

УДК 539.3

ЗАВИСИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ОТ ИНЕРЦИОННО-ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

А. В. ГРАБОВСКИЙ

*Кафедра теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, УКРАИНА
email: grabovskiy@tmm-sapr.org*

АННОТАЦИЯ В работе предложен новый подход к исследованию чувствительности собственных частот и форм колебаний к варьированию параметров динамической системы. Собственные формы колебаний определяются из условий достижения экстремумов функции Рэлея. Предложен подход к линейной аппроксимации динамических характеристик систем с несколькими степенями свободы на изменение их инерционно-жесткостных параметров. Проведен анализ влияния инерционно-жесткостных характеристик на спектр собственных частот и формы колебаний.

Ключевые слова: свободные колебания, динамическая система, собственная форма колебаний, функция Рэлея, чувствительность.

АННОТАЦІЯ У роботі запропоновано новий підхід до дослідження чутливості власних частот і форм коливань до варіювання параметрів динамічної системи. Власні форми коливань визначаються з умов досягнення екстремумів функції Релея. Запропоновано підхід до лінійної апроксимації динамічних характеристик систем з декількома ступенями свободи на зміну їх інерційно-жорсткісних параметрів. Проведено аналіз впливу інерційно-жорсткісних характеристик на спектр власних частот і форми коливань.

Ключові слова: вільні коливання, динамічна система, власна форма коливань, функція Релея, чутливість.

DEPENDENCE OF NATURAL FREQUENCIES AND NATURAL MODES OF THE INERTIA AND STIFFNESS PROPERTIES OF SYSTEMS WITH FINITELY MANY DEGREES OF FREEDOM

A. GRABOVSKIY

Department theory and systems of automated design of mechanisms and machines, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov, UKRAINE

ABSTRACT The paper presents a new approach to the linear approximation of the dynamic characteristics of the study and the sensitivity of the natural frequencies and mode shapes to variations in inertial stiffness parameters of the dynamic system. Natural modes are determined by the conditions for maximization or minimization of the Rayleigh function.

The influence of the inertial stiffness characteristics on the spectrum of natural frequencies and their own forms of vibrations. The applicability of this approach based on the use of exact solutions for a finite variation of inertial stiffness parameters (so-called "benchmark" decisions), to predict changes in natural frequencies and natural modes.

It is shown that the linearization gives acceptable accuracy over a wide range varying discrete dynamic system parameters. Accordingly, it can be linearized and reverse dependencies. Thus, these approximations are applicable for solving the parametric sensitivity of the synthesis.

Subsequently, data approximation can be used to design problems, since thus the response function in a neighborhood of the nominal parameter set is linearised. In the presence of linear (or linearized) restrictions (for example, by weight or stiffness) the problem of linear programming to replace the original nonlinear programming problem.

Keywords Free vibration analysis, dynamic system, eigen mode, Rayleigh function, sensitivity

Введение

Известные [1] зависимости собственных частот и собственных форм колебаний динамических систем от их инерционно-жесткостных характеристик имеют достаточно общий вид и требуют во многих случаях численной конкретизации.

Многие авторы [2-6] используют эти зависимости для исследования различных

характеристик и решения частных задач. Например, в работе [2] авторы исследуют свободные колебания вращающейся балки с переменной площадью поперечного сечения. В работе [3] авторы обсуждают характеристики множества допустимых функций, которые используются в методе Рэлея-Ритца. Работы [4-5] посвящены исследованию оболочечных конструкций с применением метода Рэлея-Ритца. В [6] авторы распространяют метод Рэлея-Ритца на

решение задачи о собственных значениях прямоугольных пластин с разрывными граничными условиями.

В этой статье представляет интерес реакция собственных частот колебаний и собственных форм колебаний на сравнительно небольшое варьирование относительно некоторого условного «номинального» набора инерционно-жесткостных характеристик. С другой стороны, иногда требуется провести анализ тенденций изменения спектра собственных частот колебаний и собственных форм колебаний при стремлении тех или иных инерционно-жесткостных характеристик к нулю или бесконечности. Разработка метода проведения таких оценок составляет цель данной работы.

Постановка задачи

Исследуется влияние изменения инерционно-жесткостных параметров на динамические системы с несколькими степенями свободы. Они используются для моделирования многомассовых колебательных систем, а также – систем с распределенными параметрами, к которым применена процедура дискретизации (например, по методу конечных элементов [7]). Далее в статье такие системы называются дискретные динамические системы (ДДС).

Метод решения

Исходная разрешающая система обыкновенных дифференциальных уравнений для описания дискретной динамической системы имеет вид:

$$M\ddot{x} + Cx = 0, \quad (1)$$

где M , C – матрицы масс и жесткости исследуемой системы,

$x(t)$ – массив обобщенных координат исследуемой динамической системы [1 - 7].

Ставится задача определить влияние инерционно-жесткостных параметров, задающих инерционно-жесткостные характеристики исследуемой дискретной динамической системы, на собственный частоты и собственные формы этой системы. Такую задачу можно решить несколькими способами. В предложенной статье для поиска решения будет использоваться функция Рэлея [8 - 10]:

$$R(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{\sum_{ij} c_{ij} \lambda_i \lambda_j}{\sum_{ij} m_{ij} \lambda_i \lambda_j}, \quad (2)$$

где c_{ij} , m_{ij} – компоненты матриц C и M соответственно,

λ_i – компоненты собственных форм колебаний.

Условные экстремумы функции Рэлея (2) соответствуют квадратам собственных частот колебаний ω_s^2 , а наборы параметров $\lambda_{(s)}$ – тем значениям аргументов, которые доставляют эти экстремумы R (т.е. собственных форм колебаний, соответствующих частоте ω_s).

При этом следует принимать во внимание, что свойства реальных динамических систем в общем случае формируются из свойств конструктивов, образующих исследуемые машины, узлы, детали. Если при этом обозначить массив этих определяющих величин $p = \{p_q\}$ ($q = 1, \dots, N_p$), то в соотношениях (1), (2) компоненты матриц жесткостей и масс становятся зависимыми от p . В силу этого уравнение (2) приводится к условиям:

$$\frac{\partial R(p, \lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad \sum_i \lambda_i^2 = 1. \quad (3)$$

Если в пространстве компонент λ выделять линейно независимый базис Λ размерности $(N-1)$ по некоторым соотношениям:

$$\lambda = \lambda(\Lambda), \quad (4)$$

то условные экстремумы (3) соответствуют безусловным:

$$\frac{\partial R(p, \Lambda)}{\partial \Lambda_m} = 0, \quad m = 1, \dots, (N-1). \quad (5)$$

При этом в условиях (5), начиная с первого глобального минимума, после каждого шага исключается очередной компонент Λ из условия ортогональности собственных форм колебаний всем предыдущим формам колебаний [1].

Тогда условия (5) можно привести к виду:

$$\Phi(p, \Lambda) = 0, \quad (6)$$

где Φ – некоторая функциональная зависимость, в которую трансформируется левая часть (5).

Если рассматривать частный случай системы с двумя степенями свободы при одном варьируемом параметре, то собственные формы при учете условия нормировки определяются одним независимым параметром φ [8].

Численная реализация подхода

Тестовая задача выполнена на примере системы с двумя степенями свободы x_1 , x_2 (рис. 1).

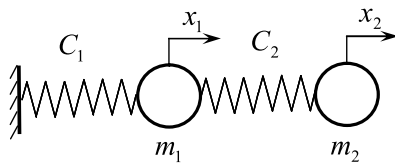


Рис. 1 – Тестовая динамическая система

Математическая модель, как отмечалось выше, основывается на использовании функции Рэлея. Для этого вводится в рассмотрение базисная переменная φ , определяющая угловые положения точки на единичной окружности в системе координат (λ_1, λ_2) :

$$\lambda_1 = \cos \varphi, \quad \lambda_2 = \sin \varphi. \quad (7)$$

В данном случае выражение (2) можно привести к виду:

$$R(\varphi) = \frac{C_1 \cos^2 \varphi + C_2 (\cos \varphi - \sin \varphi)^2}{m_1 \cos^2 \varphi + m_2 \sin^2 \varphi}. \quad (8)$$

Условие экстремальности:

$$R'(p, \varphi) = 0 \quad (9)$$

дает два значения угла φ в интервале $[0, \pi[$, соответствующих двум собственным частотам и собственным формам колебаний.

Соотношение (9) можно трактовать как параметрическую зависимость переменной φ от параметров p . Тогда можно применить для приближенного вычисления производной (9) конечно-разностные соотношения:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} \approx \frac{R(\alpha^*) - R(0)}{\alpha^*}. \quad (10)$$

Здесь α - малое приращение безразмерного параметра, соответствующего изменению варьируемого параметра p на величину $\Delta p = p_0 \cdot \alpha$. В силу этого соотношения (9) можно трактовать как неявное уравнение, связывающее искомое значение φ и варьируемый параметр p (или в данном случае α), и линеаризовать эту зависимость, причем используя для вычисления производной по параметру конечно-разностное соотношение:

$$\varphi = \varphi(p) = \varphi(p_0(1 + \alpha^*)) \Rightarrow B = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \approx \frac{\varphi(\alpha^*) - \varphi(0)}{\alpha^*}, \quad (11)$$

$$R(\alpha, \varphi) \approx R(0, \varphi)(1 + B \cdot \alpha). \quad (12)$$

Здесь α^* - некоторое малое, но конечное значение α , определяющее базу варьирования

параметра p , на которой по конечно-разностным соотношениям приближенно вычисляется производная $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$.

Реализовав приведенные выше зависимости, в численном виде можно получить решение поставленной задачи (рис. 2, 3). При этом следует отметить, что в качестве исходных данных для определенности были взяты следующие - $C_1 = 1000 \text{ Н/М}$, $C_2 = 1000 \text{ Н/М}$, $m_1 = 1 \text{ кг}$, $m_2 = 1 \text{ кг}$.

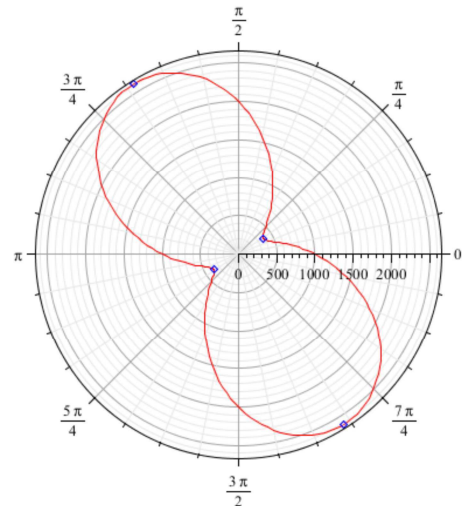


Рис. 2 – Графики функции Рэлея в полярной системе координат с отмеченными маркером корнями

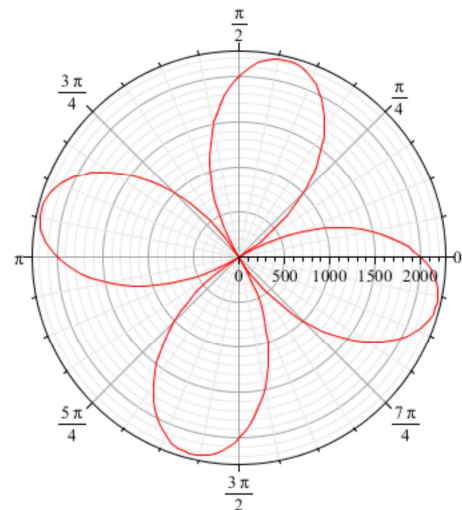


Рис. 3 – Графики первой производной функции Рэлея в полярной системе координат

Решения в полярной системе координат получаются при углах $\varphi_1 = 0.55 \text{ рад}$, $\varphi_2 = 2.12 \text{ рад}$. При этом собственные частоты следующие: $\omega_1^2 = 381.97 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2^2 = 2618.03 \text{ с}^{-1}$. У системы с 2мя

степенями свободы - присутствует 2 ортогональных решения. Решение в «плюс-плюс» (или «минус-минус») (без перемены знака) квадрантах соответствуют минимумам, а соответственно первой собственной частоте и форме. Решения в «плюс-минус» (или «минус-плюс») квадрантах (с одной переменной знака) – максимуму, а, соответственно, второй собственной частоте и форме.

Стоит отметить, что данное утверждение будет справедливым и для систем с N числом степеней свободы, с той лишь разницей, что функция будет строиться в N -мерном пространстве, а промежуточные собственные значения будут седловыми точками. При этом следует заметить, что для системы с двумя степенями свободы можно получить аналитические выражения для производных. Однако с точки зрения последующего распространения предложенного подхода на системы с большим количеством степеней свободы уместно использование конечно-разностных соотношений, которые легко обобщаются на систему с произвольным количеством степеней свободы. При этом также важно то обстоятельство, что решение уравнения (9) можно не осуществлять напрямую, а значения ω , φ получить как корни частотного уравнения и уравнения для определения собственных форм в традиционной форме [1].

Анализ влияния параметров на собственные частоты и формы ДДС

На приведенных ниже рисунках (рис. 4 - 7) показан характер изменения функции Рэлея и собственных частот при варьировании массовых и жесткостных характеристик приведенной выше системы (см. рис. 1). При этом экстремальные точки определяют на единичной окружности радиус-векторы, соответствующие собственным формам

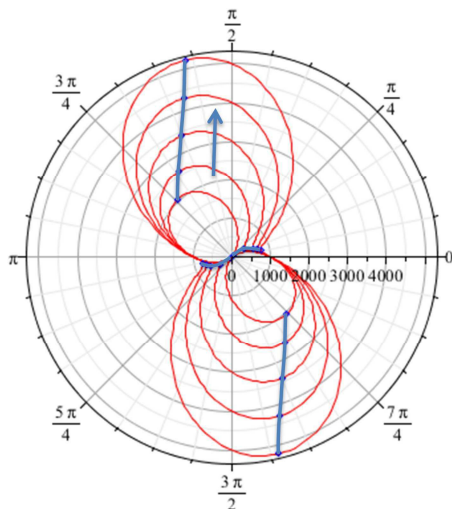


Рис. 4 – Функция Рэлея в полярной системе координат при варьировании жесткости $C_1 \in [100; 4000] \text{H/м}$

колебаний.

Из результатов видно, что все собственные частоты и формы изменяются, смещаясь в квадранте, который им соответствует, и не выходят за его пределы. При этом размах лепестков функции Рэлея, естественно [1], с повышением жесткостей C_1 , C_2 увеличивается, а с повышением масс m_1 , m_2 – уменьшается.

На рис. 8 показан характерный график изменения собственных форм в полярной системе координат для системы с двумя степенями свободы при варьировании параметра C_1 .

Видно, что угол φ , определяющий ориентацию радиус-вектора, который соответствует собственной форме, уменьшается. При этом размах лепестков возрастает, причем в узкой и широкой

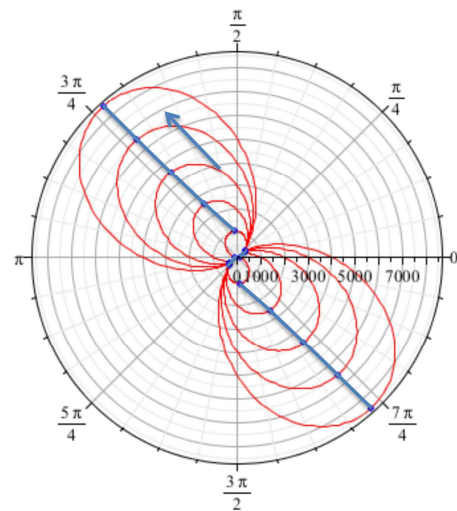


Рис. 5 – Функция Рэлея в полярной системе координат при варьировании жесткости $C_2 \in [100; 4000] \text{H/м}$

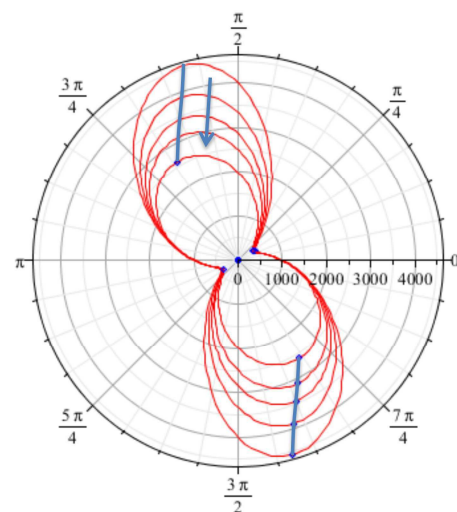


Рис. 6 – Функция Рэлея в полярной системе координат при варьировании массы $m_1 \in [0.5; 1] \text{кг}$

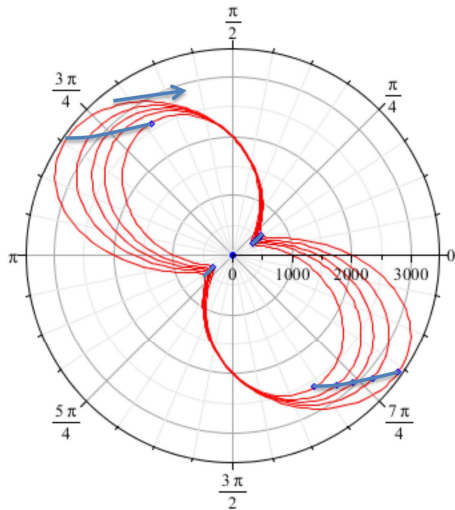


Рис. 7 – Функция Рэля в полярной системе координат при варьировании массы $m_2 = [0.5; 1]$ кг

своей части – с разной интенсивностью. В предельном случае получаем (при $C_1 \gg C_2$): $\varphi_1 = 0$;
 $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$; $\omega_1^2 = \frac{C_2}{m_2}$; $\omega_2^2 = \frac{C_1}{m_1}$.

Из приведенных параметров видно, что зависимости $\omega^2(p)$, $\varphi(p)$ (или $\omega^2(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$) можно в силу непрерывности линеаризовать по p (или соответственно по α), в окрестности некоторой точки, соответствующей заданному номинальному набору инерционно-жесткостных характеристик дискретной динамической системы. Так, на рис. 9, 10 приведены графики изменения собственных частот и собственных форм колебаний при варьировании

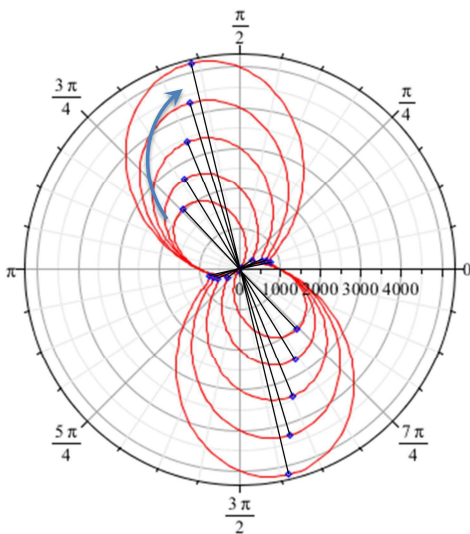


Рис. 8 – График изменения собственных форм в полярной системе координат при варьировании жесткости $C_1 \in [100; 4000]$ Н/м

жесткости C_1 (см. рис. 1), а также их линеаризация в окрестности некоторой точки $C_1 = 2000$ Н/м.

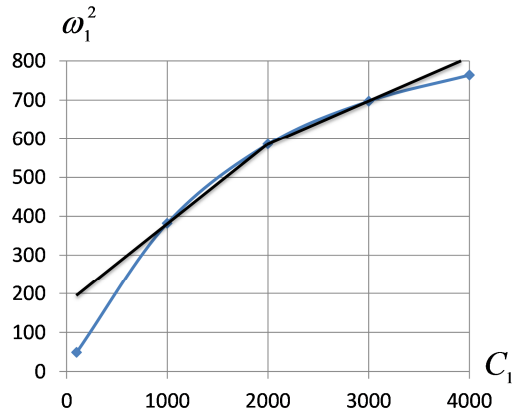


Рис. 9 – График изменения $\omega_1^2(\alpha)$ при изменении $C_1 \in [100; 4000]$ Н/м ($\alpha \in [-0.9; 1]$)

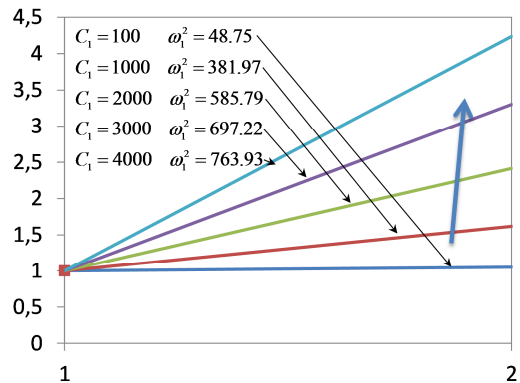


Рис. 10 – График изменения λ_1 при изменении $C_1 \in [100; 4000]$ Н/м

Видно, что линеаризация дает приемлемую точность в достаточно широком диапазоне варьирования параметров ДДС ($\alpha \in [-0.5; 1.0]$). Соответственно, можно линеаризовать и обратные зависимости. Таким образом, эти аппроксимации применимы для решения задач чувствительности и параметрического синтеза.

Выводы

В работе приведен анализ реакции динамических характеристик (собственных частот и собственных форм колебаний) систем с несколькими степенями свободы на изменение их инерционно-жесткостных параметров. Система исследовалась с применением функции Рэля. Показана применимость этого подхода, основанного на использовании точных решений при конечном варьировании инерционно-жесткостных параметров (т.н. "реперных" решений), для прогнозирования изменения и собственных

частот, и собственных форм колебаний. Данные результаты в дальнейшем планируется применять для решения задач синтеза таких параметров, которые обеспечивают требуемые значения собственных частот и распределения компонент собственных форм колебаний исследуемой системы.

Список литературы

1. **Бабаков, И. М.** Теория колебаний: учеб. Пособие / **И. М. Бабаков**. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
2. **Tang, A. Y.** Flapwise bending vibration of rotating tapered Rayleigh cantilever beams / **A. Y. Tang, X. F. Li, J. X. Wu, K. Y. Lee** // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2015. – Volume 112, – P. 1-9.
3. **Monterrubio, L. E.** Proof of convergence for a set of admissible functions for the Rayleigh–Ritz analysis of beams and plates and shells of rectangular planform / **L. E. Monterrubio, S. Panko** // *Computers & Structures*. – 2015. – Volume 147, – P. 236-243.
4. **Hyun Wook Lee** Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh–Ritz method and comparison of different shell theories / **Wook Lee Hyun, K. Kwak Moon** // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Volume 353, – P. 344-377.
5. **Lorenzo Dozio** Refined 2-D theories for free vibration analysis of annular plates: Unified Ritz formulation and numerical assessment / **Dozio Lorenzo** // *Computers & Structures*. – 2015. – Volume 147. – P. 250-258.
6. **Gavalas George R.** Extension of Rayleigh-Ritz method for eigenvalue problems with discontinuous boundary conditions applied to vibration of rectangular plates / **George R. Gavalas, El-Raheb Michael** // *Journal of Sound and Vibration*. – 2014. – P. 4007-4016.
7. **Зенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике / **О. Зенкевич**. – М.: Мир. – 1975. – 541 с.
8. **Грабовский, А. В.** Чувствительность собственных форм колебаний систем с несколькими степенями свободы к варьированию параметров динамической системы / **А. В. Грабовский, Н. А. Ткачук, Н. Н. Ткачук, А. Ю. Танченко, И. В. Мазур** // *Вестник НТУ «ХПИ»*. Серия: *Транспортное машиностроение*. – Х.: НТУ «ХПИ», 2015. (В печати)
9. **Танченко, А. Ю.** Метод прямого конечного возмущения численных моделей при исследовании динамических, жесткостных и прочностных характеристик тонкостенных элементов машиностроительных конструкций / **А. Ю. Танченко, А. В. Литвиненко, А. Д. Чепурной, Ю. В. Костенко, Н. А. Ткачук** // *Вестник Брянского государственного технического университета*. – Брянск, 2014, – № 4(44). – С. 114-124.
10. **Танченко, А. Ю.** Анализ чувствительности прочностных и динамических характеристик машиностроительных конструкций на основе прямого возмущения конечно-элементных моделей / **Н. А. Ткачук, А. Ю. Танченко, А. Н. Ткачук, П. В. Чурбанов, И. Я. Храмцова, О. А. Ищенко** // *Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут"*. – Харків : НТУ "ХПИ", 2012. – №22. – С. 147-169.

Bibliography (transliterated)

1. **Babakov, I. M.** Teoriya kolebaniy: ucheb. Posobie. – Moskow: Drofa, 2004, 591 s.
2. **Tang, A. Y., Li, X.-F., Wu, J.-X., Lee, K.Y.** Flapwise bending vibration of rotating tapered Rayleigh cantilever beams. *Journal of Constructional Steel Research*. 2015, **112**, 1-9.
3. **Monterrubio, L. E., Panko, S.** Proof of convergence for a set of admissible functions for the Rayleigh–Ritz analysis of beams and plates and shells of rectangular planform. *Computers & Structures*, 2015. **147**, 236-243.
4. **Lee Hyun Wook, Kwak, Moon K.** Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh-Ritz method and comparison of different shell theories. *Journal of Sound and Vibration*. 2015, **353**, 344-377.
5. **Lorenzo Dozio** Refined 2-D theories for free vibration analysis of annular plates: Unified Ritz formulation and numerical assessment. *Computers & Structures*. 2015, **147**, 250-258.
6. **Gavalas George R., Michael El-Raheb** Extension of Rayleigh–Ritz method for eigenvalue problems with discontinuous boundary conditions applied to vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 4007-4016.
7. **Zenkevich, O.** Metod konechnykh elementov v tekhnike. Moskow: Mir, 1975, 541 p.
8. **Grabovskiy, A. V., Tkachuk, N. A., Tkachuk, N. N., Tanchenko, A. Yu., Mazur, I. V.** Chuvstvitel'nost' sobstvennykh form kolebaniy sistem s neskol'kimi stepenyami svobody k var'irovaniyu parametrov dinamicheskoy sistemy. *Vestnik NTU «KhPI». Seriya: Transportnoe mashinostroenie*. – Kh.: NTU «KhPI», 2015. (V pechati)
9. **Tanchenko, A. Yu. Litvinenko, A. V., Chepurnoy, A. D., Kostenko, Yu.V., Tkachuk, N. A.** Metod pryamogo konechnogo vozmushcheniya chislennykh modeley pri issledovanii dinamicheskikh, zhestkostnykh i prochnostnykh kharakteristik tonkostennykh elementov mashinostroytel'nykh konstruksiy. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. – Brynsk, 2014, **4(44)**, 114-124.
10. **Tkachuk, N. A., Tanchenko, A. Yu., Tkachuk, A. N., Churbanov, P. V., Khramtsova, I. Ya., Ishchenko, O. A.** Analiz chuvstvitel'nosti prochnostnykh i dinamicheskikh kharakteristik mashinostroytel'nykh konstruksiy na osnove pryamogo vozmushcheniya konechno-elementnykh modeley. *Visnik Natsional'nogo tekhnichnogo universitetu "Kharkivs'kiy politekhnichnyy institut"*. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2012, **22**, 147-169.

Поступила (received) 15.09.2015