наближення другої похідної скінченними різницями), якщо на інтервалі $[l_i, r_i]$ крива, що проходить через відповідні точки, являтиме собою кубічний многочлен. У випадку, коли параметри $\mu^*(\Delta), \lambda^*(\Delta)$ визначаються з умови (1), відповідна необхідна та достатня умова для виконання (6) буде іншою.

Провівши нескладні, але досить громіздкі перетворення, можна показати, що умова (6) записується у вигляді:

$$\left(\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c\right)}{(r_i - c_i)} - \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{(c_i - l_i)}\right) - \left(\frac{\left(\Delta^{i-2} f^c{}_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+2}\right)}{(rr_i - r_i)} - \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f^c{}_{n-i+1}\right)}{(r_i - c_i)}\right) \times$$

$$\times \frac{rr_i - r_i}{rr_i - c_i} - \left(\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{(c_i - l_i)} - \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c{}_{n-i}\right)}{(l_i - ll_i)}\right) \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} =$$

$$= (1 - \mu_{i-1}) \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{(c_i - l_i)} \left(\frac{c_i - l_i}{c_i - ll_i} - 2\right) +$$

$$+ (1 - \mu_{i-1}) \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c{}_{n-i}\right)}{(l_i - ll_i)} \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} + \frac{(1 - \mu_{i-2})\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \lambda_{i-2}\right)}{(r_i - c_i)} \left(\frac{r_i - c_i}{rr_i - c_i} - 2\right) - \mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) \Delta^{i-2} f_{n-i}^c - \lambda_{i-2}}{(c_i - ll_i)} +$$

$$+ 2\mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) \Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \lambda_{i-2}}{(c_i - l_i)} + \lambda_{i-1}. \tag{8}$$

Легко бачити, що при $\mu_i = 1, \lambda_i = 0, i = \overline{1,n}$, останнє співвідношення перетворюється на умову належності одній прямій точок $\left(c_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c\right)$, $\left(l_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c\right)$, $\left(r_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c\right)$, яка розглядалась у роботі [1]. Зауважимо, що співвідношення (7) не може бути використане безпосередньо для побудови прогнозу, бо $\Delta^{i-2} f_{n-i+2}$ містить невідоме прогнозне значення. Для побудови конструктивної умови виконання співвідношення (7) розглянемо неперервний аналог (7) та отримаємо рівняння:

$$f''(c_i) - f''(r_i) \frac{rr_i - r_i}{rr_i - c_i} - f''(l_i) \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} = (1 - \mu_{i-1}) f'((c_i + l_i)/2) \left(\frac{c_i - l_i}{c_i - ll_i} - 2\right) + (1 - \mu_{i-1}) f'((l_i + ll_i)/2) \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} +$$

$$+ \frac{(1 - \mu_{i-2})\left(f(c_i) - \lambda_{i-2}\right)}{(r_i - c_i)} \left(\frac{r_i - c_i}{rr_i - c_i} - 2\right) - \mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) f(ll_i) - \lambda_{i-2}}{(c_i - ll_i)} + 2\mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) \Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \lambda_{i-2}}{(c_i - l_i)} + \lambda_{i-1}. \tag{9}$$

Для рівномірної сітки отримуємо диференціальне рівняння з «запізненням» виду:

$$f''(x) - f''(x + \Delta) \frac{1}{2} - f''(lx - \Delta) \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} (1 - \mu_{i-1}) f'((x - \Delta/2)/2) + \frac{1}{2} (1 - \mu_{i-1}) f'(x - 3\Delta/2) -$$

$$- \frac{3}{2} \frac{(1 - \mu_{i-2})\left(f(x) - \lambda_{i-2}\right)}{\Delta} - \mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) f(x - 2\Delta) - \lambda_{i-2}}{2\Delta} + 2\mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) f(x - \Delta) - \lambda_{i-2}}{\Delta} + \lambda_{i-1}. \tag{10}$$

Будемо знаходити його частковий розв'язок у вигляді: $f(x) = a + e^{bx}$. При підстановці у (9) отримуємо систему рівнянь для знаходження невідомих параметрів:

$$3(\mu_{i-1}-1)\frac{1-\mu_{i-2}}{2\Delta}a = 3(\mu_{i-1}-1)\frac{\lambda_{i-2}}{2\Delta}-\lambda_{i-1},$$

$$b^2-\frac{1}{2}b^2e^{b\Delta}-\frac{1}{2}b^2e^{-b\Delta}=\frac{3}{2}(\mu_{i-1}-1)be^{-b\Delta/2}+\frac{1}{2}(1-\mu_{i-1})be^{-3b\Delta/2}-\frac{3}{2}(1-\mu_{i-2})/\Delta-\mu_{i-1}(1-\mu_{i-2})e^{-2b\Delta}/(2\Delta)+$$
$$+2\mu_{i-1}(1-\mu_{i-2})e^{-b\Delta}/\Delta.$$

Трансцендентне рівняння для невідомого параметра b має розв'язок, який можна знайти наближено. Наприклад, при $\Delta=1$, $\mu_{i-1}=1.5$, $\mu_{i-2}=6.4$ можемо отримати значення $b=-1.12$. Таким чином, бачимо, що для виконання умови (5) достатньо, щоб точки $\left(c_i, \widetilde{\Delta}^i f^c_{n-i}\right)$, $\left(l_i, \widetilde{\Delta}^i f^c_{n-i-1}\right)$, $\left(r_i, \widetilde{\Delta}^i f^c_{n-i+1}\right)$ лежали на кривій, що визначається функцією виду: $f(x)=a+e^{bx}$. Аналогічна умова для класичних різниць, як вже згадувалось вище, була пов'язана з кубічним многочленом.

Отже, можемо запропонувати наступний алгоритм екстраполяції:

1. Будується таблиця модифікованих скінченних різниць.
2. Проводиться інтерполяція функції в середніх точках, таблиця скінченних різниць доповнюється середніми значеннями.
3. Для кожного рядка таблиці скінченних різниць перевіряється умови (5), зокрема, за низкою достатніх умов, та визначається рядок, для якого похибка співвідношення (5) є мінімальною.
4. Обраховується прогнозне значення $\widetilde{\Delta}^{i^*} f^c_{n-i^*}$.
5. Знаходиться прогнозне значення функції за формулами (6).

Чисельні результати. Розглянемо приклад застосування описаного вище підходу. Нехай маємо тестову функцію $f(x)=x^6\sin(x)$, визначену в точках 1, 1.5, 2, 2.5, 3, …, 11. Аналогічний приклад був розглянутий у роботі [1]. Пірамідальний метод в [1] дозволив отримати прогнозне значення функції, рівне $-2017907{,}745$, при цьому точне значення $-2024974{,}077$. Розглянемо зараз модифікацію методу з застосуванням $\mu\lambda-$похідних. Фрагмент таблиці модифікованих розділених різниць наведено на рис. 2, відповідні значення параметрів – на рис. 3.

7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	
166943,8435	259354,3282	301149,0278	219016,6599	-55242,97922	-544021,1109	-1178876,453	-1771543,65	-2024933,995	-2024974
279154,9363	140108,7662	-128432,8304	-487000,1943	-810101,981	-891724,3434	-498434,6459	528796,955		
426487,2904	129506,3308	-357539,6943	-928773,9162	-1341712,523	-1246968,876	-295156,3383			
407728,6265	-784026,9848	-1058280,247	-984172,8286	-318194,9601	1046556,185				
686826,2732	-650551,6205	-200145,8438	740085,2868	2030729,013					
163138,8812	486680,4293	1390636,907	2158937,604						

Рис. 2 – Фрагмент таблиці модифікованих скінченних різниць.

miu_new	lamb_new
2,017187003	-175716,69
-0,924	0
1	0
1	0
1	0
1	0

Рис. 3 – Значення параметрів для $\mu\lambda-$різниць.

Як бачимо, заміна класичних різниць $\mu\lambda-$різницями у першому та другому рядку таблиці розділених різниць дозволяє отримати прогнозне значення в точці 11.5, яке рівне $-2024933{,}995$ для відповідного тестового прикладу.

Висновки. В роботі вперше введено певні модифікації класичного поняття похідної довільної диференційовної функції, назване $\mu\lambda-$похідна. Застосування різницевих аналогів $\mu\lambda-$похідної дозволило отримати модифікацію раніше запропонованого авторами «пірамідального» методу екстраполяції. Ця модифікація має суттєву перевагу у випадках, коли числовий ряд спостережень, для якого будується прогнозне значення, має експоненційний характер зростання. Чисельні результати показують суттєві переваги запропонованого методу у порівнянні з підходами до екстраполяції, які грунтуються на використанні многочленів, зокрема, многочлена Н'ютона другого виду.

Запропонована методика має загальний характер та може бути використана для екстраполяції часових рядів у довільних галузях досліджень, зокрема, при побудові короткострокових прогнозів рядів економічної динаміки.

В подальшому автори бачать перспективу у застосуванні комбінованих підходів, у яких параметри μ та λ у відповідних скінченних різницях є довільними і підбиратимуться так, щоб отримати оптимальне прогнозне значення.

Список літератури

1. *Бомба А. Я., Турбал Ю. В., Сьох А. П., Турбал М. Ю.* Метод екстраполяції на основі модифікованих розділених різниць // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія : «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». –2017. – Т. 33. – С. 36 – 51.
2. *Bomba A., Turbal Y., Turbal M., Sokh A., Radoveniuk O.* Spatial generalization of "pyramidal" data extrapolation method // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series : Physics & Mathematics. – 2017. – V. 8. – P. 112 – 119.
3. *Бомба А. Я., Турбал Ю. В.* Прогнозирование траекторий уединенных волн деформации в анизотропных упругих телах // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 3. – С. 12 – 22.
4. *Бомба А. Я., Турбал Ю. В.* Методы анализа данных и прогнозирование траекторий уединенных волн // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 5. – С. 34 – 43.
5. *Костинский А. С.* О принципах экстраполяции геофизических даннях // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – № 2. – С. 111 – 117.
6. *Levi J. C., Barody I. I.* A Comparative Study of Extrapolation Methods for Creep Data at Small Strains. – London : Her Majesty's Stationery Office. – 1969. – 29 p.
7. *Chatfield C.* Time-series Forecasting. – Chapman & Hall. – 2001. – 265 p.
8. *Armstrong J. S.* Extrapolation for Time-Series and Cross-Sectional Data. –2001. – Retrieved from : http://repository.upenn.edu /marketing_papers/148. – Дата звертання : 20 лютого 2019.
9. *Hyndman R. J., Kostenko A. V.* Minimum sample size requirements for seasonal forecasting models // FORESIGHT. – 2007. – Issue 6. – P. 12 – 15.
10. *Fine T.* Extrapolation When Very Little is Known about the Source // Terrence Fine– School of Electrical Engineering. – CorneU University, Ithaca, New York, 1970. – vol. 16. – issue 4. – pp. 331 – 359.
11. *Шалагинов А. В.* Кубическая сплайн экстраполяция временных рядов // International conference on System Analysis and Information Technologies SAIT 2011 (Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine «KPI», Kyiv, Ukraine, May 23–28, 2011). Киев : НТУУ «КПИ», 2011. – P. 397.
12. *Волков Е. А.* Замечания к приближению функций многочленами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Том 7. – № 6. – С. 1374 – 1375.

References (transliterated)

1. Bomba A. Ya, Turbal Yu. V., S'okh A. P., Turbal M. Yu. Metod ekstrapolyatsiyi na osnovi modyfikovanykh rozdilenykh riznyts' [Modified divided differences based eextrapolation method]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo universytetu im. V. N. Karazina. Seriya : "Matematychne modelyuvannya. Informatsiyni tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya"* [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Series : "Mathematical modeling. Informational technologies. Autonomous control systems"]. 2017, vol. 33, pp. 36–51.
2. Bomba A., Turbal Y., Turbal M., Sokh A., Radoveniuk O. Spatial generalization of "pyramidal" data extrapolation method. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series : Physics & Mathematics*. 2017, vol. 8, pp. 112–119.
3. Bomba A. Ya, Turbal Yu. V. Prognozirovanie traektoriy uedinennykh voln deformatsii v anizotropnykh uprugikh telakh [Predicting trajectories of solitary deformation waves in anisotropic elastic bodies]. *Problemy upravleniya i informatiki* [Problems of control and informatics]. 2014, no. 3, pp. 12–22.
4. Bomba A. Ya, Turbal Yu. V. Metody analiza dannykh i prognozirovanie traektoriy uedinennykh voln [Methods for data analyzing and predicting trajectories of solitary waves]. *Problemyi upravleniya i informatiki* [Problems of control and informatics]. 2015, no. 5, pp. 34–43.
5. Kostinskiy A. S. O printsipakh ekstrapolyatsii geofizicheskikh dannyikh [On geophysical data extrapolation principles]. *Dopovidi Natsionalnoyi Akademiyi Nauk Ukrayiny* [Reports of the National Academy of Science of Ukraine]. 2014, no. 2. pp. 111–117.
6. Levi J. C., Barody I. I. A Comparative Study of Extrapolation Methods for Creep Data at Small Strains. London, Her Majesty's Stationery Office, 1969. 29 p.
7. Chatfield C. Time-series Forecasting. Chapman & Hall, 2001. 265 p.
8. Armstrong J. S. Extrapolation for Time-Series and Cross-Sectional Data. 2001. Retrieved from http://repository.upenn.edu /marketing_papers/148. (accessed 20.02.2019).
9. Hyndman R. J., Kostenko A. V. Minimum sample size requirements for seasonal forecasting models. *FORESIGHT*. 2007, Issue 6, pp. 12–15.
10. Fine T. Extrapolation When Very Little is Known about the Source. *Information and Control*. 1970, vol. 16, issue 4, pp. 331–359.
11. Shalaginov A. V. Kubicheskaya splayn ekstrapolyatsiya vremennykh ryadov [Cubic spline interpolation of time series]. *International conference on System Analysis and Information Technologies SAIT 2011 (Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine "KPI", Kyiv, Ukraine, May 23–28, 2011)*. Kyiv, NTUU "KPI", 2011. P. 397.
12. Volkov E. A. Zamechaniya k priblizheniyu funktsiy mnogochlenami [Remarks on approximation of functions by polynomials] *Zh. vyichisl. matem. i matem. fiz.* [Journal of computational mathematics and mathematical physics]. 1967, vol. 7, no. 6, pp. 1374–1375.

Надійшла (received) 08.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бомба Андрій Ярославович (Бомба Андрей Ярославович, Bomba Andriy Yaroslavovych) – доктор технічних наук, професор, Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Турбал Юрій Васильович (Турбал Юрий Васильевич, Turbal Yuriy Vasilovich) – доктор технічних наук, професор, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (098) 084-18-80; e-mail: turbaly@gmail.com.

Турбал Маріана Юріївна (Турбал Мариана Юрьевна, Turbal Mariana Yuriivna) – аспірант, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (098) 259-48-86; e-mail: turbal.mariana 1@gmail.com.