

УДК 681.3:946.9:004.942

*В. П. ЛЯШЕНКО*, д-р техн. наук, проф., КНУ, Кременчуг

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА**

Предложена математическая модель температурного поля бесконечного цилиндра, разогреваемого движущимся внутренним источником тепла. Источник тепла представлен с применением дельта-функции Дирака. Получены аналитические решения упрощенных задач и определены параметры управления температурным полем. Предложена структура алгоритма решения нелинейной задачи и блок-схема системы управления температурным полем на основе разработанного алгоритма. Проведены численные эксперименты, построено температурное распределение для технологического процесса термической обработки вольфрамовой проволоки. На основе решения нелинейной задачи, для системы управления, построен график зависимости силы тока нагрева от времени.

**Ключевые слова:** температурное поле, движущийся источник тепла, дельта-функция Дирака, алгоритм, блок-схема системы управления.

**Постановка проблемы.** Процессы термической обработки длинномерных изделий, таких как проволока, лента, профиля различной конфигурации, осуществляются путем пропускания через изделие электрического тока. Он подводится к изделию с помощью контактов или индуктора на конечном участке [1]. Для обеспечения стабильных физико-механических свойств металла необходимо в зоне нагрева поддерживать и контролировать заданную температуру. Этого можно достичь с помощью построения соответствующей математической модели и системы управления, построенной на основе такой модели [2]. Существующие математические модели дают возможность рассматривать температурное распределение в зоне нагрева движущейся проволоки, но не позволяют исследовать температурное поле в ее окрестности [3–5]. Во многих случаях, знание такого распределения представляет значительный научный и практический интерес. Системы управления, позволяющие управлять температурным полем в большинстве своем не ориентированы на математические модели технологического процесса, что снижает эффективность реализации системы [2].

**Цель работы.** Целью работы есть построение математической модели температурного поля в бесконечной цилиндрической области, с постоянно или периодически действующим, внутри области, движущимся сосредоточенным источником тепла. Определение параметров управления температурным полем на основе математической модели.

**Материалы и результаты исследований.** Для расчета температурного распределения  $T(P, t)$  предполагается, что бесконечный цилиндр с постоянными теплофизическими характеристиками  $\lambda, c, \rho_n$  нагревается в зоне нагрева длиной  $\Delta l = z_2 - z_1$ , источником  $W(P, T) = W(P, t, T) [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))]$ , который движется вдоль оси  $Oz$  в положительном направлении со скоростью  $v(t)$ .

Температура на границах области равна  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} T = T_0$ . Теплообмен поверхности цилиндра с окружающей средой осуществляется по законам Ньютона и Стефана – Больцмана [4-5].

В начальной стадии имеет место переходной процесс нагрева, т.е. переменной является скорость и плотность источников тепла, причем температура в конце зоны нагрева должна быть постоянной. В установившемся режиме скорость движения

$v(t)$  постоянна, а плотность источников тепла  $W(r, z, t, T)$  постоянна или зависит от координат и времени.

Если нагрев цилиндра осуществляется одновитковым индуктором или электронным пучком, то в таком случае зона нагрева может быть как угодно малой. Допуская в физической модели, что  $\Delta l \rightarrow 0$ , и заменяя рассредоточенный нагрев сосредоточенным с той же суммарной мощностью, перейдем к исследованию температурного поля цилиндрической области, разогреваемой подвижным сосредоточенным источником тепла. Очевидно, что при этом его плотность  $W$  неограниченно возрастает и в пределе представляет собой дельта - функцию Дирака  $W = W(P, t, T) \delta(z - v(t)t)$  [6].

Действительно, когда  $\Delta l \rightarrow 0$ ,  $z_1(t), z_2(t) \rightarrow v(t)t$ , в пределе правую часть соотношения  $W(P, T) = W(P, t, T) [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))]$  можно переписать в виде

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_2} W(P, t, T) [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))] = W(P, t, T) \delta(z - v(t)t), \quad (1)$$

где  $\eta(z - z_i)$  – единичная функция Хевисайда [7].

Правая часть (1) представляет собой произведение  $W(P, t, T)$  на дельта – функцию Дирака  $\delta(z - v(t)t)$  [6],

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{W(P, t, T)}{z_1(t) - z_2(t)} [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))] = W(P, t, T) \delta(z - v(t)t) \quad (2)$$

Следовательно, в случае сосредоточенного нагрева плотность источников тепла равна  $W(P, t, T) \delta(z - v(t)t)$ , где  $w(P, t, T) = w(T) f(t)$ ,  $w(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ ,  $f(t)$  – кусочно-монотонная функция, для отображения импульсного нагрева [4],  $P$  – текущая координата точки.

В таком случае температурное распределение в движущейся цилиндрической среде может быть представлено решением следующей начально-краевой задачи в области  $\Omega \times t = \{0 < r < r_0, z < \infty, t > 0\}$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -w(T) f(t) \delta(z - v(t)t) \quad (3)$$

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial T(r_0, z, 0)}{\partial r} = f(t) [\alpha(T_0 - T) + \varepsilon \sigma (T_0^4 - T^4)], \frac{\partial T(0, z, 0)}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm \infty} T = T_0, \quad (6)$$

После усреднения по радиусу [3] задача (3)-(5) в области  $\Omega_1 \times t = \{z < \infty, t > 0\}$  принимает вид

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} + \left[ \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} f(t) \delta(z - v(t)t) - \frac{2\alpha}{r_0} \right] u - 2\varepsilon \sigma r_0^{-1} u^4 - \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} f(t) \delta(z - v(t)t) - \frac{2\alpha T_0}{r_0} - 2\varepsilon \sigma r_0^{-1} T_0^4 \quad (7)$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm \infty} u(z, 0) = T_0 \quad (8)$$

В задаче (7)-(8) удобно перейти к безразмерным величинам, параметрам и критериям Био, Старка, Померанцева [5]

$$x = \frac{z}{l}, \tau = \frac{a^2 t}{l^2}, \mu = \frac{l}{r_0}, W = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4}, v = \beta T_0, Bi = 2\alpha l / \lambda, S = 2\varepsilon \sigma l^2 T_0^3 / (\lambda r_0), \quad (9)$$

$$Po = wl^2 / (\lambda T_0), a^2 = \lambda / (c \rho_n), \theta_0 = 0, \psi(\tau) = \frac{l}{a^2} v \left( \frac{l}{a^2} \tau \right), \theta = \frac{u - T_0}{T_0}.$$

После подстановки (9) в уравнение (7), начальное условие и условие регулярности (8), задача (7)-(8) становится однородной в области  $\Omega \times \tau = \{x < \infty, \tau > 0\}$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \{v Pof(\tau) \delta(x - \psi(\tau)\tau) - \mu Bi\} \theta - S(1 + \theta^4) = \quad (10)$$

$$= -(1 - v) Pof(\tau) \delta(x - \psi(\tau)\tau) - S$$

$$\theta(x, 0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x, \tau) = 0, \quad (11)$$

1. Если потеря тепла излучением с поверхности составляют малую долю всех потерь, т.е. преобладает конвективный теплообмен, то нелинейную составляющую в уравнении (10) можно не рассматривать и перейти к рассмотрению линейной начально-краевой задачи, которая для  $S \rightarrow 0$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \mu Bi \theta = -Pof(\tau) \delta(x - \psi(\tau)\tau) \quad (12)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \theta(x, \tau) = 0,$$

Применим преобразование Фурье к уравнению (12) [6]. Для этого умножим дифференциальное уравнение на  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$  и проинтегрируем по переменной  $x$  в пределах

от  $-\infty$  до  $+\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} e^{-ikx} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \theta dx - \quad (13)$$

$$- \frac{\mu Bi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta e^{-ikx} dx = - \frac{Pof(\tau)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta e^{-ikx} \delta(x - \psi(\tau)\tau) dx$$

После интегрирования (13) с учетом условия (11), а также соотношения

$$\bar{\theta}(k, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, \tau) e^{-ikx} dx \quad (14)$$

Получим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\tau} + (k^2 + \mu Bi) \bar{\theta} = Pof(\tau) e^{-ik\psi(\tau)\tau}, \tau > 0 \quad (15)$$

$$\bar{\theta}(k, 0) = 0 \quad (16)$$

Решение этой задачи выписывается в виде

$$\bar{\theta}(k, \tau) = Pof(\tau) e^{-(k^2 + \mu Bi)\tau} \int_0^{\tau} f(\tau) e^{(-ik\psi(\tau) + k^2 + \mu Bi)\tau} d\tau \quad (17)$$

2. Рассмотрим случай, когда сосредоточенный источник тепла, разогревая область, движется с постоянной скоростью  $v$ . Тогда после усреднения [3] и замены переменных  $\zeta = z - vt$  задачу (3)-(6) можно записать в виде.

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \frac{vc\rho_p}{\lambda} \frac{du}{d\zeta} + \left[ \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4 \lambda} f(t) \delta(\zeta) - \frac{2\alpha}{\lambda r_0} \right] u - \frac{2\varepsilon\sigma}{\lambda r_0} u^4 = - \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4 \lambda} f(t) \delta(\zeta) - \frac{2\alpha T_0}{\lambda r_0} - \frac{2\varepsilon\sigma}{\lambda r_0} T_0^4, \zeta < \infty \quad (18)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} u(\zeta) = T_0 \quad (19)$$

В линейном случае, когда потери тепла излучением можно не учитывать, задача (18)-(19) упрощается и можно получить аналитическое решение

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \frac{vc\rho_p}{\lambda} \frac{du}{d\zeta} + \left[ \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4 \lambda} f(t) \delta(\zeta) - \frac{2\alpha}{\lambda r_0} \right] u = - \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4 \lambda} f(t) \delta(\zeta) - \frac{2\alpha T_0}{\lambda r_0}, \zeta < \infty, \quad (20)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} u(\zeta) = T_0$$

Для  $\zeta < 0$  или  $\zeta > 0$ , задача (20) имеет вид

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} + \frac{vc\rho_p}{\lambda} \frac{du}{d\zeta} - \frac{2\alpha}{\lambda r_0} u = -\frac{2\alpha T_0}{\lambda r_0}, \quad (21)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} u(\zeta) = T_0$$

Ее решение записывается следующим образом

$$u(\zeta) = T_0 + Ce^{k_1\zeta}, \quad \zeta < 0, \quad \zeta > 0 \quad (22)$$

где  $k_{1,2} = -\frac{vc\rho_p}{2\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{vc\rho_p}{2\lambda}\right)^2 + \frac{2\alpha}{\lambda r_0}}$

Для определения постоянной  $C$  воспользуемся условием скачка дельта-функции Дирака

$$\left[ \frac{du}{d\zeta} \right]_{\zeta=0} + \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4 vc \rho_p} u(0) = -\frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4 vc \rho_p} \quad (23)$$

Откуда после подстановки (22) в (23) получаем

$$C = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_0)}{\pi^2 r_0^4 vc \rho_p (k_1 - k_2) - I^2 \rho_0 \beta} \quad (24)$$

Подставив (24) в (22) получим

$$u(\zeta) = T_0 + \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_0)}{\pi^2 r_0^4 vc \rho_p (k_1 - k_2) - I^2 \rho_0 \beta} \begin{cases} e^{k_1\zeta}, & \zeta \leq 0 \\ e^{k_2\zeta}, & \zeta > 0 \end{cases} \quad (25)$$

Так как  $|k_2| > k_1$ , то кривая, характеризующая решение имеет различный наклон на промежутках  $(-\infty, 0], (0, \infty)$ . При больших скоростях движения источника тепла различный характер наклона кривой будет еще более выраженным. На графике представлены кривые, рассчитанные по формуле (25) и соответствующие различным скоростям движения источника тепла.

Проведены численные эксперименты и построены графики температурных распределений для технологического процесса волочения вольфрамовой проволоки.

На рис.1 изображено температурное поле вольфрамовой проволоки, разогреваемой подвижным точечным источником тепла.

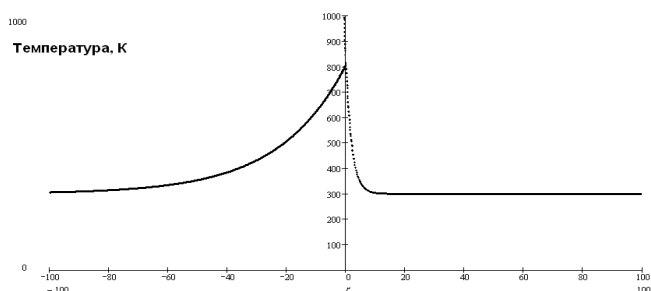


Рис.1 - Температурное распределение, построенное по решению (25)

Численный анализ показал, что характер температурного поля проволоки наиболее чувствительно изменяется с изменением таких параметров, как коэффициент теплообмена  $\alpha$ , сила тока  $I$ , скорость  $v(t)$  движения источника. Изменяя эти параметры можно контролировать и управлять температурным распределением.

Разработан алгоритм решения нелинейной задачи (19)-(20) и систему управления, позволяющую управлять температурным полем во время процесса

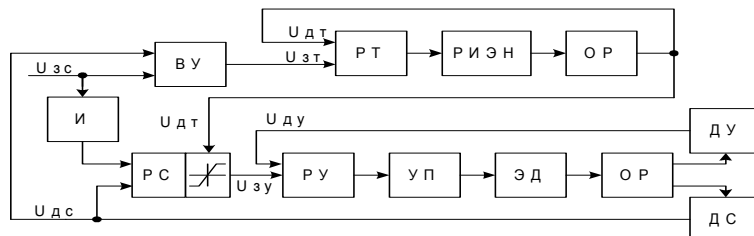


Рис. 2 - Система регулирования нагревом проволоки при волочении

волочения по заданному алгоритму.

Блок-схема системы управления температурным полем изображена на рис. 2. Она реализует алгоритм, построенный по решениям задачи (19)- (20) и решению (25), который позволяет по заданной

программе управлять как импульсным, так и постоянным источником тока во время обработки проволоки диаметром меньше 100 мкм. Система управления, блок-схема которой представлена на рис. 2, содержит вычислительное устройство (ВУ), в котором определяется оптимальное значение тока обработки проволоки. Напряжение задания тока на входе контура регулирования вычисляется в блоке ВУ.

Система управления нагревом включает в себя РТ, РС, РУ – регуляторы тока, скорости и усилия волочения; ДТ, ДС, ДУ – датчики тока, скорости и усилия волочения; РИЭН – регулируемый источник электроэнергии; УП – управляемый преобразователь; ЭД – электродвигатель установки волочения; ОР – объект регулирования (активный участок проволоки);  $U_{зт}$ ,  $U_{зс}$ ,  $U_{зу}$  – напряжения задания тока, скорости и усилия волочения;  $U_{дт}$ ,  $U_{дс}$ ,  $U_{ду}$  – напряжения на выходе датчиков тока, скорости и усилия волочения, И – интегратор, ВУ – вычислительное устройство.

Для определения параметров управления температурным полем и процессом термической обработки разработана программа. На рис. 3 схематично представлена структура программы решения нелинейной задачи для одномерного и двумерного уравнения теплопроводности. Структура программы построена за модульным принципом. Это позволило объединить решения задач для уравнений теплопроводности и, учитывая технологические особенности процессов, вести расчеты, меняя краевые условия. Для решения двумерного нелинейного уравнения теплопроводности применен метод переменных направлений, что позволило ограничиться одним модулем решения ленточных систем разностных уравнений второго порядка.

На рис. 4 изображен график зависимости сила тока, необходимого для поддержания постоянной температуры перед фильерой во время переходного процесса, полученного из решения задачи оптимизации по алгоритму, изображенному на рис.3, когда скорость движения проволоки изменяется в пределах  $0 \leq v(t) \leq v = const$ .



Рис. 3 - Структура алгоритма для определения параметров управления температурным полем

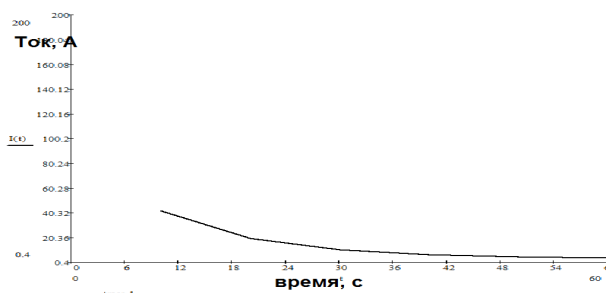


Рис. 4 - Параметр управления температурным полем, полученный из решения задачи (3)-(6)

**Выводы.** Предложена математическая модель температурного поля бесконечного цилиндра, разогреваемого движущимся внутренним источником тепла. Источник тепла представлен с применением дельта-функции Дирака. Получены аналитические решения упрощенных задач и определены параметры управления температурным полем. Предложено структуру алгоритма решения нелинейной задачи и систему управления температурным полем на основе предложенного алгоритма. Проведены численные эксперименты, построено температурное распределение для технологического процесса термической обработки вольфрамовой проволоки. На основе решения нелинейной задачи, для системы управления, построен график зависимости силы тока нагрева от времени. Результаты, полученные в работе, могут быть применены при создании систем управления

процессом термической обработки и при производстве проволоки и ленты из цветных и тугоплавких металлов.

**Список литературы:** 1. Коврев, Г. С. Электроконтактный нагрев при обработке цветных металлов [Текст] / Г.С. Коврев/ М.: Металлургия, 1975. -312 с. 2. Ляшенко, В. П. Пристрій для регулювання величини нагріву рухомого дроту перед волочінням [Текст] / Ляшенко В. П., Гусак В. І. // Патент України на винахід № 16206. Бюл. № 4, 1997. 3. Ляшенко, В. П., Задачі для рівняння теплопровідності у порошковій металургії [Текст] / В. П. Ляшенко, В. А. Ванін // Вісник НТУ «ХП» Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків, 2010. – Вип. 68. – С. 108–113. 4. Троицкий, О. А. Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов [Текст] / О. А. Троицкий, В. И. Сташенко, В.Г Рыжков и др.// «Вопросы атомной науки и техники» (ВАНТ). – Харьков, 2011. Вип. 4/2011 – С. 111 – 117. 5. Кобыльская, Е. Б. Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении [Текст] / Е. Б. Кобыльская, В.П. Ляшенко, Т.А. Григорова и др.// Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2011. – Вип. 4/2011 (69) частина 1. – С. 57-62. 6. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа [Текст] / П. И. Лизоркин – М.: Наука, 1981. – 216 с. 7. Мартыненко В. С. Операционное исчисление [Текст] / В.С. Мартыненко/ – К.: Изд-во Киевского университета, 1968. – 197с.

Надійшла до редколегії 20.03.2013

УДК 681.3:946.9:004.942

**Определение параметров управления движущегося сосредоточенного источника тепла/ В. П. Ляшенко** // Вісник НТУ «ХП». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХП», – 2013. - № 1 (977). – С. 177-182. – Бібліогр.: 7 назв.

Запропонована математична модель температурного поля нескінченного циліндра, що розігрівається рухомим точковим внутрішнім джерелом тепла. Джерело тепла представлено із залученням дельта-функції Дірака. Отримано розв'язки спрощених задач, та визначені параметри керування температурним полем. Запропоновано структуру алгоритму розв'язку нелінійної задачі та блок-схему системи керування температурним полем на основі запропонованого алгоритму. Проведені чисельні експерименти та побудовано температурний розподіл для технологічного процесу термічної обробки вольфрамового дроту. На основі розв'язку нелінійної задачі для системи керування побудовано графік залежності сили струму нагрівання в залежності від часу.

**Ключові слова:** температурне поле, рухоме джерело тепла, дельта-функція Дірака, алгоритм, блок-схема системи керування.

Mathematical model of temperature field of an infinite cylinder, which is heated by a moving internal heat source offered. The heat source is represented using Dirac delta function. Analytical solutions of simplified problems are obtained. The control parameters are determined by the temperature field. The structure of the algorithm for solving the nonlinear problem and control system of temperature field proposed. Numerical experiments are conducted. The temperature distribution for the process of thermal treatment of tungsten wire is built. Graph of dependence of the strength of the current heating from time built.

**Keywords:** temperature field, moving heat source, delta function, algorithm, control system.

УДК 532.2,517.2

**Н. В. НОГИН**, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУУ «КПИ», Киев

## ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Получено решение специальной краевой задачи для уравнений Навье-Стокса нестационарного ламинарного движения жидкости в круглой цилиндрической трубе в случае периодического закона изменения давления. Таким образом, создана возможность использования быстросходящихся степенных рядов для расчёта компонент поля скорости. Показана идентичность решений специальной задачи гидродинамики с граничной задачей теплопроводности с использованием интегрального преобразования Ханкеля.

**Ключевые слова:** вязкая несжимаемая жидкость, ламинарное движение, функции Бесселя, интегральное преобразование Ханкеля.

© Н. В. НОГИН, 2013