

ЗАСТОСУВАННЯ САД-СИСТЕМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ЗАДАЧ З ВРАХУВАННЯМ ІЗОТРОПНОГО ЗМІЦНЕННЯ

А. Я. КАРВАЦЬКИЙ^{1*}, Т. В. ЛАЗАРЄВ², С. В. ЛЕЛЕКА², А. Ю. ПЕДЧЕНКО²

¹ кафедра хімічного, полімерного та силікатного машинобудування, КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, УКРАЇНА

² НДЦ «Ресурсозберігаючі технології», КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, УКРАЇНА

*email: admin@rst.kpi.ua

АНОТАЦІЯ На базі методу скінченних елементів розроблено числові методики для розв'язання нелінійної пружно-пластичної задачі з врахуванням ізотропного зміцнення за двома алгоритмами. Програмна реалізація числової методики виконана на мові програмування САД-системи Mathcad та базується на програмному коді для розв'язання тривимірних задач статичної пружності. За допомогою розробленого програмного забезпечення отримано результати числових експериментів під час навантаження внутрішнім тиском товстостінного сталевого циліндра та виконано їх зіставлення з даними числового аналізу, одержаного з використанням програмних продуктів ANSYS Mechanical APDL. Встановлено, що максимальне значення похибки визначення фізичних полів не перевищує 3,62 % за алгоритмом 1 і 1,11 % – за алгоритмом 2. **Ключові слова:** скінченний елемент; ізотропне зміцнення; пружно-пластична задача; білінійний закон; Mathcad

CAD-SYSTEMS APPLICATION FOR SOLVING THE ELASTOPLASTIC PROBLEMS WITH ISOTROPIC HARDENING

A. KARVATSKIY¹, T. LAZARIEV², S. LELEKA², A. PEDCHENKON²

¹ Research center "Resource-saving technologies", Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kiev, UKRAINE

² Department of chemical, polymer and silicate engineering, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kiev, UKRAINE

ABSTRACT The modern analysis of the scientific publications shows that sometimes the works which are dedicated to the numerical methods of solving the nonlinear elastoplastic problems lack the detailed algorithm description, intermediate calculations helping to obtain the main correlations and formulas. It complicates the coherence and the process of the appropriate program codes development. The given paper is considered as an attempt to solve these issues taking the elastoplastic problems with isotropic hardening as an example. The work is aimed to develop the numerical methodologies using 2 algorithm approaches when solving the nonlinear elastoplastic problem with isotropic hardening. The methodologies are based on the finite elements method. The formulated mathematical model of the elastoplastic problem is based on the mechanical motion balance equation in the incremental formulation using the mechanical model for the material with isotropic hardening according to bilinear law. The used step by step algorithm is based on the elastoplastic dependence between stress and deformation. The algorithm fulfills the condition of finding the intermediate solutions of the problem. The used reverse incremental algorithm is based on the usage of stress in order to find the equivalent plastic deformations using the reverse Euler's method. The numerical model is realized using the programming language of the CAD-system Mathcad and is based on the programming code for solving 3-dimensional problems of the static pressure. The results of the numerical experiments were compared with the application of the designed software with the data analysis obtained with the usage of the programming products of ANSYS Mechanical APDL. The comparison showed violation in the physical fields up to 3,62 % for the algorithm 1 and 1,11 % for the algorithm 2.

Keywords: finite element; isotropic hardening; elastic-plastic problem; bilinear law; Mathcad

Вступ

Аналіз публікацій показує, що в розглянутих роботах, присвячених числовим методам розв'язання нелінійних пружно-пластичних задач [1–7], інколи бракує детального опису алгоритмів, проміжних викладок для отримання основних співвідношень та формул, що ускладнює їх однозначне розуміння та є особливо важливим під час розробки відповідних програмних кодів.

Дана стаття може розглядатися як певна спроба в деякій мірі вирішити вказані проблеми на прикладі розв'язання задачі пластичності з ізотропним зміцненням.

Ціль роботи

Розробити на основі методу скінченних елементів числові методики, що дають змогу використовувати різні алгоритмічні підходи під час розв'язання пружно-пластичних задач з врахуванням ізотропного зміцнення матеріалу. Провести зіставлення результатів числових експериментів, виконаних на базі розробленого авторського програмного забезпечення, з даними числового аналізу, виконаного з використанням апробованих програмних продуктів.

Виклад основного матеріалу

Математична модель пружно-пластичної задачі базується на рівнянні рівноваги механічного руху в інкрементальній формі з використанням механічної моделі для матеріалу з ізотропним зміцненням за білінійним законом [3–9]

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{f}} = 0, \quad (1)$$

де ∇ – оператор Гамільтона, м^{-1} ; $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ – симетричний тензор прирощення напруження 2-го рангу, Па; $\dot{\mathbf{f}}$ – вектор прирощення об’ємних сил, Н/м^3 .

Згідно з інкрементальною теорією пластичності прирощення непружних пластичних деформацій $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ розглядаються як початкові [3, 8]. Тоді тензор прирощення напруження $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ (1) виражається законом Гука, записаним через тензор прирощення повних деформацій $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ і тензор прирощення початкового напруження $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2G\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})\mathbf{I} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0, \quad (2)$$

де $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 = 2G\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl})\mathbf{I}$ – симетричний тензор прирощення початкових напружень, Па; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}\nabla) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ – симетричний тензор прирощення повних деформацій; $\dot{\mathbf{u}}$ – вектор прирощення переміщень, м; $\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}$ – слід тензора прирощення деформацій; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ – пружна і пластична складові тензора прирощення повних деформацій, відповідно; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – пружний модуль зсуву, Па; E – модуль пружності під час однобічного розтягу, Па; ν – коефіцієнт Пуассона; \mathbf{I} – одиничний тензор другого рангу.

У разі ізотропного зміцнення умову текучості матеріалу можна записати таким чином [3–8]

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}), \quad (3)$$

де F – функція поверхні текучості матеріалу; $f(\boldsymbol{\sigma})$ – скалярна функція тензора напруження $\boldsymbol{\sigma}$, яка для випадків ізотропного зміцнення та ідеальної пластичності являє собою еквівалентне напруження за Мізесом $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S}}$; $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$ – тензор девіаторних напружень, Па; $(:)$ – оператор подвійного скалярного добутку тензорів; $\sigma_y(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}) = \sigma_{y,0} + h\varepsilon_{eq}^{pl}$ – границя текучості матеріалу, в якій враховується ізотропне зміцнення за лінійним

законом, Па; $\varepsilon_{eq}^{pl} = \frac{1}{1+\nu} \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}:\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}}$ – еквівалентна деформація за Мізесом; $\sigma_{y,0}$ – початкове значення границі текучості матеріалу, Па; h – модуль зміцнення, Па.

У разі виконання рівності $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, закон пластичної течії вважається асоціативним.

Початкові умови для (1)–(3):

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = 0; \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Граничні умови для (1)–(3):

– прирощення вектора переміщення

$$\dot{\mathbf{u}}|_{S_u} = 0, \quad (5)$$

де S_u – поверхня (або точка поверхні), на якій задано переміщення, м^2 ;
– симетрії

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{S_{su}} = 0, \quad (6)$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла; S_{su} – поверхня симетрії тіла, м^2 ;
– зовнішній тиск

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}|_{S_p} = p, \quad (7)$$

де p – зовнішній тиск, який задано на поверхні S_p , Па;
– зовнішня сила, що прикладена в деякій точці тіла

$$\mathbf{F}_p = \int_{\Delta S_p} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (8)$$

де \mathbf{F}_p – вектор зовнішньої сили в точці P , Н; ΔS_p – елементарна площадка поверхні тіла в околі точки P , м^2 .

Система рівнянь (1)–(8) є повним математичним формулюванням пружно-пластичної задачі з врахуванням ізотропного зміцнення матеріалу.

Для розв’язання задачі (1)–(8) скористаємося методом скінченних елементів (МСЕ). Розглянемо два алгоритми розв’язання задачі пружно-пластичності [3–9], їх програмну реалізацію та виконаємо порівняння отриманих результатів з іншими числовими розв’язками [11].

Покроковий алгоритм [6, 7], що базується на пружно-пластичній залежності між напруженнями і деформаціями, в якому передбачається виконання

умови про знаходження проміжних розв'язків задачі в околі поверхні текучості.

Розглянемо основні співвідношення МСЕ, що стосуються алгоритму 1 і частково алгоритму 2, які записано з використанням одноіндексної форми тензорів, характерної для МСЕ:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}; \quad (9)$$

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \beta\dot{\mathbf{F}}; \quad (10)$$

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{g^0}; \quad (11)$$

$$\{\varepsilon^{el}\} = [B]\{u\}; \quad (12)$$

$$\{\sigma^{el}\} = [D^{el}]\{\varepsilon^{el}\}; \quad (13)$$

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2)}; \quad (14)$$

$$\{\dot{\varepsilon}^{el}\} = [B]\{\dot{u}\}; \quad (15)$$

$$\{\dot{\sigma}^{el}\} = [D^{el}]\{\dot{\varepsilon}^{el}\}; \quad (16)$$

$$\{\dot{\sigma}^{ep}\} = [D^{ep}]\{\dot{\varepsilon}^{el}\}; \quad (17)$$

$$\{\dot{\varepsilon}^{pl}\} = \gamma \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D^{el}]\{\dot{\varepsilon}^{el}\}; \quad (18)$$

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2)}; \quad (19)$$

$$\sigma_y = \sigma_{0y} + h\varepsilon_{eq}^{pl}, \quad (20)$$

де $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]$ – матриця системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) МСЕ; (e) – індекс скінченних елементів (СЕ); E – кількість СЕ, на які дискретизована розрахункова область Ω ; $[k^{(e)}]$ – матриця жорсткості СЕ; $\mathbf{F} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}$ – вектор вільних членів СЛАР; β – коефіцієнт прирощення навантаження; $\mathbf{f}_{g^0} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T \{\dot{\sigma}^0\} dV$ – вектор вільних членів СЛАР, пов'язаний з початковими напруженнями в СЕ; $V^{(e)}$ – об'єм СЕ; $[B^{(e)}] = [B]$ – матриця градієнтів СЕ; $\{\dot{\varepsilon}^{pl}\}$ – тензор прирощення пластичних деформацій СЕ; $\{\varepsilon^{el}\}$ – тензор пружних деформацій СЕ; $\{u\}$ – вектор вузлових переміщень СЕ; $\{\sigma^{el}\}$ – тензор прирощення пружних напружень СЕ; $[D^{el}]$ – матриця пружних констант СЕ (в загальному випадку це тензор четвертого рангу); σ_{eq} – еквівалентне напруження за Мізесом СЕ; $\{\dot{\sigma}^{ep}\}$ – тензор прирощення істинних

напружень в пружно-пластичних СЕ;

$$[D^{ep}] = [D^{el}] - \gamma [D^{el}] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D^{el}] -$$

матриця пружно-пластичних властивостей СЕ;

$$\gamma = \left[h + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} [D^{el}] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T \right]^{-1};$$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\} = \frac{3}{2} \frac{\{S\}}{\sigma_{eq}} \quad \text{– похідна за тензором}$$

напруження від функції поверхні текучості або градієнт функції пластичності, який є перпендикуляром до поверхні пластичності в точці з тензором напруження σ ; $\{S\}$ – тензор девіаторних напружень СЕ; $\{\dot{\varepsilon}^{el}\}$ – тензор прирощення пружних деформацій СЕ; $\{\dot{u}\}$ – вектор прирощення вузлових переміщень СЕ.

Послідовність дій за алгоритмом 1.

1. Розв'язується лінійна пружна задача за умови повного силового навантаження (9) [3, 8] і знаходяться вектори переміщення у вузлах СЕ $\{u\}$ за нульових початкових напружень $\{\sigma^0\} = 0$. Далі визначаються тензори пружних деформацій $\{\varepsilon^{el}\}$ і напружень $\{\sigma^{el}\}$ в СЕ за формулами (12), (13), відповідно. Визначаються еквівалентні напруження за Мізесом σ_{eq} (14) і обчислюється масштабний множник $\lambda_0 = \sigma_y / \sigma_{eq, \max}$ (де $\sigma_{eq, \max}$ – максимальне значення, $\sigma_y = \sigma_{y0}$ – початкове значення границі текучості за умови, що $\varepsilon_{eq}^{pl} = 0$). Виконується масштабування векторів переміщення $\{u\} \lambda_0$, тензорів пружних деформацій $\{\varepsilon^{el}\} \lambda_0$ і напружень $\{\sigma^{el}\} \lambda_0$ по всіх СЕ, щоб початковий розв'язок задачі відповідав поверхні текучості. Запам'ятовуються поточні переміщення $\{u\} = \{u\} \lambda_0$ і напруження $\{\sigma_1\} = \{\sigma^{el}\} \lambda_0$ в кожному СЕ. Наразі нульове наближення отримано.

2. Задається кількість кроків навантаження N_β та визначається коефіцієнт прирощення навантаження $\beta \ll \lambda_0$ за формулою $\beta = \frac{1 - \lambda_0}{N_\beta}$, тобто $\lambda_0 + \beta N_\beta = 1$. Виконується присвоєння $\varepsilon_{eq}^{pl} = 0$ – еквівалентні пластичні деформації по всіх СЕ.

3. Початок циклу по $k = 1 \dots N_\beta$ з прирощення навантаження або покровоного циклу. Виконується мале прирощення навантаження $\beta \dot{\mathbf{F}}$ і розв'язується СЛАР МСЕ відносно вузлових значень прирощення переміщень вигляду (10) та визначаються вектори

прирошення вузлових переміщень $\{\dot{u}\}^k$. В кожному СЕ знаходяться тензори природження пружних деформацій $\{\dot{\varepsilon}^{el}\}^k$ (15) і напружень $\{\dot{\sigma}^{el}\}^k$ (16), поточні пружні напруження $\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\dot{\sigma}^{el}\}^k$ та за $\{\sigma_2\}$ обчислюються еквівалентні напруження за Мізесом σ_{eq} (14). З використанням нестрогої нерівності $\{\sigma_2\} \geq \sigma_y$ визначається список пластичних СЕ, в яких обчислюються тензори природження істинних напружень з використанням пружно-пластичної залежності між напруженнями і деформаціями $\{\dot{\sigma}^{ep}\}^k$ (17), природження початкових напружень $\{\dot{\sigma}^0\}^k = \{\dot{\sigma}^{el}\}^k - \{\dot{\sigma}^{ep}\}^k$ і природження пластичної деформації $\{\dot{\varepsilon}^{pl}\}^k$ (18), за значеннями яких визначаються природження еквівалентних пластичних деформацій $\dot{\varepsilon}_{eq}^{pl}$ (19). У якості першого наближення використовуються природження початкових пластичних напружень $\{\dot{\sigma}^0\}^k$. Вузлові значення векторів природження переміщення накопичуються за формулою $\{\dot{u}\} = \{\dot{u}\} + \{\dot{u}\}^k$. Поточні значення природження напруження запам'ятовуються в пластичних СЕ за формулою $\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\dot{\sigma}^{ep}\}$, а в пружних за $\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\dot{\sigma}^{el}\}$ та виконується присвоєння $\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}$. Еквівалентні пластичні деформації накопичуються в пластичних СЕ $\varepsilon_{eq}^{pl} = \varepsilon_{eq}^{pl} + \dot{\varepsilon}_{eq}^{pl}$. За отриманим значеннями ε_{eq}^{pl} уточняється значення границі текучості матеріалу σ_y (20) по пластичних СЕ.

4. Цикл за початковими напруженнями $m = 1, 2, \dots$. За умови, що $\mathbf{F} = 0$, за отриманими в п. 3 природженнями початкових напружень $\{\dot{\sigma}^0\}$ із розв'язання СЛАР МСЕ вигляду (11) отримуються вузлові значення векторів природження переміщень $\{\dot{u}\}^m$, тензори природження пружних деформацій $\{\dot{\varepsilon}^{el}\}^m$ (15) і напружень $\{\dot{\sigma}^{el}\}^m$ (16), поточні пружні напруження $\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\dot{\sigma}^{el}\}^m$ та за $\{\sigma_2\}$ обчислюються еквівалентні напруження за Мізесом σ_{eq} (14). На підставі нерівності $\{\sigma_2\} \geq \sigma_y$ визначається список пластичних СЕ, в яких обчислюються тензори природження істинних напружень $\{\dot{\sigma}^{ep}\}^m$ (17), природження початкових напружень $\{\dot{\sigma}^0\}^m = \{\dot{\sigma}^{el}\}^m - \{\dot{\sigma}^{ep}\}^m$ і природження пластичної деформації $\{\dot{\varepsilon}^{pl}\}^k$ (18), за якими визначаються природження еквівалентних пластичних

деформацій $\dot{\varepsilon}_{eq}^{pl}$ (19). Отриманий тензор $\{\dot{\sigma}^0\}^m$ тепер є новими початковими напруженнями. Поточні значення переміщень напруження запам'ятовуються в пластичних СЕ за формулою $\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\dot{\sigma}^{ep}\}$. Виконуються присвоєння $\{\dot{u}\} = \{\dot{u}\} + \{\dot{u}\}^m$, $\varepsilon_{eq}^{pl} = \varepsilon_{eq}^{pl} + \dot{\varepsilon}_{eq}^{pl}$, $\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}$. Уточняється значення границі текучості матеріалу σ_y (20) по пластичних СЕ. Виконується перевірка: $\dot{\varepsilon}_{eq}^{pl} \leq \delta_{\varepsilon}$. Якщо перевірка не виконується, то розрахунки повторюються з п. 4, у зворотному випадку відбувається перехід до п. 5.

5. Виконується присвоєння $k = k + 1$. Перевірка, якщо $k \leq N_{\beta}$, то виконується перехід в п. 3, у зворотному випадку обчислюються повні еквівалентні деформації ε_{eq}^{tot} (19) і пружні еквівалентні деформації $\varepsilon_{eq}^{el} = \varepsilon_{eq}^{tot} - \varepsilon_{eq}^{pl}$ по всіх СЕ. На цьому розв'язання задачі завершено.

Зворотний інкрементарний алгоритм 2 [3, 10] базується на використанні пробних напружень для знаходження еквівалентних пластичних деформацій за зворотним метод Ейлера.

Розглянемо основні формули алгоритму 2:

$$\{\varepsilon^{tr}\} = [B]\{u^{tr}\}; \quad (21)$$

$$\{\sigma^{tr}\} = [D^{el}]\{\varepsilon^{tr}\}; \quad (22)$$

$$\mathbf{S}^{tr} = \sigma^{tr} - \text{tr}(\sigma) \mathbf{I}; \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}^{tr} = \sigma_{eq}^{tr} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^{tr} S_{ij}^{tr}} = \sqrt{\frac{3}{2} [S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(S_4^2 + S_5^2 + S_6^2)]}; \quad (24)$$

$$F(\mathbf{S}, \sigma_y(\Delta \bar{e}^{pl})) = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S} : \mathbf{S} - \sigma_y(\Delta \bar{e}^{pl}) = 0; \quad (25)$$

$$\bar{\sigma}^{tr} - 3G \Delta \bar{e}^{pl} = \sigma_y(\Delta \bar{e}^{pl}) \text{ або} \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}^{tr} - 3G \Delta \bar{e}^{pl} = \sigma_{y0} + h \Delta \bar{e}^{pl};$$

$$\Delta \bar{e}^{pl} = \frac{\bar{\sigma}^{tr} - \sigma_y}{3G - h}; \quad (27)$$

$$\sigma_y(\Delta \bar{e}^{pl}) = \sigma_{y0} + h \Delta \bar{e}^{pl}; \quad (28)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{S}^{tr}}{1 + \frac{3G}{\sigma_y(\Delta \bar{e}^{pl})} \Delta \bar{e}^{pl}}; \quad (29)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{\sigma_y}; \quad (30)$$

$$\Delta \sigma^0 = -2G \left(\Delta \varepsilon^{pl} - \Delta \varepsilon^{pl} \Big|_{old} \right), \quad (31)$$

де $\{\varepsilon^{tr}\}$ – тензор пробних пружних деформацій СЕ; $\{u^{tr}\}$ – вектор пробних вузлових переміщень СЕ; $\{\sigma^{tr}\}$ – тензор пробних пружних напружень СЕ; \mathbf{S}^{tr} –

тензор пробних девіаторних напружень $\overline{\sigma}^{tr} = \sigma_{eq}^{tr}$ – еквівалентні напруження за Мізесом; $\Delta \overline{e}^{pl}$ – прирощення еквівалентних пластичних деформацій; \mathbf{S} – тензор девіаторних пружних деформацій; \mathbf{n} – градієнт функції пластичності; $\Delta \sigma^0$ – тензор прирощення початкових напружень; $\Delta \mathbf{e}^{pl}$ – тензор прирощення пластичних деформацій.

Для отримання (26) з (25) використовуються такі перетворення:

– інтегрування рівняння закону пластичної течії в диференціальній формі $d\mathbf{e}^{pl} = d\overline{e}^{pl} \mathbf{n}$ з використанням зворотного методу Ейлера дає рівняння у вигляді прирощень тензора пластичних девіаторних деформацій, тобто закон пластичної течії

$$\Delta \mathbf{e}^{pl} = \Delta \overline{e}^{pl} \mathbf{n}; \quad (32)$$

– комбінуючи рівняння тензора девіаторний напружень з рівнянням для швидкості деформацій $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$, отримуємо

$$\mathbf{S} = 2G \left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta \mathbf{e} - \Delta \overline{e}^{pl} \mathbf{n} \right), \quad (33)$$

де t – поточний час;

– перетворення (33) з використанням градієнта функції пластичності $\mathbf{n} = \frac{3 \mathbf{S}}{2 q}$ разом з умовою Мізеса (25) дає

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2G \left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta \mathbf{e} - \Delta \overline{e}^{pl} \mathbf{n} \right) \rightarrow \mathbf{S} + 2G \Delta \overline{e}^{pl} \mathbf{n} = \\ &= 2G \left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta \mathbf{e} \right) \rightarrow \mathbf{S} + 2G \frac{3 \mathbf{S}}{2 q} \Delta \overline{e}^{pl} = \\ &= 2G \hat{\mathbf{e}} \rightarrow \mathbf{S} + \mathbf{S} \frac{3G}{q} \Delta \overline{e}^{pl} = \\ &= 2G \hat{\mathbf{e}} \rightarrow \left(1 + \frac{3G}{q} \Delta \overline{e}^{pl} \right) \mathbf{S} = 2G \hat{\mathbf{e}}, \end{aligned} \quad (34)$$

де $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta \mathbf{e}$ – тензор повних деформацій; $q = \overline{\sigma}(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl})$ – границя текучості;

– скалярний добуток рівняння (34) самого на себе дає

$$\begin{aligned} (q + 3G \Delta \overline{e}^{pl})^2 (\mathbf{S} : \mathbf{S}) &= \\ = (q + 3G \Delta \overline{e}^{pl})^2 (\hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}) &\rightarrow (q + 3G \Delta \overline{e}^{pl})^2 (\mathbf{S} : \mathbf{S}) = \\ = \frac{3}{2} (\mathbf{S} : \mathbf{S}) 4G^2 \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}} &\rightarrow (q + 3G \Delta \overline{e}^{pl})^2 = \\ = 3G^2 (2\hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}) &\rightarrow q + 3G \Delta \overline{e}^{pl} = \\ = \sqrt{3G} (\sqrt{2\hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}}) &\rightarrow q + 3G \Delta \overline{e}^{pl} = \\ = 3G \left(\sqrt{\frac{2}{3} \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}} \right) &\rightarrow q + 3G \Delta \overline{e}^{pl} = \\ = 3G \tilde{e} \rightarrow 3G \tilde{e} - 3G \Delta \overline{e}^{pl} &= q, \end{aligned} \quad (35)$$

де $q^2 = \frac{3}{2} (\mathbf{S} : \mathbf{S})$; $\tilde{e} = \sqrt{\frac{2}{3} \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}}$ – повна еквівалентна девіаторна деформація;

– виконуючи в (35) заміни $\overline{\sigma}^{tr} = 3G \tilde{e}$ і $q = \sigma_y (\Delta \overline{e}^{pl})$, остаточно отримується вираз для прирощення еквівалентної пластичної деформації $\Delta \overline{e}^{pl}$ (26)

$$\overline{\sigma}^{tr} - 3G \Delta \overline{e}^{pl} = \sigma_y (\Delta \overline{e}^{pl}); \quad (36)$$

– з використанням в (34) заміни $\mathbf{S}^{tr} = 2G \hat{\mathbf{e}}$ і $q = \sigma_y (\Delta \overline{e}^{pl})$ отримується формула для визначення девіаторних пружних деформацій (29)

$$\left(1 + \frac{3G}{\sigma_y (\Delta \overline{e}^{pl})} \Delta \overline{e}^{pl} \right) \mathbf{S} = \mathbf{S}^{tr}. \quad (37)$$

Послідовність дій за алгоритмом 2.

1. Розв'язується лінійна пружна задача за повного навантаження (9). Отримується вектор пробних переміщень у вузлах $\{u^{tr}\}$. Виконується присвоєння: $k=1$ – номер ітерації, $\Delta \mathbf{e}^{pl} \Big|_{old} = 0$ – початкові пластичні деформації.

2. Визначаються тензори пробних деформацій $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{tr}\}$ (21), пробних напружень $\{\sigma^{tr}\}$ (22), пробних девіаторних напружень (23), а також пробні еквівалентні напруження за Мізесом $\overline{\sigma}^{tr} = \sigma_{eq}^{tr}$ (24) по всіх СЕ.

3. Визначається список пластичних скінченних елементів з використанням умови $\sigma_{eq}^{tr} \geq \sigma_y (\Delta \overline{e}^{pl})$ (для $k=1$, $\sigma_y = \sigma_{0y}$). Далі в пластичних СЕ визначаються прирощення еквівалентних пластичних деформацій за формулою $\Delta \overline{e}^{pl}$ (27) (у разі нелінійної залежності $\sigma_y (\Delta \overline{e}^{pl})$ для визначення $\Delta \overline{e}^{pl}$ використовується метод Ньютона [10,12]), уточняється значення границі текучості матеріалу в пластичних СЕ $\sigma_y (\Delta \overline{e}^{pl})$ (28), тензор девіаторних пружних деформацій \mathbf{S} за формулою (29) та еквівалентні напруження за Мізесом $\overline{\sigma}^{tr}$ (24), визначаються градієнт функції пластичності \mathbf{n} (30), тензор прирощення пластичних деформацій $\Delta \mathbf{e}^{pl}$ (32) та знаходяться еквівалентні пластичні деформації $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl} = \Delta \overline{e}^{pl}$, $\Delta \overline{e}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \mathbf{e}^{pl} : \Delta \mathbf{e}^{pl}}$.

4. Визначається тензор початкових пластичних напружень за формулою (31). Розв'язується пружна задача за умови $\mathbf{F} = 0$ і навантаженням початковими напруженнями (11) та визначається вектор переміщення $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}^k$. Виконується перевірка

$|\Delta u| \leq \delta_u$ або $|\Delta \sigma^0| \leq \delta_{\Delta \sigma^0}$. Якщо нерівності виконуються, то ітерації закінчено і відбувається перехід у п. 5. У зворотному випадку виконується присвоєння $k = k + 1$ і здійснюється перехід у п. 2 та розв'язання задачі повторюється.

5. По всіх СЕ обчислюються $\{\epsilon^{tot}\}$, $\{\sigma_{eq}\}$, $\{\epsilon_{eq}^{el}\} = \{\epsilon_{eq}^{tot}\} - \{\epsilon_{eq}^{pl}\}$, де $\{\epsilon_{eq}^{tot}\}$ визначається за формулою (19).

Програмна реалізація алгоритмів та тести. Для виконання тестування викладених у роботі числових методик розв'язання нелінійної пружно-пластичної задачі з врахуванням ізотропного зміцнення використано тетраедри СЕ з чотирма вузлами. Дискретизація розрахункової області виконувалася в середовищі вільно відкритого програмного забезпечення для автоматизованої генерації сіток Gmsh [13], а для візуалізації результатів розрахунків застосовано – ParaView [14], який також є вільно відкритим програмним кодом.

Програмна реалізація числової методики виконана на мові програмування CAD-системи Mathcad [15] та базується на програмному коді для розв'язання тривимірних задач статичної пружності, наведеного в [16]. Оцінка точності розрахунків проведена за допомогою зіставлення з числовими розв'язками, отриманими за допомогою іншого програмного забезпечення [11]. У якості геометричного об'єкта для моделювання обрано порожнистий циліндр за граничних умов Дирихле і Неймана (закріплення і навантаження надлишковим тиском).

Числова модель задачі пружно-пластичності являє собою четверту частину порожнистого циліндра, яку побудовано за допомогою спеціального гео-файлу в програмі Gmsh, та виконано дискретизацію на тетраедри СЕ (рис. 1).

Тестування розроблених у середовищі Mathcad програмних кодів для розв'язання задачі пружно-пластичності з ізотропним зміцненням (1)-(8) за двома алгоритмами виконано на прикладі матеріалу з фізичними властивостями близькими до вуглецевої сталі.

Тест. Задача пружно-пластичності з врахуванням ізотропного зміцнення товстостінного циліндра з радіусами $r_1/r_2 = 0,05/0,08$ м і висотою $h = 0,005$ м. Матеріал сталь – $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$, $\sigma_{y0} = 320$ МПа, $h = 1,5$ ГПа. Тиск в середині циліндра становить $p = 150$ МПа.

Дані числового моделювання фізичних полів з використанням розробленого програмного забезпечення показано на рис. 1, а результати порівняння наведено в табл. 1, 2.

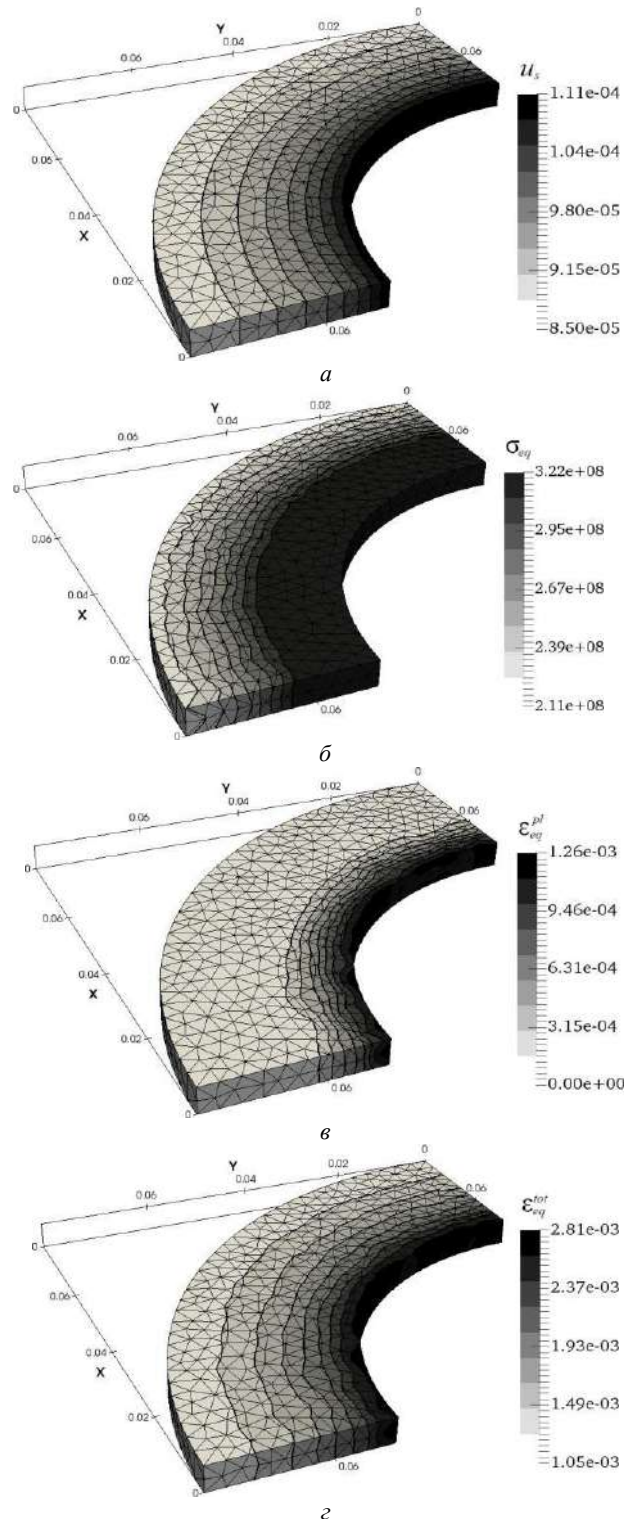


Рис. 1 – Результати числового розв'язання пружно-пластичної задачі з врахуванням ізотропного зміцнення за алгоритмом 1 (вузлів 771, СЕ – 2366):
а – поле сумарних переміщень u_s , м;
б – поле еквівалентних напружень, σ_{eq} , Па;
в – поле еквівалентних пластичних деформацій ϵ_{eq}^{pl} ;
г – поле повних еквівалентних деформацій ϵ_{eq}^{tot}

Таблиця 1 – Результати порівняння за алгоритмом 1

Досліджу-вана величина	ANSYS [8], вузлів 1974, CE – 7402	Mathcad – авторський код, вузлів 771, CE – 2366	Похибка, %
u_s , м	8,69·10 ⁻⁵ –0,000112	8,496·10 ⁻⁵ –0,0001109	2,24–0,94
σ_{eq} , МПа	214–322	210,988–322,371	1,41–0,12
ε_{eq}^{el}	0,001072–0,001609	0,001055–0,001639	1,61–1,87
ε_{eq}^{pl}	0,001217	0,0012612	3,62
ε_{eq}^{tot}	0,001071–0,002826	0,001055–0,002812	1,61–0,51

Таблиця 2 – Результати порівняння за алгоритмом 2

Досліджу-вана величина	ANSYS [8], Вузлів 1974, CE – 7402	Mathcad – авторський код, вузлів 771, CE – 2366	Похибка, %
u_s , м	8,69·10 ⁻⁵ –0,000112	8,662·10 ⁻⁵ –0,0001118	0,32–0,137
σ_{eq} , МПа	214–322	214,927–321,746	0,43–0,078
ε_{eq}^{el}	0,001072–0,001609	0,001075–0,001598	0,34–0,66
ε_{eq}^{pl}	0,001217	0,001231	1,11
ε_{eq}^{tot}	0,001071–0,002826	0,001075–0,002829	0,34–0,1

Обговорення результатів

Аналіз порівняння результатів показує, що дані моделювання за розробленим програмними кодами збігаються з числовим розв'язком [11]. При цьому максимальне значення похибки визначення фізичних полів не перевищує 3,62 % за алгоритмом 1 і 1,11 % – за алгоритмом 2. Алгоритм 2 порівняно з алгоритмом 1 потребує ітерацій в 5 і більше разів для досягнення приблизно однакової точності розрахунків. Розглянуті алгоритми можна також застосовувати як до задач ідеальної пластичності, так і з реальними властивостями металів з незначними модифікаціями.

Висновки

На базі методу скінченних елементів розроблено числові методики та програмне забезпечення для розв'язання нелінійної пружно-пластичної задачі за двома алгоритмами та виконано зіставлення результатів числових експериментів з даними числового аналізу, виконаного з

використанням програмних продуктів ANSYS Mechanical APDL. Встановлено, що максимальне значення похибки визначення фізичних полів не перевищує 3,62 % за алгоритмом 1 і 1,11 % – за алгоритмом 2.

Подальші дослідження доцільно продовжити у напрямку розробки методик та алгоритмів розв'язання контактних задач механіки твердого деформованого тіла з врахуванням нелінійної поведінки матеріалів.

Список літератури

- Duda, F. P.** A phase-field/gradient damage model for brittle fracture in elastic–plastic solids / **F. P. Duda, A. Ciaronetti, P. J. Sánchez** [et al.] // *International Journal of Plasticity*. – 2015. – Vol. 65. – P. 269–296. – doi: 10.1016/j.ijplas.2014.09.005.
- Pronina, Y.** Analytical solution for the general mechanochemical corrosion of an ideal elastic–plastic thick-walled tube under pressure / **Y. Pronina** // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – Vol. 50, Issues 22 – 23. – P. 3626 – 3633. – doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.07.006.
- Zienkiewicz, O. C.** The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. – 7th ed. / **O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and D. D. Fox**. – 2014. – Publ. by Elsevier Ltd. – 624 p.
- De Borst, R.** Non-linear finite element analysis of solids and structures. – 2nd ed. / **R. De Borst, M. A. Crisfield, J. C. Remmers** [et al.]. – 2012. – John Wiley & Sons Ltd. – 516 p.
- Crisfield, M. A.** Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol. 1: ESSENTIALS / **M. A. Crisfield**. – 2000. – John Wiley & Sons Ltd. – 345 p.
- Зенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике: монографія / **О. Зенкевич**; пер. с англ.; под ред. Б. Е. Победри. – Москва: Мир, 1975. – 543 с.
- Pommier, S.** Incremental model for fatigue crack growth based on a displacement partitioning hypothesis of mode I elastic–plastic displacement fields / **S. Pommier, R. Hamam** // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. – 2006. – Vol. 30, issue 7. – p. 582–598 – doi: 10.1111/j.1460-2695.2007.01128.x.
- Бреббия, К.** Методы граничных элементов / **К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел**; пер. с англ. Корнейчука Л. Г.; под ред. Э. И. Григолюка. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
- Simo, J. C.** Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity / **J. C. Simo, R. L. Taylor** // *Comp. methods in applied mechanics and engineering*. – 1985. – Vol. 48. – P. 101–118.
- Khennane, A.** Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus / **A. Khennane**. – Taylor & Francis Group. – 2013. – 453 p.
- Lawrence, K. L.** Ansys Tutorial Release 13: Structural & Thermal Analysis Using the Ansys Mechanical Apdl Release 13 Environment / **K. L. Lawrence**. – Schroff Development Corp. – 2011. – 178 p.
- Argyros, I. K.** Weaker conditions for the convergence of Newton's method / **I. K. Argyros, S. Hilout** // *Journal of Complexity*. – 2012. – Vol. 28, Issue 3. – P. 364–387. – doi: 10.1016/j.jco.2011.12.003.

- 13 Gmsh. a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. – Access mode: <http://geuz.org/gmsh/>.
- 14 Para View. An open-source, multi-platform data analysis and visualization application [Electronic resource]. – (<http://www.paraview.org/>).
- 15 Mathcad. Engineering math software that allows perform, analyze, and share your most vital calculations [Electronic resource]. – (<http://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad/>).
- 16 **Карвацький, А. Я.** Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Програма реалізація та візуалізація результатів: навч. посіб. / **А. Я. Карвацький.** – К.: НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка». – 2015. – 392 с.
- 7 **Pommier, S., and Hamam, R.** Incremental model for fatigue crack growth based on a displacement partition in ghyphotesis of mode I elastic–plastic displacement fields. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2006, **30** (7), 582-598. doi: 10.1111/j.1460-2695.2007.01128.x.
- 8 **Brebbija, K., Telles, Zh., and Vroubel, L.** Metody ghranychnykh eljementov [Boundary element methods]. Translated from English by Kornejchuk L. G., edited by Je. I. Grigoljuk, *Moscow: Myr*, 1987, 524.
- 9 **Simo, J. C., and Taylor, R. L.** Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comp. methods in applied mechanics and engineering*, 1985, **48**, 101-118.
- 10 **Khennane, A.** Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus. *Taylor & Francis Group*, 2013, 453.
- 11 **Lawrence, K. L.** Ansys Tutorial Release 13: Structural & Thermal Analysis Using the Ansys Mechanical Apdl Release 13 Environment. *Schroff Development Corp*, 2011, 178.
- 12 **Argyros, I. K., and Hilout, S.** Weaker conditions for the convergence of Newton’s method. *Journal of Complexity*, 2012, **28**(3), 364-387. doi: 10.1016/j.jco.2011.12.003.
- 13 Gmsh. a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, <http://geuz.org/gmsh/>.
- 14 Para View. An open-source, multi-platform data analysis and visualization application, <http://www.paraview.org/>.
- 15 Mathcad. Engineering math software that allows perform, analyze, and share your most vital calculations, <http://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad/>.
- 16 **Karvatskii, A. Ya.** Metod skinchennykh elementiv u zadachakh mekhaniky suciljnykh sredovyssh. Programna realizacija ta vizualizacija rezuljtativ: navch. posib. [Finite element method in problems of continuum mechanics. Software implementation and visualization of results: teach. Guidances]. *Kyiv: NTUU «KPI» PPIPPC "Polytechnica"*, 2015, 392.

Bibliography (transliterated)

- 1 **Duda, F. P. Sánchez, P. J., et al.** A phase-field/gradient damage model for brittle fracture in elastic–plastic solids. *International Journal of Plasticity*, 2015, **65**, 269-296. doi: 10.1016/j.ijplas.2014.09.005.
- 2 **Pronina, Y.** Analytical solution for the general mechanochemical corrosion of an ideal elastic–plastic thick-walled tube under pressure. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, **50** (22-23), 3626-3633. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.07.006.
- 3 **Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Fox, D. D.** The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. - 7th ed. *Publ. by Elsevier Ltd*, 2014, 624.
- 4 **De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers J. C., et al.** Non-linear finite element analysis of solids and structures. - 2nd ed. *John Wiley & Sons Ltd*, 2012, 516.
- 5 **Crisfield, M. A.** Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol. 1: ESSENTIALS. *John Wiley & Sons Ltd*, 2000, 345.
- 6 **Zenkevich, O.** Metod konechnykh eljementov v tekhnike: monografija [The finite element method in the technique: a monograph]. Translated from English, ed. By B. E. Pobedri, *Moscow: Myr*, 1975, 543.

Відомості про авторів (About authors)

Карвацький Антон Янович – доктор технічних наук, професор, старший науковий співробітник, професор, кафедра хімічного, полімерного та силікатного машинобудування, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна; e-mail: anton@rst.kpi.ua.

Anton Karvatskii – Doctor of Science (D. Sc.), Professor, Senior Researcher, Professor, Department of chemical, polymer and silicate engineering, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine; e-mail: anton@rst.kpi.ua.

Лазарев Тарас Валерійович – кандидат технічних наук, науковий співробітник, НДЦ «Ресурсозберігаючі технології», Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна; e-mail: t_lazarev@rst.kpi.ua.

Taras Lazariev – Candidate of Sciences (Ph. D.), Researcher, Research center "Resource-saving technologies", National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine; e-mail: t_lazarev@rst.kpi.ua.

Лелека Сергій Володимирович – кандидат технічних наук, науковий співробітник, НДЦ «Ресурсозберігаючі технології», Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна; e-mail: sleleka@rst.kpi.ua.

Serhii Leleka – Candidate of Sciences (Ph. D.), Researcher, Research center "Resource-saving technologies", National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine; e-mail: sleleka@rst.kpi.ua.

Педченко Анатолій Юрійович – молодший науковий співробітник, НДЦ «Ресурсозберігаючі технології», Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна; e-mail: anatolek@rst.kpi.ua.

Anatoliy Pedchenko – Junior researcher, Research center "Resource-saving technologies", National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine; e-mail: anatolek@rst.kpi.ua.

Будь ласка, посилайтесь на цю статтю наступним чином:

Карвацький, А. Я. Застосування САД-систем для розв'язання пружно-пластичних задач з врахуванням ізотропного зміцнення / **А. Я. Карвацький, Т. В. Лазарев, С. В. Лелека, А. Ю. Педченко** // *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях.* – Харків: НТУ «ХПІ». – 2017. – № 7 (1229). – С. 55-63. – doi:10.20998/2413-4295.2017.07.08.

Please cite this article as:

Karvatskii, A., Lazariiev, T., Leleka, S., Pedchenko, A. CAD-systems application for solving the elastoplastic problems with isotropic hardening. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies.* – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017, 7 (1229), 55–63, doi:10.20998/2413-4295.2017.07.07.

Пожалуйста, ссылайтесь на эту статью следующим образом:

Карвацкий, А. Я. Применение САД-систем для решения упругопластических задач с учетом изотропного упрочнения / **А. Я. Карвацкий, Т. В. Лазарев, С. В. Лелека, А. Ю. Педченко** // *Вестник НТУ «ХПИ», Серія: Новые решения в современных технологиях.* – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2017. – № 7 (1229). – С. 55-63. – doi:10.20998/2413-4295.2017.07.07.

АННОТАЦИЯ На базе метода конечных элементов разработаны численные методики для решения нелинейной упругопластической задачи с учетом изотропного упрочнения по двум алгоритмам. Программная реализация численной методики выполнена на языке программирования САД-системы Mathcad и базируется на программном коде для решения трехмерных задач статической упругости. С помощью разработанного программного обеспечения получены результаты численных экспериментов при погрузке внутренним давлением толстостенного стального цилиндра и выполнено их сопоставление с данными численного анализа, выполненного с использованием программных продуктов ANSYS Mechanical APDL. Установлено, что максимальное значение погрешности определения физических полей не превышает 3,62 % по алгоритму 1 и 1,11 % – по алгоритму 2.

Ключевые слова: конечный элемент; изотропное упрочнение; упругопластическая задача; билинейный закон; Mathcad

Надійшла (received) 17.01.2017