УДК 621.301

В. В. ЛЕОНТЬЕВА, Н. А. КОНДРАТЬЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В НЕКОТОРОМ КЛАССЕ СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе проводится анализ чувствительности позитивной динамической системы балансового типа, поведение которой описывается разомкнутой непрерывной математической моделью с ограничениями, обеспечивающими получение неотрицательных решений на бесконечном интервале времени. Для исследуемой системы построены уравнения чувствительности по каждому из параметров системы, в результате решения которых получены функции чувствительности системы. По результатам исследования проведены вычислительные эксперименты, результаты которых соответствуют результатам проведенных в работе теоретических исследований оценивания чувствительности.

Ключевые слова: позитивная система, продуктивность, непрерывная модель, чувствительность, функция чувствительности, уравнение чувствительности.

В роботі проводиться аналіз чутливості позитивної динамічної системи балансового типу, поведінка якої описується розімкненою неперервною математичною моделлю з обмеженнями, що забезпечують отримання невід'ємних розв'язків на нескінченному інтервалі часу. Для досліджуваної системи побудовано рівняння чутливості за кожним з параметрів системи, в результаті розв'язання яких отримано функції чутливості системи. За результатами дослідження проведено обчислювальні експерименти, результати яких відповідають результатам проведених в роботі теоретичних досліджень оцінювання чутливості.

Ключові слова: позитивна система, продуктивність, неперервна модель, чутливість, функція чутливості, рівняння чутливості.

The analysis of the parametric sensitivity of the main characteristics of the positive dynamical system of balanced type, the behavior of which is described by opened continuous mathematical model with constraints that ensure the obtaining of non-negative solutions on an infinite intervals of time, is given in this work. The dependence of the results obtained from the model on the variation of the parameters of the initial mathematical model of the positive dynamical system is determined.

For the analysis of parametric sensitivity, for the investigated positive system the sensitivity equations for each of the system parameters are constructed. According to the results of solving the sensitivity equations, the sensitivity functions are obtained in this work. On the basis of these functions it is possible to analyze the changes in the main characteristics of the positive system when the values of the input parameters of the models are varied.

According to the results of research, the computational experiments were conducted for the investigated system. The results of these experiments correspond to the results of the theoretical researches of evaluation of sensitivity.

Keywords: positive system, productivity, continuous model, sensitivity, function of sensitivity, equation of sensitivity, stationary solution.

Введение. В реальных системах управления и регулирования достаточно часто встречаются параметры, изменяющиеся в процессе работы систем [1, 2]. В таком случае в задачах исследования систем управления важную роль играет изучение вопроса чувствительности систем управления к вариациям их параметров [1–7]. Это касается в первую очередь изменений параметров в математических моделях, описывающих поведение исследуемого объекта. Необходимость изучения этих вопросов вызвана, во-первых, тем, что реальные значения параметров системы, как правило, отличаются от расчетных, что в свою очередь приводит к возникновению параметрических ошибок в работе систем, возникающих, как правило, в результате параметрических возмущений в объекте исследования или в его среде функционирования. Во-вторых, информация о зависимости характеристик системы от изменения ее параметров может использоваться для улучшения ее качества. Так, в том случае, если в процессе исследования выявлены отдельные параметры объекта, изменение которых существенным образом влияет на его выходные характеристики, целесообразным становится переход к задаче синтеза, в которой такие изменения будут изначально учтены, а, следовательно, будет выработана программа действий, позволяющая максимально снизить влияние таких параметров на основные характеристики объекта исследования, и, тем самым, становится возможным добиться снижения его чувствительности к вариациям выделенных параметров и, таким образом, уменьшить параметрические ошибки и повысить качество моделируемых систем управления и регулирования. Вместе с тем, повышение качества исследуемых систем управления в отдельных случаях (например, адаптивные системы, системы с идентификацией математических моделей и т.п.) требует целенаправленного изменения некоторых своих параметров. В этих случаях также целесообразно иметь информацию о чувствительности системы к изменению указанных параметров и о степени влияния таких параметров на исследуемую систему управления.

В данной работе исследование параметрической чувствительности проводится применительно к отдельному классу сложных динамических систем – классу позитивных динамических систем балансового типа [6–10], характеризующимся свойством позитивности всех переменных на протяжении всего времени [6–23]. К таким системам относятся системы, описывающие поведение сложных экономических, экологических, биологических и других объектов [10–16, 20–23], на основные параметры, характеристики и начальные условия которых накладываются ограничения позитивности [10–16], гарантирующие получение неотрицательных фазовых траекторий и выходных характеристик системы на протяжении всего времени. Математическим моделям, описывающим поведение указанных систем, присуще наличие большого числа ограничений на входящие в них параметры и переменные [10–13], обеспечивающие выполнение требования позитивности входных и выходных характеристик систем, а также требование асимптотической устойчивости получаемых решений. В этой связи особенно актуальными становятся исследования чувствительности исследуемого класса систем к вариациям указанных параметров, позволяющие существенным образом повысить качество исследуемых систем и снизить возникновение параметрических ошибок их функционирования, что в дальнейшем позволит расширить спектр возможных управляющих воздействий на объект исследования, а, следовательно, расширить функционирование исследуемых систем в более широком диапазоне воздействующих факторов и, таким образом, повысить их эффективность.

Анализ литературных данных и постановка проблемы. Аппарат теории чувствительности, изучающей влияние вариации параметров (т.е. любые отклонения этих параметров от значений, принятых за исходные) на динамические свойства исследуемых систем, является сильным средством анализа и синтеза систем управления и теоретической основой построения новых классов систем [1–6, 17, 18].

При этом, анализ чувствительности, являющийся одним из самых эффективных способов прогнозирования результатов функционирования систем произвольной природы, позволяет решить одну из важнейших проблем моделирования и анализа сложных систем – проблему исследования влияния изменения параметров системы на ее основные характеристики при изменении различных внутренних и внешних факторов – путем выявления важнейших факторов, способных наиболее существенно повлиять на эффективность функционирования исследуемой системы. Серьезность этой проблемы нашла свое отражение в исследованиях и публикациях отечественных и зарубежных ученых [1-6, 17–23].

Основу теории чувствительности составляют методы, позволяющие качественно исследовать влияние вариации параметров на динамические свойства исследуемых систем [1–6]. В основе различных методов теории чувствительности в качестве прямых оценок чувствительности лежит использование функций чувствительности [1–3, 5, 17], которые играют большую роль в количественной оценке степени влияния вариаций параметров системы на ее динамические свойства и по сути представляют собой градиенты интересных для исследователя показателей качества системы по некоторым совокупностям параметров, характеризующих саму систему и внешнюю среду [3, 4]. Поэтому в теории чувствительности важное место занимают различные способы нахождения функций чувствительности для типовых классов сложных систем [1, 4–6, 17, 18, 23], в частности и позитивных динамических систем [17–19, 22, 23].

Основное внимание в теории чувствительности уделяется изучению бесконечно-малых вариаций, которое дает возможность оценить тенденцию поведения системы, получить более общие соотношения, не связанные с конкретным видом вариации [1, 4, 5]. Кроме того, непосредственное сведение оценок для бесконечно-малых вариаций до случая конечных, но достаточно малых вариаций дает возможность получить приближенные результаты с некоторой степенью точности [1, 2].

Для исследования чувствительности систем управления различной физической природы используется методика [1, 3, 4–6], позволяющая оценить чувствительность всех результативных показателей исследуемой системы к изменению каждого ее параметра в отдельности, а также их реакцию на принятие любого управленческого решения. Такая методика активно используется и при проведении исследования позитивных динамических систем [6, 7, 17, 18].

Поскольку в данной работе объектом исследования выступает выделенный впервые в работе [10] класс позитивных динамических систем балансового типа, то есть систем с положительными (или, по крайней мере, неотрицательными) переменными [6–10, 18–21, 23], характеризующихся специфическим свойством (свойством позитивности) [6, 7, 10–12, 22], для которых построены впервые в работах [10–14] дискретная и непрерывная модели функционирования, то необходимо отметить, что исследования в области чувствительности данного класса систем не проводились ранее и предлагаются к рассмотрению в данной работе.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является проведение анализа параметрической чувствительности позитивной динамической системы балансового типа, поведение которой описывается линейным неоднородным векторно-матричным дифференциальным уравнением с матрицами постоянных коэффициентов.

Задачей исследования является определение влияния всех коэффициентов разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа на ее выходные характеристики и получение обоснования возможных размеров изменения варьируемых коэффициентов модели.

Для достижения сформулированной цели были поставлены следующие задачи:

а) построить уравнения чувствительности позитивной динамической системы от изменения всех параметров модели, описывающей поведение исследуемой системы;

б) определить функции чувствительности исследуемой системы для всех параметров математической модели позитивной динамической системы в зависимости от вида задания функций управления;

в) определить стационарные решения уравнений чувствительности;

г) провести анализ полученных функций чувствительности и стационарных решений уравнений чувствительности;

г) сформулировать выводы по результатам проведенного анализа.

Объект и предмет исследования. Прежде, чем перейти к непосредственному исследованию чувствительности позитивной динамической системы, остановимся на объекте и предмете исследования, а также на математической модели, описывающей его поведение в условиях непрерывно изменяющегося времени.

В качестве *объекта исследования* в данной работе рассматривается позитивная динамическая система балансового типа [10], под которой понимается система, характеризующаяся свойством позитивности ее переменных на бесконечном интервале времени [10–12].

Поведение объекта исследования в условиях непрерывно изменяющегося времени описывается линейным неоднородным векторно-матричным дифференциальным уравнением первого порядка с матрицами постоянных коэффициентов [10-12] вида

$$\dot{X}(t)=(I-B)^{-1}\left((A-I)X(t)+C(t)\right),\quad X(0)=X_0 \qquad (1)$$

или

$$\dot{X}=\tilde{\tilde{A}}X(t)+\tilde{B}C(t),\quad X(0)=X_0, \qquad (2)$$

где время t предполагается непрерывным; $X(t)-$ $n-$мерный вектор состояния системы, $X(t)\in R^{n\times 1}$; $A,B-$ матрицы размерности $n\times n$ постоянных коэффициентов; $\tilde{\tilde{A}}=(I-B)^{-1}(A-I)-$ постоянная матрица состояния системы (объекта) размерности $n\times n$; $\tilde{B}=(I-B)^{-1}-$ постоянная матрица управления (входа) размерности $n\times n$; $C(t)-$ $n-$мерный вектор управления (входа) системы, являющийся либо заданным, либо функционально установленным (определяется в результате обработки экспериментальных данных объекта исследования методами регрессионного анализа), $C(t)\in R^{n\times 1}$; $I-$ единичная матрица размерности $n\times n$; $X(0)=X_0-$ $n-$мерный вектор-столбец начальных условий системы.

В представленной непрерывной модели позитивной динамической системы балансового типа, описываемой уравнением (1) или (2), для обеспечения выполнения свойства позитивности системы и асимптотической устойчивости (по Ляпунову) получаемых решений на матрицы постоянных коэффициентов A, B накладываются условия неотрицательности [10–12] и продуктивности [10–13], а на матрицу постоянных коэффициентов $\tilde{\tilde{A}}$ накладывается условие неположительности [10-14]: $(I-B)^{-1}(A-I)\le 0$.

Предметом исследования в работе выступают параметры непрерывной математической модели, описывающей поведение позитивной динамической системы балансового типа, доступные для варьирования в процессе функционирования позитивной системы, а также степень их влияния на объект исследования, а именно на его выходные характеристики.

Для модели, описываемой уравнением (1) или (2) в качестве исследуемых параметров выбираются коэффициенты всех матриц, а также параметры, входящие в вектор-функцию $C(t)=(C_1(t),C_2(t),\ldots,C_n(t))^T$. При этом в работе рассматриваются вектор-функции $C(t)$, заданные соответственно в линейном, квадратичном и гармоническом видах: $C(t)=C^0+Ct$; $C(t)=C^0+Ct^2$; $C(t)=C^0+C\sin\omega t$, где $C^0,C,\omega-$ параметры регрессионной модели.

Материалы и методы исследования параметрической чувствительности позитивной динамической системы балансового типа. В основе проведения комплексных исследований параметрической чувствительности позитивной динамической системы балансового типа является реализация следующих этапов:

а) построение уравнений чувствительности для исследуемой системы;

б) отыскание функций чувствительности всех параметров математической модели позитивной динамической системы;

в) проведение анализа функций чувствительности;

г) формулирование выводов по результатам проведенного анализа.

Исследование чувствительности позитивной системы проводится в работе на основе построения функций чувствительности вида $U_{ij}(t)=\dfrac{\partial X_i(t)}{\partial\alpha_j}$, где $\alpha_j\ (j=\overline{1,s})-$ параметры модели, по которым проводится анализ чувствительности исследуемой системы, а также на основе построения уравнений чувствительности вида $\dfrac{\partial}{\partial\alpha_j}X_i(t)=\dfrac{d}{dt}U_{ij}(t)$.

Результаты исследования параметрической чувствительности позитивной динамической системы балансового типа. Рассмотрим позитивную систему, состоящую из одной подсистемы (размерность системы $n=1$). В этом случае поведение исследуемой системы описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dX}{dt}=\frac{A-1}{1-B}X(t)+\frac{1}{1-B}C(t),\quad X(t_0)=X_0. \qquad (3)$$

Решая уравнение (3) методом вариации произвольных постоянных при начальном условии $X(t_0)=X_0$ и в зависимости от вида функции $C(t)$, имеем общее решение уравнения (3):

$$X(t)=-\frac{(1-B)C}{(A-1)^2}-\frac{C^0+Ct}{A-1}+e^{\left(\frac{A-1}{1-B}\right)t}\times\left(X_0+\frac{C^0}{A-1}+\frac{(1-B)C}{(A-1)^2}\right); \qquad (4)$$

$$X(t)=-\frac{C^0+Ct^2}{A-1}-\frac{2(1-B)Ct}{(A-1)^2}-\frac{2(1-B)^2C}{(A-1)^3}+e^{\left(\frac{A-1}{1-B}\right)t}\times\left(X_0+\frac{C^0}{A-1}+\frac{2(1-B)^2C}{(A-1)^3}\right); \qquad (5)$$

$$X(t)=-\frac{C^0}{A-1}-\frac{C\left((A-1)\sin\omega t+\omega(1-B)\cos\omega t\right)}{(A-1)^2+\omega^2(1-B)^2}+e^{\left(\frac{A-1}{1-B}\right)t}\left(X_0+\frac{C^0}{A-1}+\frac{C\omega(1-B)}{(A-1)^2+\omega^2(1-B)^2}\right). \qquad (6)$$

Исследуем чувствительность решений (4)–(6) на изменение входных параметров A,B,C^0,C,ω непрерывной модели.

Имеем следующие уравнения чувствительности по каждому из интересующих нас параметров:

$$\frac{dU_A^X(t)}{dt}=\frac{A-1}{1-B}U_A^X(t)+\frac{1}{1-B}X(t); \qquad (7)$$

$$\frac{dU_B^X(t)}{dt}=\frac{A-1}{1-B}U_B^X(t)+ \\ +\frac{A-1}{(1-B)^2}X(t)+\frac{1}{(1-B)^2}C(t); \quad (8)$$

$$\frac{dU_{C^0}^X(t)}{dt}=\frac{A-1}{1-B}U_{C^0}^X(t)+\frac{1}{1-B}; \quad (9)$$

$$\frac{dU_C^X(t)}{dt}=\frac{A-1}{1-B}U_C^X(t)+\frac{1}{1-B}\frac{dF(C,\omega,t)}{dC}; \quad (10)$$

$$\frac{dU_\omega^X(t)}{dt}=\frac{A-1}{1-B}U_\omega^X(t)+\frac{1}{1-B}\frac{dF(C,\omega,t)}{d\omega}, \quad (11)$$

где $C(t)=C^0+F(C,\omega,t)$.

Решая полученные уравнения чувствительности (7)-(11) в зависимости от вида функции $C(t)$, получаем интересующие нас функции чувствительности:

а) при $C(t)=C^0+Ct$ имеем:

$$U_A^X(t)=\frac{2(1-B)C}{(A-1)^3}+\frac{C^0+Ct}{(A-1)^2}+ \\ +\frac{t}{1-B}e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(X_0-X^*+\frac{(1-B)C}{(A-1)^2}\right)+ \\ +e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(-\frac{2(1-B)C}{(A-1)^3}-\frac{C}{(A-1)^2}\right); \quad (12)$$

$$U_B^X(t)=\frac{C}{(A-1)^2}+\frac{(A-1)t}{(1-B)^2}e^{\frac{A-1}{1-B}t}\times \\ \times\left(X_0-X^*+\frac{(1-B)C}{(A-1)^2}\right)+e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(-\frac{C}{(A-1)^2}\right); \quad (13)$$

$$U_{C^0}^X(t)=-\frac{1}{(A-1)}\left(1-e^{\frac{A-1}{1-B}t}\right); \quad (14)$$

$$U_C^X(t)=-\frac{t}{(A-1)}-\frac{1-B}{(A-1)^2}+\frac{1-B}{(A-1)^2}e^{\frac{A-1}{1-B}t};; \quad (15)$$

$$U_\omega^X(t)=0; \quad (16)$$

б) при $C(t)=C^0+Ct^2$ имеем:

$$U_A^X(t)=\frac{6(1-B)C}{(A-1)^4}+\frac{4(1-B)C}{(A-1)^3}t+\frac{C^0+Ct^2}{(A-1)^2}+ \\ +\frac{t}{1-B}e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(X_0-X^*+\frac{2(1-B)^2C}{(A-1)^3}\right)+ \\ +e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(-\frac{6(1-B)^2C}{(A-1)^4}-\frac{C}{(A-1)^2}\right); \quad (17)$$

$$U_B^X(t)=\frac{4(1-B)C}{(A-1)^3}+\frac{2Ct}{(A-1)^2}+ \\ +\frac{(A-1)t}{(1-B)^2}e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(X_0-X^*+\frac{2(1-B)^2C}{(A-1)^3}\right)+ \\ +e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(-\frac{4(1-B)C}{(A-1)^3}\right); \quad (18)$$

$$U_{C^0}^X(t)=-\frac{1}{(A-1)}\left(1-e^{\frac{A-1}{1-B}t}\right); \quad (19)$$

$$U_C^X(t)=-\frac{t^2}{(A-1)}-\frac{2(1-B)t}{(A-1)^2}- \\ -\frac{2(1-B)^2}{(A-1)^3}+\frac{2(1-B)^2}{(A-1)^3}e^{\frac{A-1}{1-B}t}; \quad (20)$$

$$U_\omega^X(t)=0; \quad (21)$$

в) при $C(t)=C^0+C\sin\omega t$ имеем:

$$U_A^X(t)=\frac{C}{(A-1)^2}+\frac{C\left((A-1)^2-(1-B)^2\omega^2\right)}{\left((A-1)^2+(1-B)^2\omega^2\right)^2}\sin\omega t+\frac{2C\left((A-1)(1-B)\omega\right)}{\left((A-1)^2+(1-B)^2\omega^2\right)^2}\cos\omega t+ \\ +\frac{t}{1-B}e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(X_0-X^*+\frac{C(1-B)\omega}{(A-1)^2+(1-B)^2\omega^2}\right)-e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(\frac{C}{(A-1)^2}-\frac{2C(A-1)(1-B)\omega}{\left((A-1)^2+(1-B)^2\omega^2\right)^2}\right); \quad (22)$$

$$U_B^X(t)=-\frac{2C\left((A-1)(1-B)^2\omega^2\right)}{\left((A-1)^2+(1-B)^2\omega^2\right)^2}\sin\omega t+\frac{C\omega\left((A-1)^2-(1-B)^2\omega^2\right)}{\left((A-1)^2+(1-B)^2\omega^2\right)^2}\cos\omega t+ \\ \frac{A-1}{1-B}te^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(X_0-X^*+\frac{C(1-B)\omega}{(A-1)^2+(1-B)^2\omega^2}\right)-e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(\frac{C\omega\left((A-1)^2-(1-B)^2\omega^2\right)}{\left((A-1)^2+(1-B)^2\omega^2\right)^2}\right); \quad (23)$$

$$U_{C^0}^X(t) = -\frac{1}{(A-1)}\left(1-e^{\frac{A-1}{1-B}t}\right); \qquad (24)$$

$$U_C^X(t) = \frac{(A-1)\sin\omega t + (1-B)\omega\cos\omega t}{(A-1)^2+(1-B)^2\omega^2} + $$
$$+e^{\frac{A-1}{1-B}t}\frac{(1-B)\omega}{(A-1)^2+(1-B)^2\omega^2}; \qquad (25)$$

$$U_\omega^X(t) = \frac{C}{\left((A-1)^2+(1-B)^2\omega^2\right)^2}\times$$
$$\times\Big(-(A-1)\left((A-1)^2+(1-B)^2\omega^2\right)t\cos\omega t +$$
$$+2(A-1)(1-B)^2\omega\sin\omega t-(1-B)\times$$
$$\times\left((A-1)^2-(1-B)^2\omega^2\right)\cos\omega t + \qquad . \qquad (26)$$
$$+(1-B)^2\omega\left((A-1)^2+(1-B)^2\omega^2\right)t\sin\omega t\Big)+$$
$$+e^{\frac{A-1}{1-B}t}\left(\frac{C(1-B)\left((A-1)^2-(1-B)^2\omega^2\right)}{\left((A-1)^2+(1-B)^2\omega^2\right)^2}\right);$$

Стационарные решения $U^*(t)$ для уравнений чувствительности (7)-(11), в которых достигается максимум по направлению изменения чувствительности по каждому из параметров модели и которые выступают в роли горизонтальной асимптоты для соответствующей функции чувствительности, имеют вид:

$$U_A^* = \frac{C^0}{(1-A)^2} \ge 0\,,\ \ U_B^* = 0\,,$$
$$U_{C^0}^* = \frac{1}{1-A} \ge 0\,,\ \ U_C^* = 0\,,\ \ U_\omega^* = 0\,.$$

Для позитивной динамической системы балансового типа с двумя подсистемами ($n=2$) исследование устойчивости проводится аналогичным образом. В этом случае уравнения чувствительности получаются путем дифференцирования решения уравнения вида (1) по каждому из параметров матриц, входящих в указанное уравнение:

а) по параметрам $a_{ij}\ (i=1,2,\ j=1,2)$ имеем:

$$\dot U_{a_{ij}}^k(t) = \tilde B_{ki}X_j(t) + \sum_{s=1}^{2}\tilde{\tilde A}_{ks}U_{a_{ij}}^s(t)\,,\ k=1,2\,;$$

б) по параметрам $b_{ij}\ (i=1,2,\ j=1,2)$ имеем:

$$\dot U_{b_{ij}}^k(t) = \sum_{s=1}^{2}\left[\frac{d\tilde{\tilde A}_{ks}}{db_{ij}}X_s(t) + \frac{d\tilde B_{ki}}{db_{ij}}C_s(t) + \tilde{\tilde A}_{ks}U_{b_{ij}}^s(t)\right],$$

$k=1,2$;

в) по параметрам $c_j^i\ (i=1,2,\ j=1,2)$ имеем:

$$\dot U_{c_j^i}^k(t) = \tilde B_{kj}\frac{dC_j(t)}{dc_j^i} + \sum_{s=1}^{2}\tilde{\tilde A}_{ks}U_{c_j^i}^s(t)\,,\ k=1,2\,;$$

где $a_{ij}, b_{ij}\ (i=1,2,\ j=1,2)$ – соответствующие элементы матриц A та B; $\tilde B_{ij}, \tilde{\tilde A}_{ij}\ (i=1,2,\ j=1,2)$ – соответствующие элементы матриц $\tilde B$ и $\tilde{\tilde A}$.

Решая эти системы с учетом начальных условий $X_i(t_0) = X_{i0}\ \ (i=1,2)$, можно получить функции чувствительности и стационарное (равновесное) решение, для каждого из параметров модели.

Аналогичным образом проводится и исследование чувствительности позитивной системы с n подсистемами. Полученные зависимости для случаев $n=1$ и $n=2$, сохраняются и на общем случае.

С целью определения основной характеристики математической модели позитивной динамической системы, в качестве которой выступает состояние системы, и выявления влияния на нее различных видов функций, проведения анализа чувствительности состояния системы в зависимости от варьирования всех параметров математической модели исследуемой системы, проведем вычислительные эксперименты для позитивных систем с одной и двумя подсистемами.

Проведем вычислительный эксперимент для системы с одной подсистемой при следующих входных параметрах

$$n=1\,,\quad A=0{,}4\,,\quad B=0{,}3\,,\quad C^0=2{,}6\,;$$
$$C=0{,}03\,;\quad \omega=45\,. \qquad (27)$$

и начальным условием $X_0 = 3$, $t_0 = 0$.

Составляя уравнения чувствительности (4)–(6) с учетом имеющихся данных, находятся функции чувствительности для различных видов задания функции $C(t)$ и стационарные (равновесные) решения модели. Графическое их изображение при линейном виде задания функции $C(t)$ приведено на рис. 1. Остальные случаи аналогичны.

Из рис. 1 видно, что все полученные решения (траектории движения динамической сложной системы) асимптотически приближаются к стационарному решению X^*. Аналогичные заключения можно сделать и для построенных функций чувствительности: их графики также асимптотически приближаются к стационарному решению U^*. В данном случае оказывается, что исходная позитивная система является чувствительной к изменению параметров A, B, C^0, C и не чувствительной к изменению параметра ω.

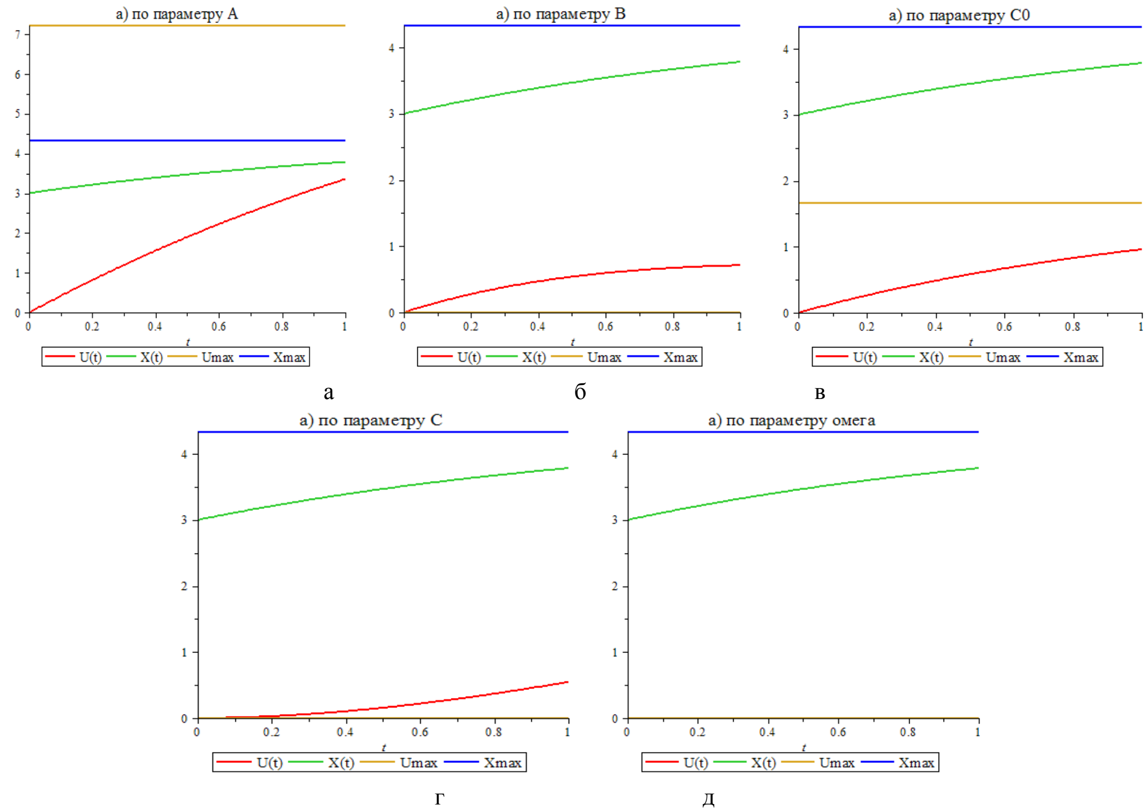

Рис. 1 – График функции чувствительности и решения уравнения (1) при $C(t)=C^0+Ct$ с учетом (27) и начального условия $X_0\left(0\right)=3$: а – по параметру *A*; б – по параметру *B*; в – по параметру C^0; г – по параметру *C*; д – по параметру ω

Обсуждение результатов исследования параметрической чувствительности позитивной динамической сис темы балансового типа. Согласно результатам проведенного анализа разомкнутой непрерывной модели и построенных для нее функции чувствительности, можно сделать вывод, что качественный характер траекторий выходных характеристик систем и траекторий чувствительности к параметрам системы для этой модели одинаковый, а, следовательно, закономерности, полученные при исследовании параметрической чувствительности позитивной динамической системы балансового типа, а также результаты, полученные при проведении вычислительных экспериментов для непрерывной модели, которая описывается уравнением (1) при $n=1$, $n=2$, сохраняются и для общего случая позитивной системы с n подсистемами.

В результате проведенных исследований было выявлена чувствительность исследуемой позитивной динамической системы к вариации ее параметров. В зависимости от ставящихся перед исследователем целей и в соответствии с полученными ранее результатами управления исследуемой системой [10, 15, 16], таким образом, становится возможным производить определенные целенаправленные управляющие воздействия на объект исследования с целью повышения его качества. Отдельные случаи таких воздействий рассмотрены в работах [10, 15].

Выводы. В работе проведено исследование параметрической чувствительности основных характеристик исследуемой позитивной динамической системы балансового типа, определена зависимость результатов, полученных по модели, от варьирования параметров исходной математической модели позитивной динамической системы. Для осуществления анализа параметрической чувствительности построены уравнения чувствительности по каждому из параметров модели, которые представляют собой линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами. В результате решения уравнений чувствительности в работе получены функции чувствительности, на основе которых и проводится анализ изменений основных характеристик позитивной системы при варьировании значений входных параметров моделей. Кроме того, получены зависимости, с помощью которых могут быть определены равновесные состояния чувствительности, которые, в свою очередь, позволяют найти асимптотические кривые для функций чувствительности и, таким образом, определить максимально возможные изменения основных характеристик исследуемой системы.

Список литературы:

1. *Кокотович, П. В.* Чувствительность систем автоматического управления [Текст] / *П. В. Кокотович, Р. С. Рутман* // Автоматика и телемеханика. – 1965. – Т. 26, Вып. 4. – С. 730–750.

2. *Розенвассер, Е. Н.* Вклад ленинградских ученых в развитие теории чувствительности систем управления [Текст] / *Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов* // Труды СПИИРАН. – 2013. – Вып. 25. – С. 13–41.

3. *Рубан, А. И.* Идентификация и чувствительность сложных систем [Текст] / *А. И. Рубан*. – Томск: Изд-во ТГУ, 1982. – 304 с.

4. *Городецкий, Ю. И.* Функции чувствительности и динамика сложных механических систем [Текст] / *Ю. И. Городецкий*. –

Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2006. – 236 с.

5. *Воронов, А. А.* Основы теории автоматического управления Теория автоматического управления. Часть 2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления [Текст] / *А. А. Воронов*. – М.: Высшая школа, 1986. – 504 с.
6. *Schuppen, J. H.* Control and System Theory of Positive Systems [Text] / *J. H. Schuppen*. – Amsterdam: The Vrije Universitei, 2007. – 245 p.
7. *Kaczorek, T.* Some Recent Developments in Positive 2D Systems [Text] / *T. Kaczorek* // Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2003. – P. 345-352. doi: 10.1007/978-3-540-44928-7_46
8. *Алілуйко, А. М.* Інваріантні конуси та стійкість лінійних динамічних систем [Текст] / *А. М. Алілуйко, О. Г. Мазко* // Український математичний журнал. – 2006. – Т.58, № 11. – С. 1446–1461.
9. *Красносельский, М. А.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов [Текст] / *М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев*. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
10. *Леонтьєва, В. В.* Математичне моделювання позитивних динамічних систем балансового типу [Текст]: дис. канд. фіз.-матем. наук / *В. В. Леонтьєва*. – Запорізький національний університет. – Запоріжжя, 2008. – 144 с.
11. *Леонтьева, В. В.* Разомкнутая дискретная математическая модель позитивных динамических систем балансового типа и ее анализ [Текст]: зб. наук. праць / *В. В. Леонтьева, Н. А. Кондратьева* // Вісник ЗНУ. – 2009. – № 1. – С. 132–137.
12. *Леонтьева, В. В.* Построение и анализ разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа [Текст]: зб. наук. праць / *В. В. Леонтьева, Н. А. Кондратьева* // Вісник ЗНУ. – 2010. – №1. – С. 81–88.
13. *Леонтьева, В. В.* Математическая модель динамики функционирования позитивных систем балансового типа [Текст]: зб. наук. праць / *В. В. Леонтьева* // Вісник ЗНУ. – Запоріжжя: ЗНУ. – 2008. – №1 – С. 118–124.
14. *Леонтьева, В. В.* Построение и анализ замкнутых дискретной и непрерывной математических моделей позитивных динамических систем балансового типа [Текст]: збір. тез доп. / *В. В. Леонтьева* // Актуальні проблеми математики та інформатики. – Запоріжжя: ЗНУ, 2008. – С. 34–37.
15. *Леонтьева, В. В.* Управление в непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа [Текст]: Сб. научных статей / *В. В. Леонтьева, Н. А. Кондратьева* // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. – №. 2 (35). – С. 273–278.
16. *Леонтьева, В. В.* Управляемость в математической модели позитивной динамической модели балансового типа [Текст]: мат. межн. конф. / *В. В. Леонтьева, Н. А. Кондратьева* // Динамическое моделирование и исследование стабильности, 2009. – С. 297.
17. *Ebihara, Y.* Dominant pole analysis of stable time-delay positive systems [Text] / *Y. Ebihara, D. Peaucelle, D. Arzelier, F. Gouaisbaut* // IET Control Theory & Applications. – 2014. – Vol. 8, No. 17. – P. 1963–1971. doi: 10.1049/iet-cta.2014.0375
18. *Ebihara, Y.* Dominant pole of positive systems with time-delays [Text] / *Ebihara Y., Peaucelle D., Arzelier D., Gouaisbaut F.* // European Control Conference (ECC). – Strasbourg. – 2014. – P. 79–84. doi: 10.1109/ecc.2014.6862165
19. *Loewy, R.* Positive operators on the n-dimensional ice cream cone [Text] / *R. Loewy, H. Schneider* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1975. – № 49 (2). – P. 375–392. doi: 10.1016/0022-247x(75)90186-9
20. *Schuppen, J. H.* Mathematical Control and System Theory of Stochastic Systems in Discrete-Time [Text] / *J. H. Schuppen*. – Amsterdam: The Vrije Universitei, 2006. – 497 p.
21. *Caswell, H.* Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation [Text] / *H. Caswell*. – John Wiley & Son, 2014 – 722 p. doi: 10.1002/9781118445112.stat07481
22. *De Leenheer, P.* Feedback control for chemostat models [Text] / *P. De Leenheer, H. L. Smith* // Journal of Mathematical Biology. – 2003. – № 46 (1). – P. 48–70. doi: 10.1007/s00285-002-0170-x
23. *Muratori, S.* Performance evaluation of positive regulators for population control [Text] / *S. Muratori* // Modeling, Identification and Control. – 1989. – Vol. 10. No. 3 – P. 125–134.

Bibliography (transliterated):

1. Kokotovich, P. V., Rutman, R. S. (1965). Chuvstvitel'nost' sistem avtomaticheskogo upravlenija. Avtomatika i telemehanika, 26 (4), 730–750.
2. Rozenvasser, E. N., Jusupov, R. M. (2013). Vklad leningradskih uchenyh v razvitie teorii chuvstvitel'nosti sistem upravlenija. Trudy SPIIRAN, 25, 13–41.
3. Ruban, A. I. (1982). Identifikacija i chuvstvitel'nost' slozhnyh system. Tomsk: Izd-vo TGU, 304.
4. Gorodeckij, Ju. I. (2006). Funkcii chuvstvitel'nosti i dinamika slozhnyh mehanicheskih system. Nizhnij Novgorod: Izdatel'stvo Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo, 236.
5. Voronov, A. A. (1986). Osnovy teorii avtomaticheskogo upravlenija Teorija avtomaticheskogo upravlenija. Chast' 2. Teorija nelinejnyh i special'nyh sistem avtomaticheskogo upravlenija. Moscow: Vysshaja shkola, 504.
6. Schuppen, J. H. (2007). Control and System Theory of Positive Systems. Amsterdam: The Vrije Universitei, 245.
7. Kaczorek, T. (2004). Some Recent Developments in Positive 2D Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 345–352. doi: 10.1007/978-3-540-44928-7_46
8. Aliluiko, A. M., Mazko, O. H. (2006). Invariantni konusy ta stiikist liniinykh dynamichnykh system. Ukrainskyi matematychnyi zhurnal, 58 (11), 1446–1461.
9. Krasnosel'skij, M. A., Lifshic, E. A., Sobolev, A. V. (1985). Pozitivnye linejnye sistemy: metod polozhitel'nyh operatorov. Moscow: Nauka, 256.
10. Leontieva, V. V. (2008). Matematychne modeliuvannia pozytyvnykh dynamichnykh system balansovoho typu. Zaporizkyi natsionalnyi universytet, Zaporizhzhia, 144.
11. Leont'eva, V. V., Kondrat'eva, N. A. (2009). Razomknutaja diskretnaja matematicheskaja model' pozitivnyh dinamicheskih sistem balansovogo tipa i ee analiz. Visnik ZNU, 1, 132–137.
12. Leont'eva, V. V., Kondrat'eva, N. A. (2010). Postroenie i analiz razomknutoj nepreryvnoj matematicheskoj modeli pozitivnoj dinamicheskoj sistemy balansovogo tipa. Visnik ZNU, 1, 81–88.
13. Leont'eva, V. V. (2008). Matematicheskaja model' dinamiki funkcionirovanija pozitivnyh sistem balansovogo tipa. Visnik ZNU, Zaporizhzhja: ZNU,1, 118–124.
14. Leont'eva, V. V. (2008). Postroenie i analiz zamknutyh diskretnoj i nepreryvnoj matematicheskih modelej pozitivnyh dinamicheskih sistem balansovogo tipa. Aktual'ni problemi matematiki ta informatiki, Zaporizhzhja: ZNU, 34–37.
15. Leont'eva, V. V., Kondrat'eva, N. A. (2009). Upravlenie v nepreryvnoj matematicheskoj modeli pozitivnoj dinamicheskoj sistemy balansovogo tipa. Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tehnicheskogo universiteta, 2 (35), 273–278.
16. Leont'eva, V. V., Kondrat'eva, N. A. (2009). Upravljaemost' v matematicheskoj modeli pozitivnoj dinamicheskoj modeli balansovogo tipa. Dinamicheskoe modelirovanie i issledovanie stabil'nosti, 297.
17. Ebihara, Y., Arzelier, D., Gouaisbaut, F., Peaucelle, D. (2014). Dominant pole analysis of stable time-delay positive systems. IET Control Theory & Applications, 8 (17), 1963–1971. doi: 10.1049/iet-cta.2014.0375
18. Ebihara, Y., Peaucelle, D., Arzelier, D., Gouaisbaut, F. (2014). Dominant pole of positive systems with time-delays. 2014 European Control Conference (ECC), 79–84. doi: 10.1109/ecc.2014.6862165
19. Loewy, R., Schneider, H. (1975). Positive operators on the n-dimensional ice cream cone. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 49 (2), 375–392. doi: 10.1016/0022-247x(75)90186-9
20. Schuppen, J. H. (2006). Mathematical Control and System Theory of Stochastic Systems in Discrete-Time. Amsterdam: The Vrije Universitei, 497.
21. Caswell, H. (2014). Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation. John Wiley & Son, 722. doi: 10.1002/9781118445112.stat07481
22. De Leenheer, P., Smith, H. (2003). Feedback control for chemostat models. Journal of Mathematical Biology, 46 (1), 48–70. doi: 10.1007/s00285-002-0170-x
23. Muratori, S. (1989). Performance evaluation of positive regulators for population control. Modeling, Identification and Control, 10 (3), 125–134.

Поступила (received) 06.11.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Дослідження чутливості в деякому класі складних динамічних систем/ В. В. Леонтьєва, Н. О. Кондрат'єва// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – No 50(1222). – С.47–54. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2079-5459.

Исследование чувствительности в некотором классе сложных динамических систем/ В. В. Леонтьева, Н. А. Кондратьева// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – No 50(1222). – С.47–54. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2079-5459.

Research the Sensitivity of Certain Class of Complex Dynamical Systems/ V. Leontieva, N. Kondratieva//Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mechanical-technological systems and complexes. – Kharkov: NTU "KhPI", 2016. – No 50 (1222).– P.47–54. – Bibliogr.: 10. – ISSN 2079-5459.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Леонтьєва Вікторія Володимирівна – кандидат фізико-математичних наук, Запорізький національний університет, доцент кафедри прикладної математики і механіки; вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, Україна, 69600; e-mail: vleonteva@mail.ru.

Кондрат'єва Наталія Олександрівна – кандидат фізико-математичних наук, Запорізький національний університет, доцент кафедри прикладної математики і механіки; вул. Жуковського 66, м. Запоріжжя, Україна, 69600; e-mail: n-kondr@mail.ru.

Леонтьева Виктория Владимировна – кандидат физико-математических наук, Запорожский национальный университет, доцент кафедры прикладной математики и механики; ул. Жуковского 66, г. Запорожье, Украина, 69600; e-mail: vleonteva@mail.ru.

Кондратьева Наталия Александровна – кандидат физико-математических наук, Запорожский национальный университет, доцент кафедры прикладной математики и механики; ул. Жуковского 66, г. Запорожье, Украина, 69600; e-mail: n-kondr@mail.ru

Leontieva Viktoriia – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Zaporizhzhya National University; Zhukovskogo str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine, 69600; e-mail: vleonteva@mail.ru.

Kondratieva Nataliia – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Zaporizhzhya National University; Zhukovskogo str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine, 69600; e-mail: n-kondr@mail.ru.