

8. Сборник методик по расчету содержания загрязняющих веществ в выбросах от неорганизованных источников загрязнения атмосферы [Текст] Донецьк: УкрНТЭК, 1994. – 155 с.
9. Приміський, В. П. Стан та перспективи розвитку полум'яно-іонізаційного методу для вимірювання концентрації вуглеводнів [Текст] / В. П. Приміський, А. В. Жужа // Метрологія та прилади. – 2013. – № 2. – С. 45–52.
10. Приміський, В. П. Особливості застосування і контролю відповідності технологічних нормативів викидів в промисловості [Текст] / В. П. Приміський, В. М. Івасенко, Д. Г. Корнієнко // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2014. – Т. 3, № 1 (69). – С. 8–15. doi:10.15587/1729-4061.2014.24973
5. Pererabotka avtomobil'nyh shin metodom nizkotemperaturnogo proliza. Pervyj ekologichskij portal. Available at: http://www.rav.com.ua/useful_know/nature/sorting/piroliz/
6. Pokazny'ky` emisiyi vy'ky`div zabrudnyuyuchy`h rehovoy`n v atmosferne povitrya. Druga redakciya (2008). Donec`k, 1–3.
7. Sbornik metodik po raschetu vybrosov v atmosferu zagraznjajushhih veshhestv razlichnymi proizvodstvami (1986). Leningrad: Gidrometeoizdat, 162.
8. Sbornik metodik po raschetu soderzhanija zagraznjajushhih veshhestv v vybrosah ot neorganizovannyh istochnikov zagraznenija atmosfery (1994). Donec`k: UkrNTJeK, 155.
9. Pry`mis`ky`j, V. P., Zhuzha, A. V. (2013). Stan ta perspekty`vy` rozvy`tku polum'jano-ionizacijnogo metodu dlya vy`miryvannya koncentraciyi vuglevodniv. Metrologiya ta pry`lady`, 2, 45–52.
10. Pry`mis`ky`j, V. P., Ivashenko, V. M., Korniyenko, D. G. (2014). Osobly`vosti zastosuvannya i kontrolyu vidpovidnosti tehnologichny`h normaty`viv vy`ky`div v promy`slovosti. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3/1 (69), 8–15. doi:10.15587/1729-4061.2014.24973

Bibliography (transliterated):

1. Analy`z tehnology`j pererabotky` avtoshy`n. Spravochno-y`nformacy`onnaya sy`stema. Available at: <http://www.waste.ru/modules/section/item.php?itemid=140>
2. V Ukraini pravu`Г no uty`lizuyet`sya ly`she 10% avtomobil`ny`h shy`n. EcoTown. Available at: <http://ecotown.com.ua/news/V-Ukrayini-pravylno-utylizuyetsya-lyshe-10-avtomobilnykh-shyn/>
3. Pererobka. Available at: <http://pererobka.com>
4. Kuzhel`, V. P., Motolov, S. V. (2016). Resursozberezhennya za rahunok povtornogo vy`kory`stannya avtomoby`Гny`h shy`n. XLV Naukovo-tehnichna konferenciya fakul`tetu

Поступила (received) 14.01.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Дослідження методів розрахунків і інструментальний контроль викидів при піролізній переробці шин/ М. Т. Клімишина// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 4(1176). – С.116–122. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2079-5459.

Исследование методов расчетов и инструментальный контроль выбросов при пиролизной переработке шин/ М. Т. Климишина// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 4(1176). – С.116–122. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2079-5459.

Researching methods of calculation and instrumental control emissions during tire pyrolysis recycling/ М. Klimishyna// Bulletin of NTU “KhPI”. Series: Mechanical-technological systems and complexes. – Kharkov: NTU “KhPI”, 2016. – No 4 (1176). – P. 116–122. – Bibliogr.: 10. – ISSN 2079-5459.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Клімишина Марія Тарасівна – ведучий спеціаліст, науково-виробничої компанії ТОВ «АВТОЕКОПРИЛАД», вул. Межигірська, 82А, м. Київ, Україна, 04080; e-mail: mklimishyna@gmail.com.

Климишина Мария Тарасовна – ведущий специалист, научно-производственной компании ООО «АВТОЭКОПРИБОР», ул. Межигорская, 82А, г. Киев, Украина., 04080; e-mail: mklimishyna@gmail.com.

Klimishyna Mariia – the leading specialist in the scientific group LTD "AVTOEKOPRYLAD" street Mezhygorskaya, 82A, Kyiv, Ukraine, 04080; e-mail: mklimishyna@gmail.com.

УДК 517.95

Ю. Є. КЛИМЮК

ПРОГНОЗУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ РОБОТИ БАГАТОШАРОВИХ ШВИДКИХ ФІЛЬТРІВ З КУСКОВО-ОДНОРІДНИМИ ПОРИСТИМИ ЗАВАНТАЖЕННЯМИ

Запропоновано просторову математичну модель для прогнозування процесу доочистки води від багатокомпонентних домішок у багатошарових швидких фільтрах з кусково-однорідними пористими завантаженнями при додержанні сталої швидкості фільтрації. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної нелінійної сингулярно-збуреної крайової задачі. Запропонована модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів отримати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів та збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми і висоти шарів.

Ключові слова: математична модель, процес доочистки води, багатокомпонентна домішка, багатошаровий швидкий фільтр.

Предложено пространственную математическую модель для прогнозирования процесса доочистки воды от многокомпонентных примесей в многослойных скорых фильтрах с кусочно-однородными пористыми загрузками при соблюдении постоянной скорости фильтрации. Получен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей нелинейной сингулярно-возмущенной краевой задачи. Предложенная модель позволяет путем проведения компьютерных экспериментов получить оптимальные варианты использования фильтрующих материалов и увеличения продолжительности работы фильтров за счет выбора их формы и высоты слоев.

Ключевые слова: математическая модель, процесс доочистки воды, многокомпонентная добавка, многослойный быстрый фильтр.

© Ю.Є.Климюк,2016

A spatial mathematical model to predict the process of water purification from multi-components impurities in multi-layers rapid filters with piecewise-homogeneous porous loadings subject to constant rate filtration, which takes into account the reverse impact of component concentrations of multi-component impurities, adsorbed on the grains loading, on the active porosity, is proposed. In the model assumed that the convective component mass of transfer and adsorption prevail over the contribution of the diffusion and desorption. The algorithm for numerically-asymptotic approximation of the solution of the corresponding nonlinear singular-perturbed boundary problem for the spatial domain, which a having the shape of a curvilinear parallelepiped, bounded two equipotential surfaces and four surfaces of the flow, separated by some specified of the equipotential surfaces on several subdomains, is developed. The proposed model allows by conducting computer experiments to obtain optimal use of the filtering materials and the increase in the length work filters due to the choice of their form and height layers.

Keywords: mathematical model, process of water purification, multi-component impurity, multilayer rapid filter.

Вступ. Будь-яка прісна вода перед її використанням для водопостачання, зрошення земельних угідь та у інших видах господарської діяльності потребує попередньої очистки від багатоконпонентних домішок, компонентами яких можуть бути: гази, мінеральні й органічні речовини, що знаходяться в розчиненому, колоїдному і завислому станах, а також мікроорганізми. Значна частина технологій доочистки води від багатоконпонентних домішок базується на використанні швидких фільтрів із багат шаровими пористими завантаженнями [1–4]. Зростаюча вартість фільтруючих матеріалів вимагає проведення досліджень для їх більш якісного використання.

Аналіз літературних даних. До 50-х років ХХ ст. основними фільтруючими зернистими завантаженнями для очищення води були кварцові піски, які важчі за воду і тонули в ній. Ці їхні властивості визначали типи й умови роботи фільтрів. Останнім часом на додачу до традиційно використовуваного кварцового піску з'явилося багато нових матеріалів: керамзит, аглопорит, шлакова пемза, погорілі породи, вулканічні шлаки, базальтові та мармурові піски і таке інше. Різноманітні природні властивості нових фільтруючих завантажень фільтрів впливають на ефективність їхньої роботи, розміри споруд, продуктивність і т. п. У ХХІ ст. йде пошук нових фільтруючих матеріалів. У двошарових фільтрах використовують усілякі зернисті інертні матеріали, компонуючи їхні шари так, щоб верхній складався з більш легких і величезної частки. Вдається підібрати навіть тришарові завантаження (наприклад, керамічна крихта – аглопоритовий пісок – антрацит), які складаються із шарів по 0,5 м і мають сорбційну ємність крашу, ніж двошарові [1].

Методика досліджень. Розробкою теоретичних основ очистки рідин від домішок шляхом їх фільтрування через пористі завантаження та подальшим її вдосконаленням займалося чимало вітчизняних і зарубіжних вчених [5–12]. В якості математичної моделі процесу фільтрування води через пористі завантаження більшістю дослідників використовується модель Д. М. Мінца при сталій швидкості фільтрації або деяка її модифікація (вдосконала модель). У [13] запропоновано просторове узагальнення математичної моделі Д. М. Мінца, яка є більш ефективною для проведення теоретичних досліджень, націлених на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо). У [14] вона вдосконала шляхом введення додаткового рівняння для визначення зміни активної пористості завантаження вздовж висоти фільтру. Математичні моделі у [13, 14] описані просторовими сингулярно-збуреними крайовими задачами для модельних областей – криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями та чотирма поверхнями течії. Загальна методика їх розв'язання поля-

гає у наступному: поетапній фіксації характеристик і складових процесу та середовища; розв'язанні задачі фільтрації з використанням просторових аналогів конформних відображень області комплексного потенціалу на фізичну область (що включає побудову гідродинамічної сітки, поля швидкостей, обчислення величин різних перетоків тощо); переході у рівняннях конвективної дифузії і граничних та початкових умовах від фізичних змінних до координат області комплексного потенціалу, що значно спрощує їх запис і забезпечує можливість проведення автономних досліджень, розпаралелювання обчислень; розв'язанні задач конвективної дифузії з використанням числово-асимптотичних методів.

Ціль та задачі дослідження. Сформулювати математичну модельну задачу для прогнозування процесу доочистки води від багатоконпонентних домішок у багат шарових швидких фільтрах з кусково-однорідними пористими завантаженнями при додержанні сталої швидкості фільтрації, яка дозволяла б шляхом проведення комп'ютерних експериментів отримати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів та збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та висоти шарів. Отримати алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної нелінійної сингулярно-збуреної крайової задачі.

Постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0, \infty)$ ($z = (x, y, z)$), $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однозв'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$ та розділений деякими екіпотенціальними поверхнями $E_s F_s F_{*s} E_{*s} = \{z: f_{*s}^*(x, y, z) = 0\}$ ($s = \overline{1, p-1}$) на деякі p підобластей $G_2^1 = ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1}$, $G_2^s = E_s F_s F_{*s+1} E_{*s+1} E_{*s} F_{*s} F_{*s+1} E_{*s+1}$ ($s = \overline{2, p-2}$), $G_2^p = E_{p-1} F_{p-1} CDE_{*p-1} F_{*p-1} C_* D_*$ (рис. 1), розглянемо модельну задачу, описану системою рівнянь:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{ div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\sigma \cdot C_j)'_t = \text{div}(D_j \cdot \text{grad } C_j) - \vec{v} \cdot \text{grad } C_j - \\ - \sum_{k=1}^m a_{j,k} \cdot C_j + \sum_{k=1}^m a_{k,j} \cdot C_k - \alpha_j \cdot C_j + \beta_j \cdot U_j, \\ (\sigma \cdot U_j)'_t = - \sum_{k=1}^m a_{j,k}^* \cdot U_j + \sum_{k=1}^m a_{k,j}^* \cdot U_k + \alpha_j \cdot C_j - \beta_j \cdot U_j, \\ \sigma'_t = - \sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot U_j \quad (j = \overline{1, m}), (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \end{cases} \quad (2)$$

за крайових умов:

$$\begin{aligned} \varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi^*, \quad \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \\ \varphi'_n|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} C_j|_{ABB_*A_*} = C_{j^*}, \quad C'_j|_{CDD_*C_*} = 0, \\ C'_j|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \end{aligned} \quad (4)$$

початкових умов:

$$C_j|_{t=0} = c_j^0, \quad U_j|_{t=0} = u_j^0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0^0 \quad (5)$$

і умов узгодженості на поверхнях розділу $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$):

$$\begin{aligned} \varphi|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} = \varphi|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} = \varphi^*, \\ \kappa_s \cdot \varphi'_n|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} = \kappa_{s+1} \cdot \varphi'_n|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} \quad (s = \overline{1, p-1}), \\ C_j|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} = C_j|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}}, \\ U_j|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} = U_j|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}}, \\ D_{s,j} \cdot C'_j|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} - v_n^s \cdot C_j|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} = D_{s+1,j} \cdot C'_j|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} - v_n^s \cdot C_j|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}}, \\ \left(\sigma \cdot \sum_{j=1}^m (C_j + U_j) \right)'_t|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} = \left(\sigma \cdot \sum_{j=1}^m (C_j + U_j) \right)'_t|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$(s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}), \quad (7)$$

де $\varphi = \varphi(x, y, z)$ і $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації, $\varphi_* < \varphi < \varphi^*$, $0 < \varphi_* = \varphi_{*0} < \varphi_{*1} < \varphi_{*2} < \dots < \varphi_{*p-1} < \varphi_{*p} = \varphi^* < \infty$,

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > 0$, κ – коефіцієнт фільтрації, $\kappa = \{ \kappa_s, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \}$, $\kappa_s > 0$ ($s = \overline{1, p}$), \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $C_j = C_j(x, y, z, t)$ і $U_j = U_j(x, y, z, t)$ – відповідно концентрації j -тої компоненти багатокомпонентної домішки у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження; $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$ – активна пористість завантаження, D_j – власний коефіцієнт дифузії j -тої компоненти багатокомпонентної домішки у фільтраційній течії, $D_j = \{ D_{s,j}, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \}$, $D_{s,j} = \varepsilon \cdot d_{s,j}$, $d_{s,j} > 0$ ($s = \overline{1, p}$), $a_{j,k}$ і $a_{j,k}^*$ – коефіцієнти, що характеризують швидкість протікання масообмінних про-

цесів між j -тою і k -тою компонентами багатокомпонентної домішки відповідно у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, $a_{j,k} = \{ a_{s,j,k}, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \}$,

$$a_{s,j,k} = \begin{cases} \varepsilon \cdot \bar{a}_{s,j,k}, & j < k, \\ 0, & j = k, \end{cases}$$

$$a_{j,k}^* = \{ a_{s,j,k}^*, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \},$$

$$a_{s,j,k}^* = \begin{cases} \varepsilon \cdot \bar{a}_{s,j,k}^*, & j < k, \\ 0, & j = k, \end{cases} \quad \alpha_j \text{ і } \beta_j \text{ – коефіцієнти, що ха-}$$

рактеризують обсяги адсорбованої і десорбованої за одиницю часу j -тої компоненти багатокомпонентної

домішки, $\alpha_j = \{ \alpha_{s,j}, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \}$,

$$\beta_j = \{ \beta_{s,j}, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \}, \quad \beta_{s,j} = \varepsilon \cdot \bar{\beta}_{s,j}$$

($s = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m}$), γ_j – коефіцієнт, що характеризує швидкість зміни активної пористості завантаження за рахунок адсорбції j -тої компоненти багатокомпонентної

домішки, $\gamma_j = \{ \gamma_{s,j}, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \}$,

$$\gamma_{s,j} = \varepsilon \cdot \bar{\gamma}_{s,j} \quad (s = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, m}), \quad \bar{a}_{s,j,k} = \bar{a}_{s,j,k}(x, y, z, t),$$

$$\bar{a}_{s,j,k}^* = \bar{a}_{s,j,k}^*(x, y, z, t), \quad \alpha_{s,j} = \alpha_{s,j}(x, y, z, t),$$

$$\bar{\beta}_{s,j} = \bar{\beta}_{s,j}(x, y, z, t) \text{ і } \bar{\gamma}_{s,j} = \bar{\gamma}_{s,j}(x, y, z, t) \text{ – деякі неперервні обмежені функції } (s = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m}),$$

ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$),

$$c_0^0 = \{ c_s^0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \},$$

$$u_0^0 = \{ u_s^0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \},$$

$$\sigma_0^0 = \{ \sigma_s^0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \}, \quad c_* = c_*(M, t),$$

$$c_s^0 = c_s^0(x, y, z), \quad u_s^0 = u_s^0(x, y, z) \text{ і } \sigma_s^0 = \sigma_s^0(x, y, z)$$

$$(s = \overline{1, p}) \text{ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області } G \text{ [15], } M \in ABB_*A_*, v_n^s$$

$$(s = \overline{1, p-1}) \text{ – нормальні складові швидкості відповідно на поверхнях } E_s F_s F_{*s} E_{*s} \text{ (} s = \overline{1, p-1} \text{).}$$

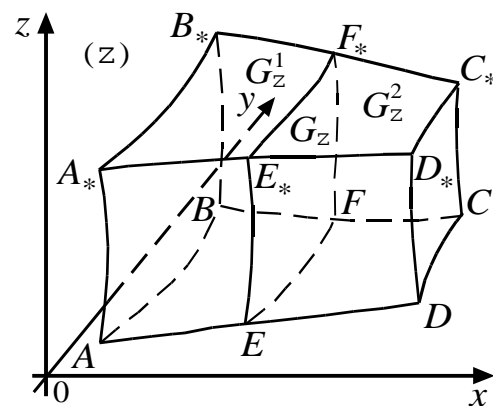


Рис. 1 – Двошарова просторова область фільтрації G_z

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що $\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$ [16] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (3) на умови: $\psi|_{ADD_1A} = 0$, $\psi|_{BCC_1B_1} = Q_*$, $\eta|_{ABCD} = 0$, $\eta|_{A_1B_1C_1D_1} = Q^*$, задача (1), (3), (6) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу – прямокутний паралелепіпед $G_w = A'B'C'D'A_1'B_1C_1D_1$, який розділений деякими заданими поверхнями $E'_s F'_s E'_s F'_s$ ($s = \overline{1, p}$) на деякі p підобластей $G_w^1 = A'B'E_1 F_1 A_1' B_1' E_1' F_1'$, $G_w^s = E'_s F'_s F'_s E'_s E'_{s+1} F'_{s+1} E'_{s+1} F'_{s+1} E'_{s+1}$ ($s = \overline{2, p-2}$), $G_w^p = E'_p F'_p F'_p E'_p C'D'E'_{p-1} F'_{p-1} C'D'$ (рис. 2), де $G_w^s = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(s-1)}^* < \varphi < \varphi_{*s}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ ($s = \overline{1, p}$), φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q_* , Q^* – невідомі параметри, $Q = Q_* \cdot Q^*$ – повна фільтраційна витрата.

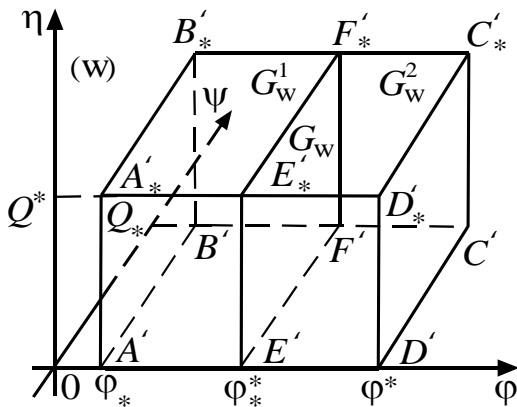


Рис. 2 – Двошарова область комплексного потенціалу G_w

Припустимо, що ця задача є розв’язаною [15], зокрема, знайдено поле швидкостей \vec{v} , параметри φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q_* , Q^* , Q та ряд інших величин. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (2) та умовах (4), (5), (7), отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, \infty)$, що описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} (\tilde{\sigma} \cdot c_j)'_t = D_j \cdot (b_1 \cdot c_j''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot c_j''_{\psi\psi} + b_3 \cdot c_j''_{\eta\eta} + b_4 \cdot c_j'_{\psi\varphi} + b_4 \cdot c_j'_{\eta\varphi}) - \\ - \kappa \cdot b_1 \cdot c_j'_{\varphi} - \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{j,k} \cdot c_j + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{k,j} \cdot c_k - \tilde{\alpha}_j \cdot c_j + \tilde{\beta}_j \cdot u_j, \\ (\tilde{\sigma} \cdot u_j)'_t = - \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{j,k}^* \cdot u_j + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{k,j}^* \cdot u_k + \tilde{\alpha}_j \cdot c_j - \tilde{\beta}_j \cdot u_j, \\ \tilde{\sigma}'_t = - \sum_{j=1}^m \tilde{\gamma}_j \cdot u_j \quad (j = \overline{1, m}), (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \end{cases} \quad (8)$$

за крайових умов:

$$\begin{aligned} c_j|_{\varphi=\varphi_*} &= \tilde{c}_{j*}, \quad c_j'|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \\ c_j'|_{\psi=0} &= c_j'|_{\psi=Q_*} = c_j'|_{\eta=0} = c_j'|_{\eta=Q^*} = 0 \\ (j = \overline{1, m}), \end{aligned} \quad (9)$$

початкових умов:

$$c_j|_{t=0} = \tilde{c}_j^0, \quad u_j|_{t=0} = \tilde{u}_j^0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad \tilde{\sigma}|_{t=0} = \tilde{\sigma}_0^0, \quad (10)$$

і умов узгодженості на поверхнях розділу $E'_s F'_s E'_s F'_s$ ($s = \overline{1, p}$):

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} c_j &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} c_j, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} u_j = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} u_j, \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} (D_{s,j} \cdot c_j'_{\varphi} - \kappa_s \cdot c_j) &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} (D_{s+1,j} \cdot c_j'_{\varphi} - \kappa_{s+1} \cdot c_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} \left(\sigma \cdot \sum_{j=1}^m (c_j + u_j) \right)'_t &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} \left(\sigma \cdot \sum_{j=1}^m (c_j + u_j) \right)'_t \\ (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}), \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} c_j &= c_j(\varphi, \psi, \eta, t) = \\ &= C_j(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \\ u_j &= u_j(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varphi, \psi, \eta, t), \\ \tilde{c}_{j*} &= \tilde{c}_{j*}(\psi, \eta, t), \\ \tilde{c}_j^0 &= \{ \tilde{c}_{s,j}^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \}, \\ \tilde{u}_j^0 &= \{ \tilde{u}_{s,j}^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \}, \\ \tilde{\sigma}_0^0 &= \{ \tilde{\sigma}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \}, \\ \tilde{a}_{j,k} &= \{ \tilde{a}_{s,j,k}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \}, \\ \tilde{a}_{j,k}^* &= \{ \tilde{a}_{s,j,k}^*, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \}, \\ \tilde{\alpha}_j &= \{ \tilde{\alpha}_{s,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \}, \\ \tilde{\beta}_j &= \{ \tilde{\beta}_{s,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \}, \\ \tilde{\gamma}_j &= \{ \tilde{\gamma}_{s,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \}, \\ \tilde{c}_{s,j}^0 &= \tilde{c}_{s,j}^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \tilde{u}_{s,j}^0 = \tilde{u}_{s,j}^0(\varphi, \psi, \eta), \\ \tilde{\sigma}_s^0 &= \tilde{\sigma}_s^0(\varphi, \psi, \eta), \\ \tilde{a}_{s,j,k} &= \begin{cases} \varepsilon \cdot \tilde{a}_{s,j,k}, & j < k, \\ 0, & j = k, \end{cases} \quad \tilde{a}_{s,j,k}^* = \begin{cases} \varepsilon \cdot \tilde{a}_{s,j,k}^*, & j < k, \\ 0, & j = k, \end{cases} \\ \tilde{a}_{s,j,k} &= \tilde{a}_{s,j,k}(\varphi, \psi, \eta), \quad \tilde{a}_{s,j,k}^* = \tilde{a}_{s,j,k}^*(\varphi, \psi, \eta), \\ \tilde{\alpha}_{s,j} &= \tilde{\alpha}_{s,j}(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\beta}_{s,j} = \varepsilon \cdot \tilde{\beta}_{s,j}, \\ \tilde{\beta}_{s,j} &= \tilde{\beta}_{s,j}(\varphi, \psi, \eta, t), \\ \tilde{\gamma}_{s,j} &= \varepsilon \cdot \tilde{\gamma}_{s,j}, \quad \tilde{\gamma}_{s,j} = \tilde{\gamma}_{s,j}(\varphi, \psi, \eta, t) \quad (s = \overline{1, p}, \\ & j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}), \\ \tilde{v} &= \{ \tilde{v}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \}, \quad \tilde{v}_s = \tilde{v}_s(\varphi, \psi, \eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_r &= \{b_{r,s}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}, \\ b_{r,s} &= b_{r,s}(\varphi, \psi, \eta) \quad (r = \overline{1, 5}, s = \overline{1, p}), \\ b_{1,s} &= \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \varphi_z'^2 = \tilde{v}_s^2 \cdot \kappa_s^{-2}, \\ b_{2,s} &= \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2, \\ b_{3,s} &= \eta_x'^2 + \eta_y'^2 + \eta_z'^2, \quad b_{4,s} = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}'', \\ b_{5,s} &= \eta_{xx}'' + \eta_{yy}'' + \eta_{zz}'' \quad [15]. \end{aligned}$$

Розв'язання задачі

Аналогічно до [13-15] числово-асимптотичне наближення $c_j = \{c_{s,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$,

$$u_j = \{u_{s,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\},$$

$$\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\} \quad (j = \overline{1, m}) \text{ розв'язку}$$

задачі (8) – (11) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ знайдено у вигляді таких рядів:

$$\begin{aligned} c_{s,j} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{s,j,i} + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{s,j,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{P}_{s,j,i} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{\tilde{P}}_{s,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,j,i} + \\ & \quad (s = \overline{1, p}, j = \overline{1, m}), \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_{s,j,i} + R_{s,j,n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{s,j} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot u_{s,j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{H}_{s,j,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{\tilde{H}}_{s,j,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{\tilde{\tilde{H}}}_{s,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{\tilde{H}}}_{s,j,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{H}}}}_{s,j,i} + \tilde{R}_{s,j,n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\sigma}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{h}_{s,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{h}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{\tilde{h}}_{s,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{\tilde{\tilde{h}}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{\tilde{h}}}_{s,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{h}}}}_{s,i} + \tilde{R}_{s,n+1} \end{aligned}$$

$$(s = \overline{1, p}),$$

де $c_{s,j,i} = c_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $u_{s,j,i} = u_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\sigma}_{s,i} = \tilde{\sigma}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $\tilde{P}_{s,j,i} = \tilde{P}_{s,j,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{H}_{s,j,i} = \tilde{H}_{s,j,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_{s,j,i} = \tilde{\tilde{P}}_{s,j,i}(\tilde{\tilde{\phi}}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{H}}_{s,j,i} = \tilde{\tilde{H}}_{s,j,i}(\tilde{\tilde{\phi}}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{h}}_{s,i} = \tilde{\tilde{h}}_{s,i}(\tilde{\tilde{\phi}}, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околах $\varphi = \varphi_{*s}^*$ ($s = \overline{0, p}$) (поправки на вході у фільтр, на виході з фільтру та в околі меж шарів фільтру), $\hat{P}_{s,j,i} = \hat{P}_{s,j,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{\tilde{P}}_{s,j,i} = \hat{\tilde{P}}_{s,j,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\hat{H}_{s,j,i} = \hat{H}_{s,j,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{\tilde{H}}_{s,j,i} = \hat{\tilde{H}}_{s,j,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\hat{h}_{s,i} = \hat{h}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{\tilde{h}}_{s,i} = \hat{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_{s,j,i} = \tilde{\tilde{P}}_{s,j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\tilde{\tilde{\tilde{P}}}_{s,j,i} = \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_{s,j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$, $\tilde{\tilde{H}}_{s,j,i} = \tilde{\tilde{H}}_{s,j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\tilde{\tilde{\tilde{H}}}_{s,j,i} = \tilde{\tilde{\tilde{H}}}_{s,j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$, $\tilde{\tilde{h}}_{s,i} = \tilde{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\tilde{\tilde{\tilde{h}}}_{s,i} = \tilde{\tilde{\tilde{h}}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$ ($s = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічних стінках фільтру), $\tilde{\phi}_s = \frac{\varphi - \varphi_{*s}^*}{\varepsilon}$ ($s = \overline{0, p-1}$), $\tilde{\phi}_s = \frac{\varphi_{*s}^* - \varphi}{\varepsilon}$ ($s = \overline{1, p}$), $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\psi}} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\eta}} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризовані перетворення (розтяги), $R_{s,j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\tilde{R}_{s,j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\tilde{\tilde{R}}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($s = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m}$) – залишкові члени.

Зокрема, для знаходження для знаходження $c_{s,j,i}$, $u_{s,j,i}$, $\tilde{\sigma}_{s,i}$ ($s = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m}$, $i = 0, n$), $\tilde{P}_{s,j,i}$, $\tilde{H}_{s,j,i}$, $\tilde{h}_{s,i}$ ($s = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) і $\tilde{\tilde{P}}_{s,j,i}$, $\tilde{\tilde{H}}_{s,j,i}$, $\tilde{\tilde{h}}_{s,i}$ ($s = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) одержано наступні формули:

$$c_{s,j,0} = \begin{cases} \tilde{c}_{j*}(\psi, \eta, t - f_1(\varphi, \psi, \eta)) \cdot e^{-\tilde{\lambda}_{s,j,1}(\varphi, \psi, \eta, t)}, & t \geq \tilde{f}_1, \\ c_{s-1,j,0}(\psi, \eta, t - f_s(\varphi, \psi, \eta)) \cdot e^{-\tilde{\lambda}_{s,j,1}(\varphi, \psi, \eta, t)}, & t \geq \tilde{f}_s, \\ \tilde{c}_{s,j}^0(f_s^{-1}(f_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \cdot e^{-\tilde{\lambda}_{s,j,2}(\varphi, \psi, \eta, t)}, & t < \tilde{f}_s, \end{cases}$$

$$u_{s,j,0} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0} \int_0^t \tilde{\alpha}_{s,j}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) \cdot c_{s,j,0}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \tilde{u}_{s,j}^0, \quad \tilde{\sigma}_{s,0} = \tilde{\sigma}_s^0 \quad (s = \overline{1, p}, j = \overline{1, m});$$

$$c_{s,j,i} = \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{s,j,1}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \int_{\varphi_{s(s-1)}^{\varphi} \tilde{g}_{s,j,i}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,j,1}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f_s, \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,j,2}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{s,j,i}(\varphi,\psi,\eta,\tilde{t}) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,j,2}(\varphi,\psi,\eta,\tilde{t})} d\tilde{t}, & t < f_s, \end{cases}$$

$$u_{s,j,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{s,j,i}(\varphi,\psi,\eta,\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad \tilde{\sigma}_{s,i} = \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (s = \overline{1,p}, j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}),$$

$$\tilde{P}_{1,j,0} = \left(\tilde{c}_{j*} - c_{1,j,0} \Big|_{\tilde{\varphi}_0=0} \right) \cdot e^{\frac{\kappa_1 \tilde{\varphi}_0}{d_{1,j}}},$$

$$\tilde{P}_{1,j,i} = \frac{1}{d_{1,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}_0} \left(e^{\frac{\kappa_1 \tilde{\varphi}}{d_{1,j}}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_{1,1,j,i}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t) \cdot e^{-\frac{\kappa_1 \tilde{\varphi}}{d_{1,j}}} d\tilde{\varphi} - c_{1,j,i} \Big|_{\tilde{\varphi}_0=0} \cdot e^{\frac{\kappa_1 \tilde{\varphi}_0}{d_{1,j}}} \right) d\tilde{\varphi} \quad (j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}),$$

$$\tilde{P}_{1,j,n+1} = \frac{1}{d_{1,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}_0} \left(e^{\frac{\kappa_1 \tilde{\varphi}}{d_{1,j}}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_{1,1,j,n+1}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t) \cdot e^{-\frac{\kappa_1 \tilde{\varphi}}{d_{1,j}}} d\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi} \quad (j = \overline{1,m}),$$

$$\tilde{H}_{1,j,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_1^0(\tilde{\varphi}_0,\psi,\eta)} \cdot \int_0^t \tilde{q}_{1,1,j,i}(\tilde{\varphi}_0,\psi,\eta,\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (j = \overline{1,m}, i = \overline{0,n+1}),$$

$$\tilde{h}_{1,0} = 0, \quad \tilde{h}_{1,i} = \int_0^t \tilde{q}_{1,1,i}(\tilde{\varphi}_0,\psi,\eta,\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (i = \overline{1,n+1}),$$

$$\tilde{P}_{p,j,0} = \frac{d_{p,j}}{\kappa_p} \cdot c'_{(p,j,0)\tilde{\varphi}_p} \Big|_{\tilde{\varphi}_p=0} \cdot e^{-\frac{\kappa_p \tilde{\varphi}_p}{d_{p,j}}} \quad (j = \overline{1,m}),$$

$$\tilde{P}_{p,j,i} = \frac{1}{d_{p,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}_p} \left(e^{-\frac{\kappa_p \tilde{\varphi}}{d_{p,j}}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_{2,p,j,i}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t) \cdot e^{\frac{\kappa_p \tilde{\varphi}}{d_{p,j}}} d\tilde{\varphi} - \frac{d_{p,j}}{\kappa_p} \cdot c'_{(p,i,j)\tilde{\varphi}_p} \Big|_{\tilde{\varphi}_p=0} \cdot e^{-\frac{\kappa_p \tilde{\varphi}_p}{d_{p,j}}} \right) d\tilde{\varphi} \quad (j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}),$$

$$\tilde{P}_{p,j,n+1} = \frac{1}{d_{p,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}_p} \left(e^{-\frac{\kappa_p \tilde{\varphi}}{d_{p,j}}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_{2,p,j,n+1}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t) \cdot e^{\frac{\kappa_p \tilde{\varphi}}{d_{p,j}}} d\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi} \quad (j = \overline{1,m}),$$

$$\tilde{H}_{p,j,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_p^0(\tilde{\varphi}_p,\psi,\eta)} \cdot \int_0^t \tilde{q}_{2,p,j,i}(\tilde{\varphi}_p,\psi,\eta,\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (j = \overline{1,m}, i = \overline{0,n+1}),$$

$$\tilde{h}_{p,i} = 0, \quad \tilde{h}_{p,i} = \int_0^t \tilde{q}_{2,p,i}(\tilde{\varphi}_p,\psi,\eta,\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (i = \overline{1,n+1}),$$

$$\tilde{P}_{s+1,j,0} = \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left(\left(-d_{s,j} \cdot c'_{(s,j,0)\tilde{\varphi}_s} + \kappa_s \cdot c_{s,j,0} \right) \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} - \left(d_{s+1,j} \cdot c'_{(s+1,j,0)\tilde{\varphi}_s} + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,j,0} \right) \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} - \right. \\ \left. - \kappa_s \cdot \left(c_{s,j,0} \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} - c_{s+1,j,0} \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} \right) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_{s+1} \tilde{\varphi}_s}{d_{s+1,j}}} \quad (s = \overline{1,p-1}, j = \overline{1,m}),$$

$$\tilde{P}_{s+1,j,i} = \frac{1}{d_{s+1,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}_s} \left(e^{-\frac{\kappa_{s+1} \tilde{\varphi}}{d_{s+1,j}}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} \tilde{q}_{s,j,i}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t) \cdot e^{\frac{\kappa_{s+1} \tilde{\varphi}}{d_{s+1,j}}} d\tilde{\varphi} + \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left(\left(-d_{s,j} \cdot c'_{(s,j,i)\tilde{\varphi}_s} + \kappa_s \cdot c_{s,j,i} \right) \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(d_{s+1,j} \cdot c'_{(s+1,j,i)\tilde{\varphi}_s} + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,j,i} \right) \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} - \kappa_s \times \left(c_{s,j,i} \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} - c_{s+1,j,i} \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} \right) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_{s+1} \tilde{\varphi}_s}{d_{s+1,j}}} \quad (s = \overline{1,p-1}, j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}),$$

$$\tilde{P}_{s+1,j,n+1} = \frac{1}{d_{s+1,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}_s} \left(e^{-\frac{\kappa_{s+1} \tilde{\varphi}}{d_{s+1,j}}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} \tilde{q}_{s,j,n+1}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t) \cdot e^{\frac{\kappa_{s+1} \tilde{\varphi}}{d_{s+1,j}}} d\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi} \quad (s = \overline{1,p-1}, j = \overline{1,m}),$$

$$\tilde{H}_{s+1,j,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\varphi}_s,\psi,\eta)} \cdot \int_0^t \tilde{q}_{1,s+1,j,i}(\tilde{\varphi}_s,\psi,\eta,\tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\varphi}_s,\psi,\eta)} \times \right. \\ \left. \times \int_0^t \tilde{q}_{1,s,j,i}(\tilde{\varphi}_s,\psi,\eta,\tilde{t}) d\tilde{t} \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\varphi}_s,\psi,\eta)} \cdot \int_0^t \tilde{q}_{2,s,j,i}(\tilde{\varphi}_s,\psi,\eta,\tilde{t}) d\tilde{t} \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \cdot \left(u_{s,j,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - u_{s+1,j,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, n}), \\
 \tilde{H}_{s+1,j,n+1} = & \frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{1,s+1,j,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{1,s,j,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2,s,j,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}), \\
 \tilde{h}_{s+1,0} = & \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{\sigma}_{s,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \tilde{\sigma}_{s+1,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{h}_{s+1,i} = & \int_0^t \tilde{q}_{1,s+1,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} - \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^t \tilde{q}_{1,s+1,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \int_0^t \tilde{q}_{2,s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{\sigma}_{s,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \tilde{\sigma}_{s+1,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad i = \overline{1, n}), \\
 \tilde{h}_{s+1,n+1} = & \int_0^t \tilde{q}_{1,s+1,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} - \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^t \tilde{q}_{1,s+1,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \int_0^t \tilde{q}_{2,s,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{P}_{s,j,0} = & \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left(\left(-d_{s,j} \cdot c'_{(s,j,0)\tilde{\phi}_s} + \kappa_s \cdot c_{s,j,0} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \left(d_{s+1,j,0} \cdot c'_{(s+1,j,0)\tilde{\phi}_s} + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,j,0} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \kappa_{s+1} \cdot \left(c_{s,j,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - c_{s+1,j,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \tilde{\phi}_s} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}), \\
 \tilde{P}_{s,j,i} = & \frac{1}{d_{s,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_s} \left(e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \tilde{\phi}} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}} \hat{q}_{s,j,i}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \tilde{\phi}} d\tilde{\phi} \right) d\tilde{\phi} + \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left(\left(-d_{s,j} \cdot c'_{(s,j,i)\tilde{\phi}_s} + \kappa_s \cdot c_{s,j,i} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \left(d_{s+1,j} \cdot c'_{(s+1,j,i)\tilde{\phi}_s} + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,j,i} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \kappa_{s+1} \times \left(c_{s,j,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - c_{s+1,j,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \tilde{\phi}_s} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n}), \\
 \tilde{P}_{s,j,n+1} = & \frac{1}{d_{s,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_s} \left(e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \tilde{\phi}} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}} \hat{q}_{s,j,n+1}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \tilde{\phi}} d\tilde{\phi} \right) d\tilde{\phi} \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}), \\
 \tilde{H}_{s,j,i} = & \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2,s,j,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \times \right. \\
 & \left. \times \int_0^t \hat{q}_{1,s,j,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2,s,j,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) + \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \left(u_{s,j,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - u_{s+1,j,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, n}), \\
 \tilde{H}_{s,j,n+1} = & \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2,s,j,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{1,s,j,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2,s,j,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}), \\
 \tilde{h}_{s,0} = & -\frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{\sigma}_{s,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \tilde{\sigma}_{s+1,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{h}_{s,i} = & \int_0^t \tilde{q}_{2,s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^t \tilde{q}_{1,s+1,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \int_0^t \tilde{q}_{2,s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{\sigma}_{s,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \tilde{\sigma}_{s+1,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad i = \overline{1, n}), \\
 \tilde{h}_{s,n+1} = & \int_0^t \tilde{q}_{2,s,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^t \tilde{q}_{1,s+1,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \int_0^t \tilde{q}_{2,s,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}).
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{s,j,1}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \kappa_s \int_{\varphi_{*(s-1)}}^{\varphi} \frac{\tilde{\alpha}_{s,j}(\widehat{\varphi}, \psi, \eta, f_s(\widehat{\varphi}, \psi, \eta) + t - f_s(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}^2(\widehat{\varphi}, \psi, \eta)} d\widehat{\varphi}, \\ \tilde{\lambda}_{s,j,2}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \int_0^t \frac{\tilde{\alpha}_{s,j}(f_s^{-1}(\widehat{t} + f_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \widehat{t})}{\tilde{\sigma}_s^0(f_s^{-1}(\widehat{t} + f_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\widehat{t}, \\ \tilde{g}_{s,j,i}(\widehat{\varphi}, \psi, \eta, t) &= \frac{g_{s,j,i}(\widehat{\varphi}, \psi, \eta, f_s(\widehat{\varphi}, \psi, \eta) - f_s(\varphi, \psi, \eta) + t)}{\tilde{v}^2(\widehat{\varphi}, \psi, \eta)}, \\ \tilde{g}_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, \widehat{t}) &= \frac{g_{s,j,i}(f_s^{-1}(\widehat{t} + f_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \widehat{t})}{\tilde{\sigma}_s^0(f_s^{-1}(\widehat{t} + f_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)}, \\ g_{s,j,i} &= I(i, 1) \cdot \left(d_{s,j} \cdot \left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,j,i-1)\varphi\varphi} + b_1 \cdot c''_{(s,j,i-1)\psi\psi} + b_2 \cdot c''_{(s,j,i-1)\eta\eta} + \right. \right. \\ &+ b_3 \cdot c'_{(s,j,i-1)\psi} + b_4 \cdot c'_{(s,j,i-1)\eta} \left. \right) + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,j,k} \cdot c_{s,j,i-1} - \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,k,j} \cdot c_{s,k,i-1} + \tilde{\beta}_{s,j} \cdot u_{s,j,i-1} - \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot c'_{(s,j,i-l)t} - \tilde{\sigma}'_{(s,l)t} \cdot c_{s,j,i-l}) \left. \right), \\ \tilde{g}_{s,j,i} &= \tilde{\alpha}_{s,j} \times c_{s,j,i} + I(i, 1) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,j,k}^* \cdot u_{s,j,i-1} - \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,k,j}^* \cdot u_{s,k,i-1} - \tilde{\beta}_{s,j} \cdot u_{s,j,i-1} + \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot u'_{(s,j,i-l)t} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)t} \cdot u_{s,j,i-l}) \right), \\ \tilde{g}_{s,i} &= -I(i, 1) \cdot \sum_{j=1}^m \tilde{\gamma}_{s,j} \cdot u_{s,j,i-1}, \end{aligned}$$

$$f_s = f_s(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_s \int_{\varphi_{*(s-1)}}^{\varphi} \frac{\tilde{\sigma}_s^0(\widehat{\varphi}, \psi, \eta)}{\tilde{v}^2(\widehat{\varphi}, \psi, \eta)} d\widehat{\varphi} - \text{час проходження відповідною частинкою шляху від точки}$$

$(x(\varphi_{*(s-1)}, \psi, \eta), y(\varphi_{*(s-1)}, \psi, \eta), z(\varphi_{*(s-1)}, \psi, \eta)) \in G_z^{s-1}$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_z^s$ вздовж відпові-

дної лінії течії, f_s^{-1} – функція, обернена до f_s відносно змінної φ , $q_{1,s,j,i} = \frac{\kappa_s^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*s}, \psi, \eta)} \cdot \left(I(i, 1) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-1} (\tilde{h}_{s,l} \times \right. \right.$

$$\begin{aligned} &\times \tilde{P}'_{(s,j,i-l-1)t} + \tilde{h}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{P}_{s,j,i-l-1} + \tilde{\sigma}_{s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-l-1)t} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{P}_{s,j,i-l-1} + \\ &+ \tilde{h}_{s,l} \cdot c'_{(s,j,i-l-1)t} + \tilde{h}'_{(s,l)t} \cdot c_{s,j,i-l-1} \left. \right) - \sum_{l=1}^i \frac{\tilde{V}_{s,l}}{\kappa_s^2} \cdot \left(d_{s,j} \cdot \tilde{P}''_{(s,j,i-l)\varphi\varphi} - \right. \\ &\left. - \kappa_s \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-l)\varphi} \right) - \sum_{l=0}^i \tilde{\alpha}_{s,j,l} \cdot \tilde{P}_{s,j,i-l} \left. \right) + I(i, 2) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,k,j,l} \cdot \tilde{P}_{s,k,i-2-l} - \right. \\ &\left. - \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,k,j,l} \cdot \tilde{P}_{s,j,i-2-l} + \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\beta}_{s,j,l} \cdot \tilde{H}_{s,j,i-l-1} + d_{s,j} \cdot \sum_{l=0}^{i-2} (\tilde{B}_{1,s,l} \times \times \tilde{P}''_{(s,j,i-2-l)\psi\psi} + \tilde{B}_{2,s,l} \cdot \tilde{P}''_{(s,j,i-2-l)\eta\eta} + \tilde{B}_{3,s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-2-l)\psi} + \tilde{B}_{4,s,l} \times \right. \\ &\left. \times \tilde{P}'_{(s,j,i-2-l)\eta} \right) \left. \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{2,s,j,i} &= \frac{\kappa_s^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*s}, \psi, \eta)} \cdot \left(I(i, 1) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-1} (\tilde{h}_{s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-l-1)t} + \right. \right. \\ &+ \tilde{h}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{P}_{s,j,i-l-1} + \tilde{\sigma}_{s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-l-1)t} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{P}_{s,i-l-1} + \tilde{h}_{s,l} \cdot c'_{(s,i-l-1)t} + \\ &+ \tilde{h}'_{(s,l)t} \cdot c_{s,j,i-l-1} \left. \right) - \sum_{l=1}^i \frac{\tilde{V}_{s,l}}{\kappa_s^2} \cdot \left(d_{s,j} \cdot \tilde{P}''_{(s,j,i-l)\varphi\varphi} + \kappa_s \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-l)\varphi} \right) + \sum_{l=0}^i (\tilde{\alpha}_{s,j,l} \times \\ &\times \tilde{P}_{s,j,i-l} \left. \right) \left. \right) + I(i, 2) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,k,j,l} \cdot \tilde{P}_{s,k,i-2-l} - \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,k,j,l} \cdot \tilde{P}_{s,j,i-2-l} + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\beta}_{s,j,l} \cdot \tilde{H}_{s,j,i-l-1} + d_{s,j} \cdot \sum_{l=0}^{i-2} (\tilde{B}_{1,s,l} \cdot \tilde{P}''_{(s,j,i-2-l)\psi\psi} + \tilde{B}_{2,s,l} \cdot \tilde{P}''_{(s,j,i-2-l)\eta\eta} + \tilde{B}_{3,s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-2-l)\psi} + \tilde{B}_{4,s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-2-l)\eta}) \right),$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{1,s,j,i} &= \sum_{l=0}^i \tilde{\alpha}_{s,j,l} \cdot \tilde{P}_{s,j,i-l} - I(i, 1) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,k,j,l}^* \cdot \tilde{H}_{s,j,i-2-l} - \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,k,j,l}^* \cdot \tilde{H}_{s,k,i-2-l} + \sum_{l=0}^{i-1} (\tilde{\beta}_{s,j,l} \times \right. \\ &\left. \times \tilde{H}_{s,j,i-l-1}) + \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot \tilde{H}'_{(s,j,i-l)t} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{H}_{s,j,i-l} + \tilde{h}_{s,l} \cdot \tilde{H}'_{(s,j,i-l)t} + \tilde{h}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{H}_{s,j,i-l} + \tilde{h}_{s,l} \cdot u'_{(s,j,i-l)t} + \tilde{h}'_{(s,l)t} \cdot u_{s,j,i-l}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{2,s,j,i} = & \sum_{l=0}^i \left(\tilde{\alpha}_{s,j,l} \times \tilde{P}_{s,j,i-l} \right) - I(i,1) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{\alpha}_{s,k,j,l}^* \cdot \tilde{H}_{s,j,i-2-l} - \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{\alpha}_{s,k,j,l}^* \cdot \tilde{H}_{s,k,i-2-l} + \right. \\ & \left. + \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\beta}_{s,j,l} \cdot \tilde{H}_{s,j,i-l-1} + \sum_{l=1}^i \left(\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot \tilde{H}'_{(s,j,i-l)_t} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)_t} \cdot \tilde{H}_{s,j,i-l} + \tilde{h}_{s,l} \times \tilde{H}'_{(s,j,i-l)_t} + \tilde{h}'_{(s,l)_t} \cdot \tilde{H}_{s,j,i-l} + \tilde{h}_{s,l} \cdot u'_{(s,j,i-l)_t} + \tilde{h}'_{(s,l)_t} \cdot u_{s,j,i-l} \right) \right), \\ \tilde{q}_{1,s,i} = & -I(i,1) \cdot \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{k=1}^m \tilde{\gamma}_{s,k,l} \cdot \tilde{H}_{s,k,i-l-1}, \quad \tilde{q}_{2,s,i} = -I(i,1) \cdot \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{k=1}^m \tilde{\gamma}_{s+1,k,l} \cdot \tilde{H}_{s+1,k,i-l-1} \quad (s = \overline{1,p}, j = \overline{1,m}, i = \overline{0,n+1}), \quad \tilde{V}_{s,l}, \\ \tilde{B}_{r,s,l} \quad (r = \overline{1,4}), \quad \tilde{a}_{s,j,k,l}, \quad \tilde{a}_{s,j,k,l}^*, \quad \tilde{\alpha}_{s,l}, \quad \tilde{\beta}_{s,l}, \quad \tilde{\gamma}_{s,l} \quad \text{і} \quad \tilde{V}_{s,l}, \quad \tilde{B}_{r,s,l} \quad (r = \overline{1,4}), \quad \tilde{a}_{s,j,k,l}, \quad \tilde{a}_{s,j,k,l}^*, \quad \tilde{\alpha}_{s,l}, \quad \tilde{\beta}_{s,l}, \quad \tilde{\gamma}_{s,l} \quad (s = \overline{1,p}, j = \overline{1,m}, \\ k = \overline{1,m}) - & \text{коефіцієнти при } l\text{-тих степенях } \varepsilon \text{ в розкладі відповідно функцій } \tilde{v}^2(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta), \quad b_r(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \\ \psi, \eta) \quad (r = \overline{1,4}), \quad \tilde{\alpha}_j(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t), \quad \tilde{a}_{s,j,k,l}(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t), \quad \tilde{a}_{s,j,k,l}^*(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\beta}_j(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t), \\ \tilde{\gamma}_j(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t) \quad (s = \overline{0,p-1}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,m}) \quad \text{і} \quad \tilde{v}^2(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta), \quad b_r(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta) \quad (r = \overline{1,4}), \\ \tilde{a}_{s,j,k,l}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t), \quad \tilde{a}_{s,j,k,l}^*(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\alpha}_j(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\beta}_j(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\gamma}_j(\varphi_{*s}^* - \\ - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t) \quad (s = \overline{1,p}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,m}) \text{ у ряд Тейлора в околах } \varphi = \varphi_{*s}^* \quad (s = \overline{0,p}), \quad I(a,b) = \begin{cases} 1, & a \geq b, \\ 0, & a < b \end{cases}. \end{aligned}$$

Висновки. Сформовано просторову математичну модель процесу доочистки води від багатоконпонентної домішки у багатозарових швидких фільтрах з кусково-однорідними пористими завантаженнями. Вона враховує як масообмінні процеси між компонентами багатоконпонентної домішки у фільтраційній течії і адсорбованої на зернах завантаження, так і зворотній вплив концентрацій багатоконпонентної домішки на коефіцієнт активної пористості. Отримана модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів та збільшення тривалості фільтроциклу фільтрів за рахунок вибору їх форми і висоти шарів.

У алгоритмі числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної моделі задачі для фільтру, який має форму криволінійного паралелепіпеда, обмеженого двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділений деякими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, отримано нового типу поправки, що характеризують механізм перерозподілу концентрацій багатоконпонентної домішки у фільтраційній течії і адсорбованої на зернах завантаження в околах ділянок розділу шарів.

Список літератури:

1. Орлов, В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою [Текст] / В. О. Орлов. – Рівне: НУВГП, 2005. – 163 с.
2. Cheremisinoff, N. P. Handbook of water and wastewater treatment technologies [Text] / N. P. Cheremisinoff. – Boston: Butterworth-Heinemann, 2002. – 649 p. doi:10.1016/B978-075067498-0/50000-0
3. Hendricks, D. Fundamentals of water treatment unit processes: physical, chemical, and biological [Text] / D. W. Hendricks. – Boca Raton: CRC Press, 2010. – 417 p.
4. Quevauviller, Ph. Analytical methods for drinking water: advances in sampling and analysis [Text] / Ph. Quevauviller, K. C. Thompson. – John Wiley & Sons Ltd, 2006. – 188 p. doi:10.1002/0470094931
5. Бомба, А. Я. Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод в пористому середовищі [Текст] / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // Математичне та комп'ютерне моделювання. – 2011. – № 5. – С. 36–44.
6. Мельцер, В. З. Фильтровальные сооружения в коммунальном водоснабжении [Текст] / В. З. Мельцер. – Москва: Стройиздат, 1995. – 176 с.

7. Минц, Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды [Текст] / Д. М. Минц. – Москва: Стройиздат, 1964. – 156 с.
8. Шехтман, Ю. М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий [Текст] / Ю. М. Шехтман. – Москва: АН СССР, 1961. – 237 с.
9. Ives, K. J. Deep-bed water filters [Text] / K. J. Ives // New developments. – 1969. – Vol. 6, № 1. – P. 42–48.
10. Kalteh, A. M. Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: Analysis, modelling and application [Text] / A. M. Kalteh, P. Hjorth, R. Berndtsson // Environmental Modelling & Software. – 2008. – Vol. 23, № 7. – P. 835–845. doi:10.1016/j.envsoft.2007.10.001
11. Maier, H. R. Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications [Text] / H. R. Maier, G. C. Dandy // Environmental Modelling & Software. – 2000. – Vol. 15, № 1. – P. 101–124. doi:10.1016/S1364-8152(99)00007-9
12. Heikkinen, M. Subtraction analysis based on self-organizing maps for an industrial wastewater treatment process [Text] / M. Heikkinen, T. Heikkinen, Y. Hiltunen, M. Liukkonen, H. Poutiainen // Mathematics and Computers in Simulation. – 2011. – Vol. 82, is. 3 – P. 450–459. doi:10.1016/j.matcom.2010.10.021
13. Бомба, А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу фільтрування [Текст] / А. Я. Бомба, Ю. С. Климок, А. П. Сафоник, В. М. Сивак // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – № 11. – С. 29–38.
14. Климок, Ю. С. Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища [Текст] / Ю. С. Климок, В. М. Сивак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2010. – № 16, Т. 7. – С. 93–109.
15. Бомба, А. Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія [Текст]: монографія / А. Я. Бомба, Ю. С. Климок. – Рівне: Ассоль, 2014. – 273 с.
16. Пауз, Х. Механика жидкости [Текст] / Х. Пауз. – Москва: Стройиздат, 1967. – 392 с.

Bibliography (transliterated):

1. Orlov, V. O. (2005). Vodoochisni fil'tri iz zernistuju zasipkoju. Rivne: NUVGP, 163.
2. Cheremisinoff, N. P. (2002). Handbook of water and wastewater treatment technologies. Boston: Butterworth-Heinemann, 645. doi:10.1016/B978-075067498-0/50000-0
3. Hendricks, D. W. (2010). Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological. Boca Raton: CRC Press, 417.
4. Quevauviller, Ph., Thompson, K. C. (2006). Analytical methods for drinking water: advances in sampling and

- analysis. John Wiley & Sons Ltd., 188. doi:[10.1002/0470094931](https://doi.org/10.1002/0470094931)
5. Bomba, A. Ja., Safonik, A. P. (2011). Matematichne modeljuvannja procesu aerobnogo ochishhennja stichnih vod v poristomu seredovishhi. Matematichne ta komp'juterne modeljuvannja, 5, 36–44.
 6. Mel'cer, V. Z. (1995). Fil'troval'nye sooruzhenija v kommunal'nom vodosnabzhenii. Moscow: Strojizdat, 176.
 7. Minc, D. M. (1964). Teoreticheskie osnovy tehnologii ochistki vody. Moscow: Strojizdat, 156.
 8. Shehtman, Ju. M. (1961). Fil'tracija malokoncentrirovannyh suspenzij. Moscow: AN SSSR, 212.
 9. Ives, K. J. (1969). Deep-bed water filters. New developments, 6 (1), 42–48.
 10. Kalthé, A. M., Hjorth, P., Berndtsson, R. (2008). Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: Analysis, modelling and application. Environmental Modelling & Software, 23 (7), 835–845. doi:[10.1016/j.envsoft.2007.10.001](https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2007.10.001)
 11. Maier, H. R., Dandy, G. C. (2000). Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications. Environmental Modelling & Software, 15 (1), 101–124. doi:[10.1016/s1364-8152\(99\)00007-9](https://doi.org/10.1016/s1364-8152(99)00007-9)
 12. Heikkinen, M., Heikkinen, T., Hiltunen, Y., Liukkonen, M., Poutiainen, H. (2011). Subtraction analysis based on self-organizing maps for an industrial wastewater treatment process. Mathematics and Computers in Simulation, 82 (3), 450–459. doi:[10.1016/j.matcom.2010.10.021](https://doi.org/10.1016/j.matcom.2010.10.021)
 13. Bomba, A. Ja., Klimjuk, Ju. Je., Safonik, A. P., Sivak, V. M. (2010). Chislovo-asimptotichne nablizhennja rozv'jazkiv prostоровih model'nih zadach procesu fil'truvannja. Fiziko-matematichne modeljuvannja ta informacijni tehnologii, 11, 29–38.
 14. Klimjuk, Ju. Je., Sivak, V. M. (2010). Modeljuvannja procesu doochistki vodi vid zalishkovih kationiv aljuminiju fil'truvannjam cherez anionoaktivni zavantazhennja iz vrahuvannjam zmini fil'tracijnih vlastivostej seredovishha. Volins'kij matematichnij visnik. Serija prikladna matematika, 7 (16), 93–109.
 15. Bomba, A. Ja., Klimjuk, Ju. Je. (2014). Matematichne modeljuvannja prostоровih singuljarno-zburenih procesiv tipu fil'tracija-konvekciija-difuzija. Rivne : Assol', 273.
 16. Rauz, H. (1967). Mehanika zhidkosti. Moscow: Strojizdat, 390.

Надійшла (received) 08.01.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Прогнозування оптимальних режимів роботи багатосарових швидких фільтрів з кусково-однорідними пористими завантаженнями/ Ю. Є. Климяк// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 4(1176). – С.122–131. – Бібліогр.: 16 назв. – ISSN 2079-5459.

Прогнозирование оптимальных режимов работы многослойных скорых фильтров с кусочно-однородными пористыми нагрузками/ Ю. Е. Климяк// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 4(1176). – С.122–131. – Бібліогр.: 16 назв. – ISSN 2079-5459.

Prediction of optimal modes of operation of multi-layers rapid filters with piecewise-homogeneous porous loads/ Ju. Je. Klimjuk//Bulletin of NTU “KhPI”. Series: Mechanical-technological systems and complexes. – Khar'kov: NTU “KhPI”, 2016. – No 4 (1176). – P. 122–131. – Bibliogr.: 16.– ISSN 2079-5459.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Климяк Юрій Євгенійович – кандидат технічних наук, Рівненський державний гуманітарний університет, доцент кафедри інформатики та прикладної математики, вул. Степана Бандери, 12, м. Рівне, Україна, 33028; e-mail: klimyuk@ukr.net.

Климяк Юрий Евгеньевич – кандидат технических наук, Ровенский государственный гуманитарный университет, доцент кафедры информатики и прикладной математики, ул. Степана Бандеры, 12, г. Ровно, Украина, 33028; e-mail: klimyuk@ukr.net.

Klimjuk Jurij – candidate of technical sciences, Rivne State University of Humanities, Associate Professor of the Department of Informatics and Applied Mathematics, Str. S. Bandery, 12, Rivne, Ukraine, 33028, e-mail: klimyuk@ukr.net.