

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ К ВАРЬИРОВАНИЮ ЕЕ ИНЕРЦИОННО-ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

А. В. ГРАБОВСКИЙ*

*Кафедра теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, УКРАИНА
e-mail: grabovskiy@tmm-sapr.org*

АННОТАЦИЯ В статье исследовано влияние варьирования инерционно-жесткостных характеристик на изменение собственных частот и собственных форм колебаний (перемещения и эквивалентные напряжения) для прямоугольной, защемленной по контуру, пластины. Показана актуальность приведенной задачи. Решение получено с использованием метода конечных элементов. Показана возможность с высокой точностью аппроксимировать изменение собственных частот, собственных форм (а также положения зон пучностей и узлов) линейной зависимостью от изменения варьируемых инерционно-жесткостных параметров.

Ключевые слова: Свободные колебания, динамическая система, собственные частоты, собственные формы колебаний, чувствительность.

DETERMINATION OF THE SENSITIVITY OF OWN FREQUENCIES AND MODES VIBRATIONS OF A RECTANGULAR PLATE TO THE VARIATION OF ITS INERTIAL STIFFNESS CHARACTERISTICS

A. GRABOVSKIY

Department theory and systems of automated design of mechanisms and machines, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov, UKRAINE

ABSTRACT The article is a logical continuation of a series of works published previously. It investigated the effect of varying inertial stiffness characteristics of the change of natural frequencies and natural modes for a rectangular, clamped along the contour of the plate. As variable parameters acts thickness variation characteristic element within square plate, and changing the added mass, situated in a fixed place. As a study of their own forms of oscillations are the equivalent displacement and stress. When this pattern investigated natural modes in general and specific sections. A series of calculations were performed using the finite element method.

Thus, the determined effect of varying the parameters (thickness and weight) to change their own forms and natural frequencies of the plate. The paper studied on its own forms and movements equivalent stress. All results are normalized relative to the point with the maximum value of its own form for the basic version.

The article confirmed the ability to accurately approximate the change in natural frequencies, natural modes (as well as the position of nodes and anti-nodes zones) linear dependence on the change of variable inertia, stiffness parameters.

Keywords: Free vibration; dynamic system; eigen mode; mode shapes; sensitivity

Введение

Задача о поиске собственных частот и собственных форм колебаний ставится для всех динамических систем [1, 2] как составная часть задачи об отстройке от резонансных частот. Например, в статье [3] авторы выполняют поиск собственных частот и форм (по перемещениям) металлоконструкции солнечных электростанций при разных углах поворотов. При этом для поиска собственных частот используется метод конечных элементов, встроенный в коммерческий программный комплекс ANSYS WorkBench. В статье [4] авторы исследуют собственные частоты и собственные формы (по перемещениям и эквивалентным напряжениям) предварительно напряженных мембранных конструкций, в частности, дирижабля.

Авторы показывают, как внутреннее давление дирижабля и его длина влияют на собственную частоту. Встречаются также работы, в которых авторы рассматривают ортотропные материалы [5], в которых исследуют, как будет меняться частота при изменении угла армирования волокнами. Также исследуются собственные частоты и собственные формы больших цилиндрических резервуаров, которые стоят на упругом основании (грунте) [6].

Таким образом, в литературе встречается множество работ по отстройке систем от резонансных частот [7, 8], однако не было найдено работ, в которых авторы целенаправленно управляют собственными формами путем изменения массо-инерционных характеристик динамической системы. Такая задача была поставлена и осуществляются попытки ее решения.

Как было показано в предыдущих работах [9 – 11], управление собственными частотами и формами колебаний является актуальной и важной задачей как с научной, так и практической точек зрения. В частности, в статье [9] был предложен подход к исследованию чувствительности собственных частот и собственных форм колебаний системы с двумя степенями свободы к варьированию параметров динамической системы. Собственные формы колебаний определялись из условий достижения условных минимумов функции Рэля. Предложены соотношения для определения компонент чувствительности с использованием конечных разностей. В статье [10] был выполнен дополнительный анализ поведения динамической системы с двумя степенями свободы согласно выкладкам, описанным в статье [9]. В статье [11] подход, предложенный в [9 – 10], был расширен на многомассовые дискретные системы, а иллюстрирующие расчеты были выполнены для системы с тремя степенями свободы. Проведено сравнение решения, выполненного на основе минимизации функции Рэля, которое сравнивалось с параллельно выполненным решением на основе задачи о собственных значениях для системы дифференциальных уравнений, составленных методом Даламбера. В процессе расчетов была выполнена оценка влияния жесткостей и масс различных компонент на собственные частоты и собственные формы колебаний.

Предлагаемая статья является развитием проделанной ранее работы и расширяет предложенную теорию на пластинчатые системы.

Постановка задачи

Ставятся задачи выполнить анализ влияния изменения инерционно-жесткостных характеристик отдельных элементов прямоугольной пластины на собственные частоты и соответствующие им собственные формы колебаний.

В качестве исследуемого объекта была выбрана прямоугольная пластина, защемленная по контуру (рис. 1). Метод анализа – метод конечных элементов (МКЭ).

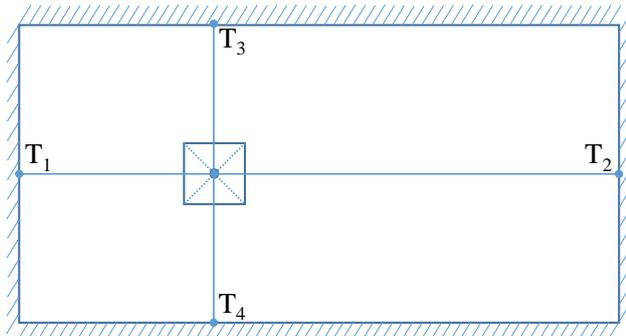


Рис. 1 – Исследуемая прямоугольная пластина

При этом исследуемыми характеристиками выступают собственные частоты, собственные формы (по перемещениям и эквивалентным напряжениям), причем исследуются формы как всей пластины, так и в срезе вдоль путей T_1T_2, T_3T_4 (см. рис. 1).

Варьирование инерционно-жесткостных параметров прямоугольной пластины осуществляется в двух постановках:

Задача 1. Пластина, с размерами, $a \times b$, имеющая общую толщину $h_0 = 1$ мм, у которой варьируется толщина квадратного элемента внутри $h_0(1+\alpha)$, $\alpha \in [-0.2, 0.2]$ с размерами $a_2 \times b_2$ (рис. 2), то есть изменение α составляет $\pm 20\%$. Варьируемый элемент связан с исследуемой пластиной совместной сеткой, таким образом, перемещения и углы поворота на границе между разными частями пластины равны. Также стоит отметить, что длина b_2 составляет 10 % от длины b , а ширина $a_2 - 20\%$ от a .

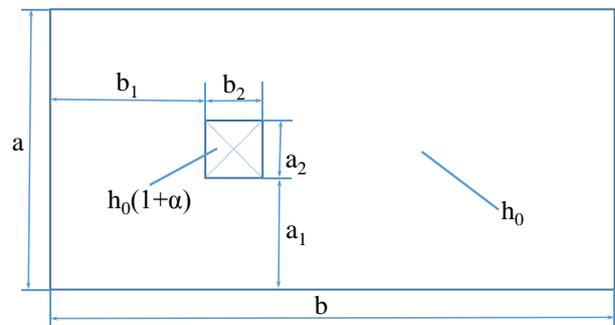


Рис. 2 – Прямоугольная пластина с варьируемой толщиной внутреннего элемента

Задача 2. Пластина равной толщины, у которой присутствует изменяемая добавочная масса $m = m_0(1+\beta)$, $\beta \in [0, 0.127]$ г.

В задачах 1 и 2 обозначены $a_1 = a$, $a_2 = b$.

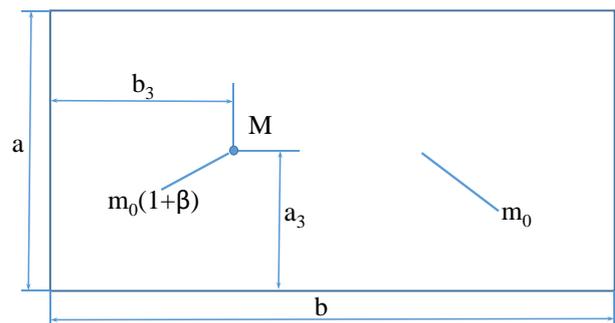


Рис. 3 – Прямоугольная пластина с изменяющейся добавочной массой в точке M

Метод решения

Рассматриваемую задачу, как уже отмечалось, предлагается решать при помощи метода конечных элементов. Для понимания процесса приведем основные уравнения для решения поставленной

задачи. Разрешающее уравнение динамической системы для поиска собственных частот и собственных форм колебаний имеет вид [12]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{M} – суммарная матрица масс пластины (в том числе и присоединенная), \mathbf{C} – матрица жесткости.

Стоит отметить, что при решении задачи 1 будут вноситься изменения как в матрицу жесткости \mathbf{C} , так и матрицу масс \mathbf{M} , а при решении задачи 2 будут вноситься изменения только в матрицу масс \mathbf{M} .

Уравнение для поиска собственных частот и собственных форм колебаний имеет вид:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad (2)$$

где ω – собственные частоты динамической системы, $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор собственных значений (собственная форма). Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо найти ω и $\boldsymbol{\varphi}$. Поиск этих характеристик осуществляется с применением алгоритма Ланцоша, который является наиболее эффективным при симметричной матрице собственных значений [3].

При решении уравнения (2) можно заметить, что коль скоро для пластины можно выделить некоторые параметры p_k (толщина прямоугольного включения в пластине (задача 1), добавленная масса (задача 2)), которые могут быть подвергнуты варьированию путем малого изменения параметров α_k .

$$p_k = p_0 (1 + \alpha_k), \quad (3)$$

то получаем параметрическое семейство решений:

$$\omega_i^2 = \omega_i^2(\alpha_k); \quad \varphi_i = \varphi_i(\alpha_k). \quad (4)$$

В работах [9 – 11] показано, что при малых α_k решения (4) можно с удовлетворительной точностью линеаризовать по параметрам α_k , образуя вектор $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\omega_i^2(\boldsymbol{\alpha}) \approx \omega_i^2(0) \left[1 + \sum_k \frac{\partial \omega_i^2}{\partial \alpha_k} \cdot \alpha_k \right] \quad (5)$$

$$\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) \approx \varphi_i(0) \left[1 + \sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_k} \cdot \alpha_k \right] \quad (6)$$

При этом для вычисления компонент чувствительности

$$\nabla_{ik}^\omega = \frac{\partial \omega_i^2}{\partial \alpha_k}, \quad \nabla_{ik}^\varphi = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_k}. \quad (7)$$

можно применить различные методы. В предлагаемом подходе динамические компоненты чувствительности вычисляются через конечно-разностные соотношения:

$$\nabla_{ik}^\omega \approx \frac{\omega_i^2(\overline{\alpha_k}) - \omega_i^2(0)}{\alpha_k^*}, \quad (8)$$

$$\nabla_{ik}^\varphi \approx \frac{\varphi_i(\overline{\alpha_k}) - \varphi_i(0)}{\alpha_k^*}. \quad (9)$$

Здесь $\overline{\alpha_k}$ – массив параметров $\boldsymbol{\alpha}$ с нулевыми компонентами, за исключением k -й компоненты, равной пробному значению α_k^* . Как и ранее [9 – 11], решения при таких значениях $\overline{\alpha_k}$ назовем «реперными», имея в виду, что они служат опорными для определения конечно-разностных аппроксимаций компонент массива чувствительностей $\nabla_{ik}^\omega, \nabla_{ik}^\varphi$.

Для вычисления «реперных» решений можно использовать МКЭ. Таким образом, соотношения (5), (6) при вычислении $\nabla_{ik}^\omega, \nabla_{ik}^\varphi$ по формулам (7) дают возможность определять тенденции изменения собственных частот и собственных форм колебаний исследуемого объекта при варьировании параметров $\boldsymbol{\alpha}$. При этом можно исследовать различные аспекты, порождаемые в ходе данных процессов. Во-первых, можно провести анализ влияния изменения $\boldsymbol{\alpha}$ и на собственные частоты и на собственные формы колебаний. В частности, можно определить изменение положения зон узловых линий и пучностей как по перемещениям, так и по напряжениям. Во-вторых, учитывая линейность изменения собственных частот и собственных форм колебаний по параметрам $\boldsymbol{\alpha}$, можно добиваться изменения пространственного положения этих пучностей и узлов, отводя их в желательную зону из нежелательной.

В качестве иллюстрации далее будут рассмотрены примеры по анализу реакции исследуемой пластины (задачи 1 и 2) на изменение параметров толщины и добавленной массы.

Численное решение задачи

Задача решалась численным методом конечных элементов, реализованным в ANSYS WorkBench. Пластина разбивалась сеткой, состоящей из 9300 квадратных конечных элемента типа shell.

На следующих рисунках (рис. 4, 5) приведены спектр первых десяти собственных частот и некоторые собственные формы пластины в базовой постановке

(т. е. при $\alpha_k = 0$), а именно толщина у всей пластины одинаковая, а добавочная масса отсутствует.

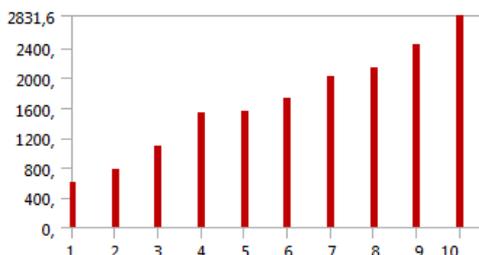


Рис. 4 – Диаграмма первых десяти собственных частот прямоугольной пластины

№ СЧ	Частота, Гц	Форма перемещений	Форма эквивалентных напряжений
1	597,33		
2	767,99		
6	1721,4		

Рис. 5 – Некоторые собственные частоты и собственные формы колебаний пластины в базовой постановке

Далее была выполнена серия расчетов с варьированием толщины внутреннего квадратного элемента (задача 1). Значения толщины были

следующими: 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2 от базовой. При этом получены следующие результаты (рис. 6 - 11).

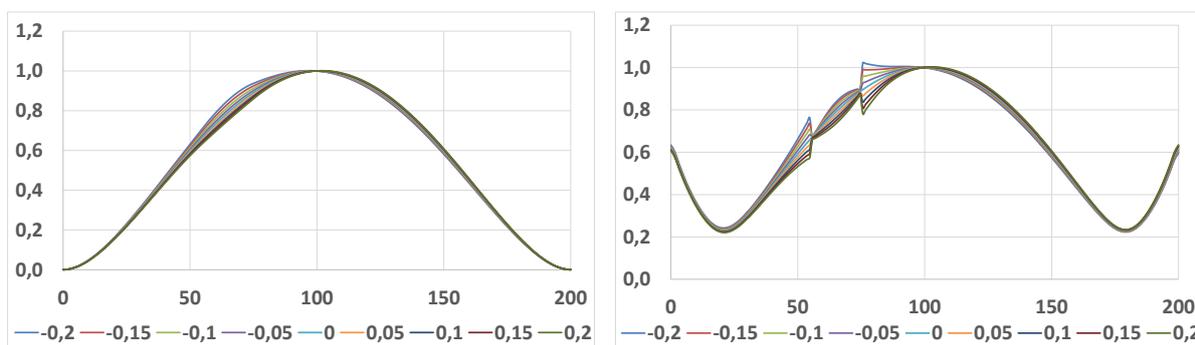


Рис. 6 – График изменение первой собственной формы вертикальных перемещений и эквивалентных напряжений от параметра α вдоль пути T_1T_2 (рис. 1)

Кроме графика среза собственной формы вдоль пути, были получены графики чувствительности собственной формы μ_{ij} от изменения параметров α и β вдоль пути T_1T_2 и T_3T_4 :

$$\mu_{ij} = \left(\frac{\lambda_{ij}(\alpha, \beta)}{\lambda_{ij}(\alpha, \beta)|_{\max}} - \frac{\lambda_{ij}(0, 0)}{\lambda_{ij}(0, 0)|_{\max}} \right) / p(\alpha, \beta). \quad (10)$$

где $\lambda_{ij}(\alpha, \beta)|_{\max}$ – значение формы $\lambda_{ij}(\alpha, \beta)$ в точке, соответствующей максимуму в форме при нулевых

параметрах; $p(\alpha, \beta)$ – приращение соответствующего параметра α или β , т. е. α_1^* , α_2^* (см. выше).

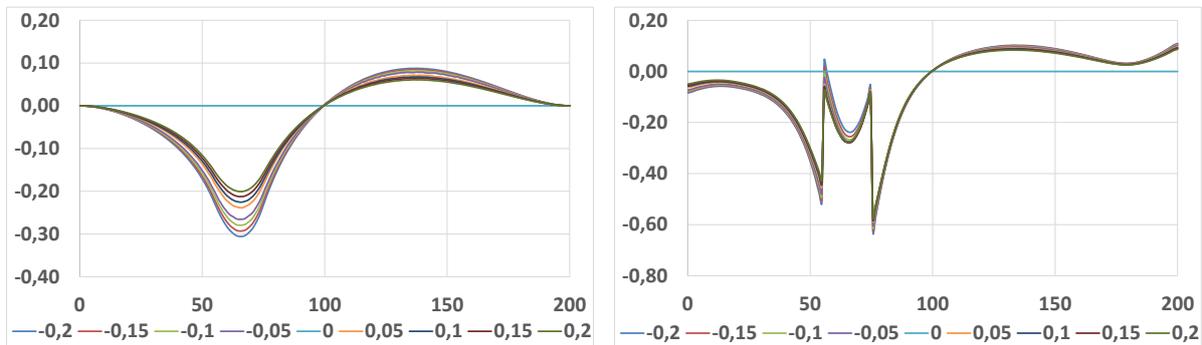


Рис. 7 – График чувствительности первой собственной формы вертикальных перемещений и эквивалентных напряжений от параметра α вдоль пути T_1T_2 (рис. 1)

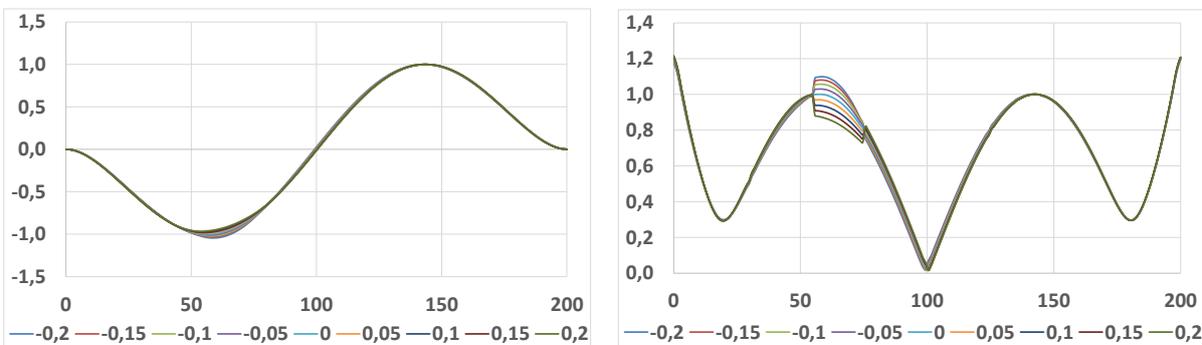


Рис. 8 – График изменение второй собственной формы вертикальных перемещений и эквивалентных напряжений от параметра α вдоль пути T_1T_2 (рис. 1)

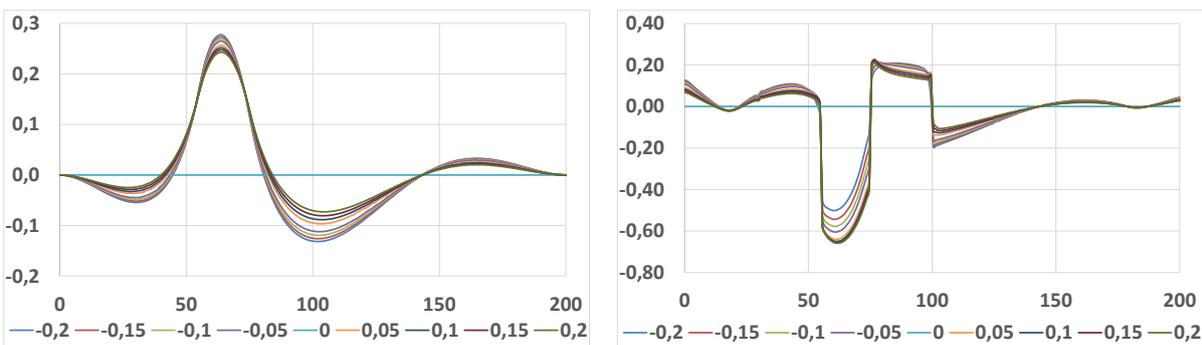


Рис. 9 – График чувствительности второй собственной формы вертикальных перемещений и эквивалентных напряжений от параметра α вдоль пути T_1T_2 (рис. 1)

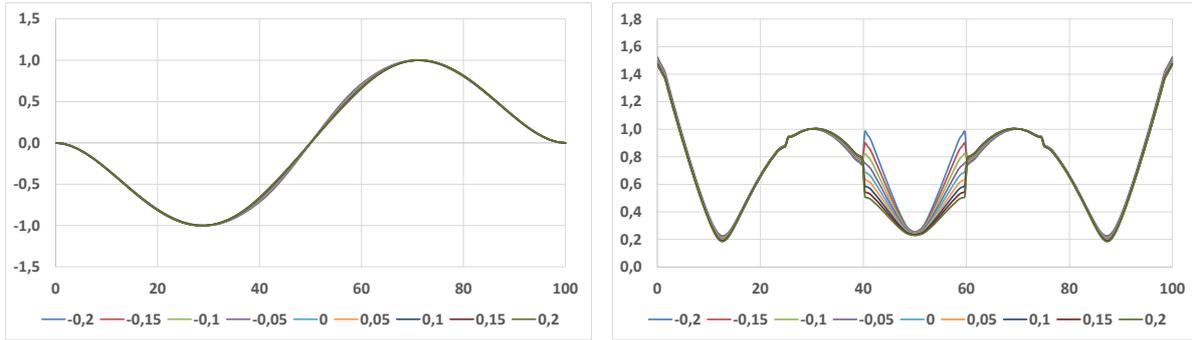


Рис. 10 – График изменение шестой собственной формы вертикальных перемещений и эквивалентных напряжений от параметра α вдоль пути T_3T_4 (рис. 1)

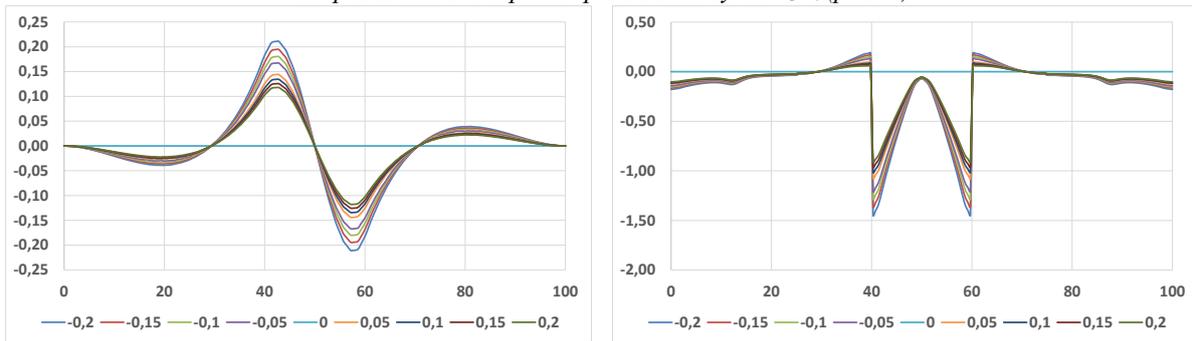


Рис. 11 – График чувствительности шестой собственной формы вертикальных перемещений и эквивалентных напряжений от параметра α вдоль пути T_3T_4 (рис. 1)

Как видно из графиков, при незначительном изменении, в пределах 20%, собственная форма также меняется незначительно. Как и следовало ожидать, чем меньше вносится изменение в систему (т. е. чем меньше параметр α_k), тем точнее вычисление чувствительности. С другой стороны, тем уже интервал применимости аппроксимационных зависимостей (5), (6).

Графики изменения 1, 2 и 6 собственной частоты при варьировании параметра α представлены на рис. 12. Анализируя полученные графики, следует отметить, что значение собственной частоты меняется практически линейно (штрихпунктирная линия) относительно базовой конструкции. Эта особенность также была отмечена в работах [7, 8].

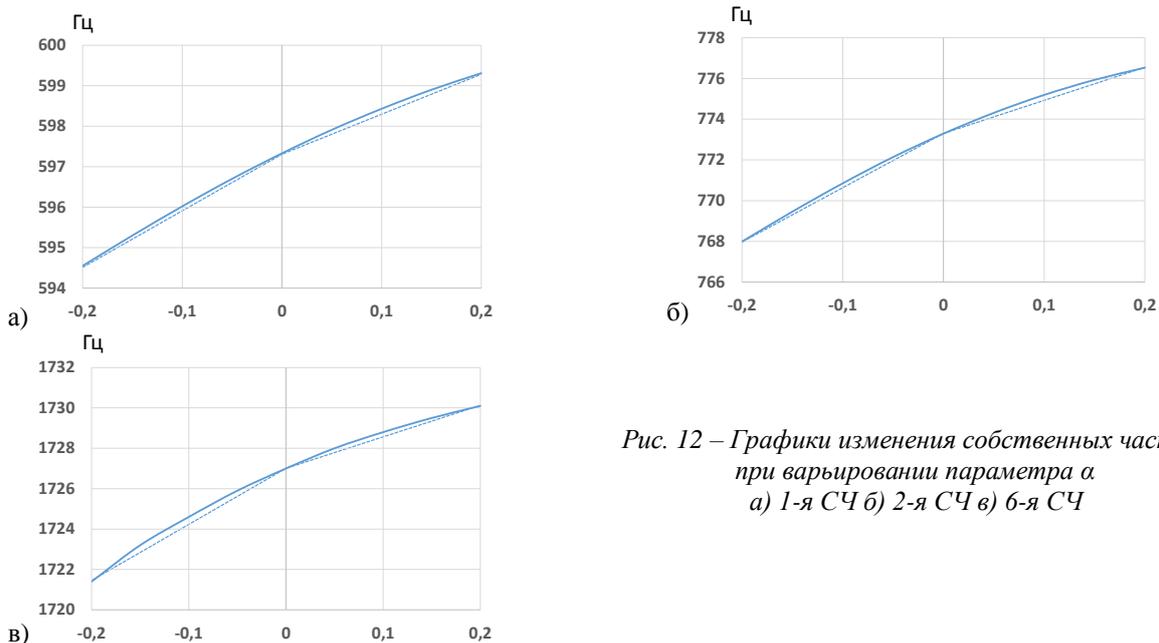


Рис. 12 – Графики изменения собственных частот при варьировании параметра α
а) 1-я СЧ б) 2-я СЧ в) 6-я СЧ

При решении задачи 2 параметр β имел следующие значения: 0, $6,37 \cdot 10^{-4}$, 0,006, 0,013, 0,019, 0,032, 0,064, 0,127 при общей начальной массе пластины 157 грамм. В результате расчета были получены графики, представленные на рис. 13 – 16.

На рис. 17 представлены графики изменения собственных частот колебаний при варьировании β . Стоит отметить, что первая частота меняется

практически линейно во всем диапазоне β , при том, что добавочная масса добавлена в произвольном месте относительно максимума перемещений. В то же время, вторая собственная частота меняется существенно нелинейно. Это связано с тем, что добавочная масса находится практически в месте пучности. При этом, например, шестая собственная частота остается постоянной (не зависит от параметра β), потому что добавочная масса находится в узле.

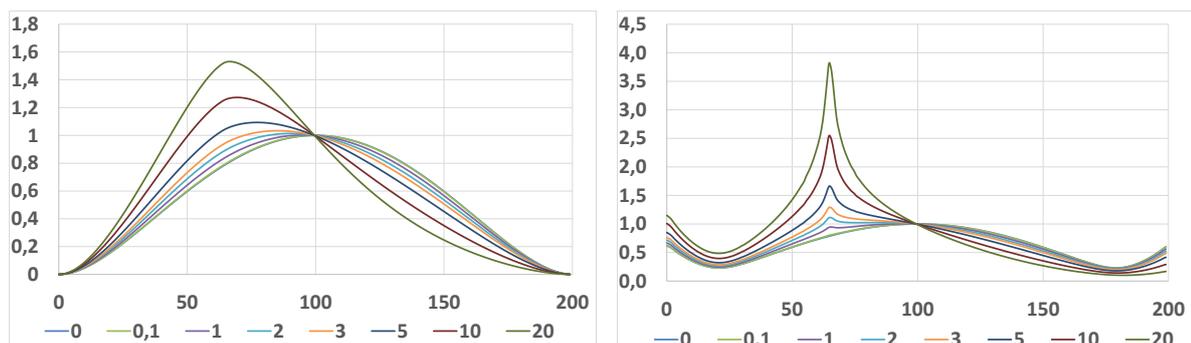


Рис. 13 – График изменение первой собственной формы вертикальных перемещений и эквивалентных напряжений от параметра $\beta \cdot t_0$ вдоль пути T_1T_2 (рис. 1)

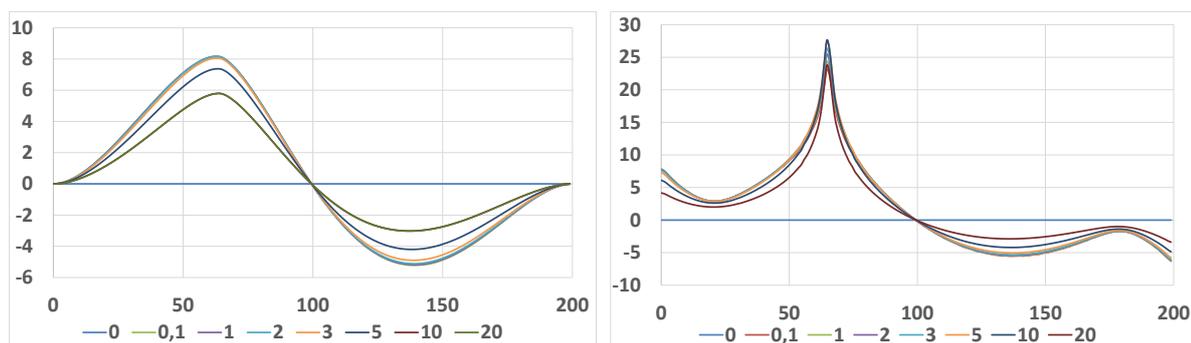


Рис. 14 – График чувствительности первой собственной формы вертикальных перемещений и эквивалентных напряжений от параметра $\beta \cdot t_0$ вдоль пути T_1T_2 (рис. 1)

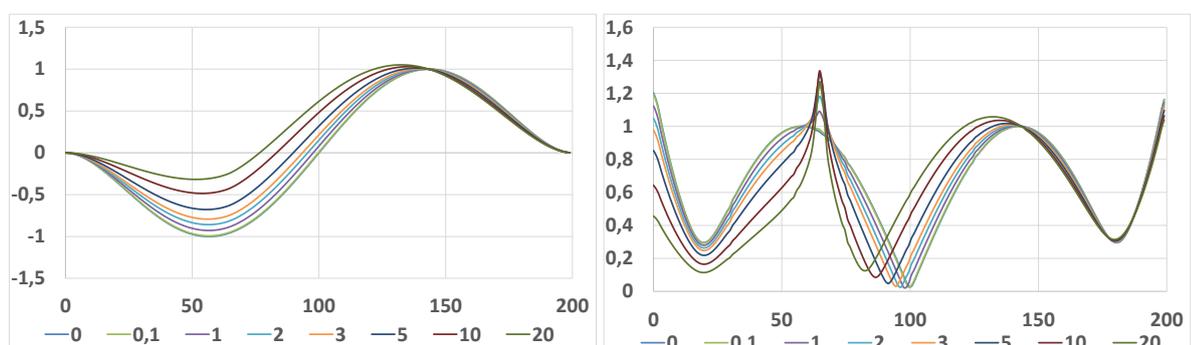


Рис. 15 – График изменение второй собственной формы вертикальных перемещений и эквивалентных напряжений от параметра $\beta \cdot t_0$ вдоль пути T_1T_2 (рис. 1)

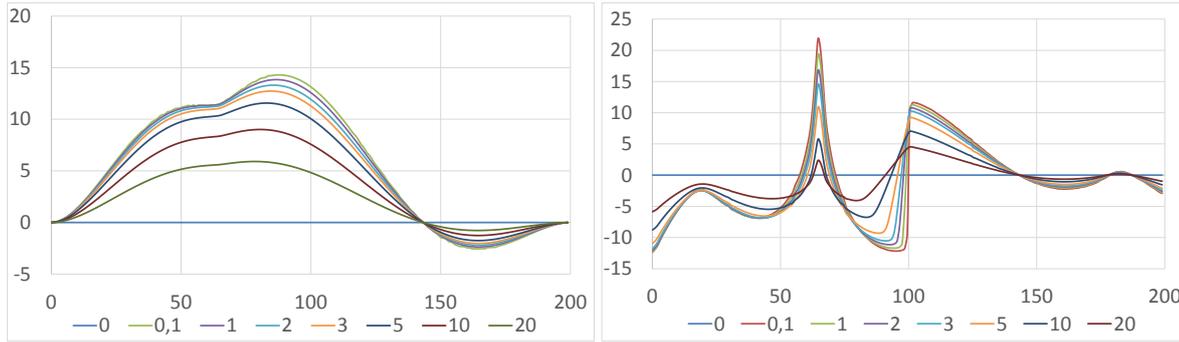


Рис. 16 – График чувствительности второй собственной формы вертикальных перемещений и эквивалентных напряжений от параметра $\beta \cdot t_0$ вдоль пути $T_1 T_2$ (рис. 1)

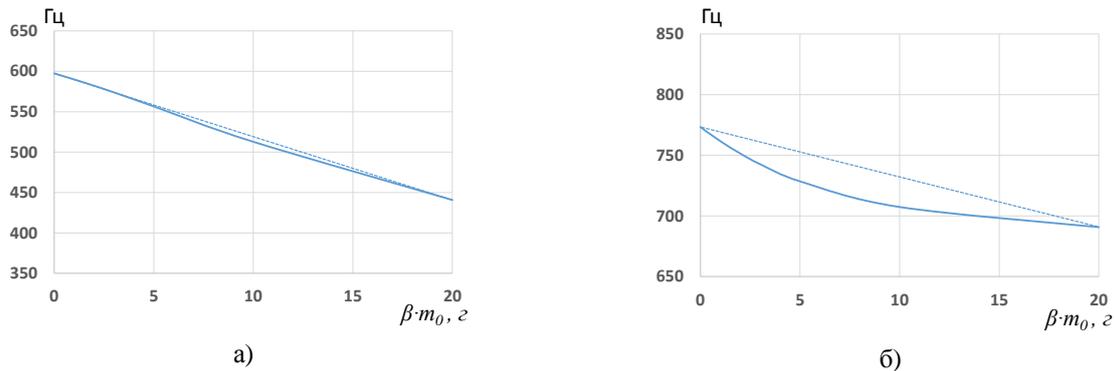


Рис. 17 – Графики изменения собственных частот при варьировании параметра $\beta \cdot t_0$
а) 1-я СЧ б) 2-я СЧ

Заключение

Таким образом, было получено влияние изменения параметров α и β на изменение собственных форм и собственных частот пластины. В статье исследовались собственные формы по перемещениям и эквивалентным напряжениям. Все результаты нормированы относительно точки с максимальной величиной собственной формы для базового варианта.

При этом можно сделать вывод о том, что подтверждена возможность с высокой точностью аппроксимировать изменение собственных частот, собственных форм (а также положения зон пучностей и узлов) линейной зависимостью от изменения варьируемых инерционно-жесткостных параметров. Т.о., показана применимость подхода, предложенного ранее для систем с конечным числом степеней свободы, к анализу систем с распределенными параметрами.

В дальнейшем планируется применить аналогичный подход к исследованию влияния варьирования инерционно-жесткостных параметров сложных пространственных конструкций на их собственные частоты и собственные формы колебаний.

Список литературы

1. Liu, A. Q. Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions / A. Q. Liu, H.

L. Chen // *Journal of Applied Mechanics*. – 2007. – No 74. – P. 1247-1251. – doi:10.1115/1.2744043.
 2. O’Boy, D. J. Vibration of a rectangular plate with a central power-law profiled groove by the Rayleigh Ritz method / D. J. O’Boy, V. V. Krylov // *Applied Acoustics*. – 2016. – No 104. – P. 24 – 32. – doi:10.17028/rd.lboro.2005377.v1.
 3. Qiong, Z. Modal analysis of trough solar collector / Z. Qiong, L. Zhengnong, W. Honghua // *Solar Energy*. – 2017. – Vol. 141. – P. 81 – 90. – doi:10.1016/j.solener.2016.11.026.
 4. Yu, H. Modal behaviors and influencing factors analysis of inflated membrane structures / H. Yu, C. Wujun, C. Yufeng, Z. Daxu, Q. Zhenyu // *Engineering Structures*. – 2017. – Vol. 132. – P. 413–427. – doi:10.1016/j.engstruct.2016.11.037.
 5. Apedo, K. L. Free vibration analysis of inflatable beam made of orthotropic woven fabric / K.L. Apedo, S.Ronel, E.Jacquelin, S.Tiem // *Thin-Walled Structures*. – 2014. – Vol. 78. – P. 1 – 15. – doi:10.1016/j.tws.2013.12.004.
 6. Wei, S. Free vibration analysis of a hard-coating cantilever cylindrical shell with elastic constraints / S. Wei, Z. Mingwei, W. Zhuo // *Aerospace Science and Technology*. – 2017. – Vol. 63. – P. 232–244. – doi:10.1016/j.ast.2017.01.002.
 7. Танченко А. Ю. Анализ чувствительности прочностных и динамических характеристик машиностроительных конструкций на основе прямого возмущения конечно-элементных моделей / Н. А. Ткачук, А. Ю. Танченко, А. Н. Ткачук, П. В.Чурбанов, И. Я. Храмова, О. А. Ищенко // *Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут"*. – Харків : НТУ "ХПІ", 2012. – №22. – С. 147-169.

8. **Танченко А. Ю.** Влияние толщины панелей на спектр собственных частот колебаний корпусов транспортных средств специального назначения / **А. Ю. Танченко** // *Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут"*. – Харків : НТУ "ХПІ", 2013. – №23. – С. 138-145.
9. **Грабовский, А. В.** Чувствительность собственных форм колебаний систем с несколькими степенями свободы к варьированию параметров динамической системы / **А. В. Грабовский, Н. А. Ткачук, Н. Н. Ткачук, А. Ю. Танченко, И. В. Мазур** // *Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Транспортное машиностроение*. – Х.: НТУ «ХПИ». – 2015. – № 43. – С. 25 - 29.
10. **Грабовский, А. В.** Зависимость собственных частот и собственных форм колебаний от инерционно-жесткостных характеристик систем с конечным числом степеней свободы / **А. В. Грабовский** // *Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Новые решения в современных технологиях*. – Х.: НТУ «ХПИ». – 2015. – № 46. – С. 11 - 16.
11. **Грабовский, А. В.** Влияние варьируемых инерционно-жесткостных параметров на характеристики динамических многомассовых систем / **А. В. Грабовский** // *Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Новые решения в современных технологиях*. – Х.: НТУ «ХПИ». – 2016. – № 12 (1184). – С. 17 - 22. – doi:10.20998/2413-4295.2016.12.03.
12. **Clough, R. W.** Dynamics of structures / **R. W. Clough, J. Penzien** // *McGraw-Hill*. – 1993. – 752 p.
5. **Apedo, K. L., Ronel, S., Jacquelin, E., Tiem, S.** Free vibration analysis of inflatable beam made of orthotropic woven fabric. *Thin-Walled Structures*, 2014, **78**, 1 – 15, doi:10.1016/j.tws.2013.12.004.
6. **Wei, S., Mingwei, Z., Zhuo, W.** Free vibration analysis of a hard-coating cantilever cylindrical shell with elastic constraints. *Aerospace Science and Technology*, 2017, **63**, 232–244, doi:10.1016/j.ast.2017.01.002.
7. **Tanchenko, A. Yu., Tkachuk, N. A., Churbanov, P. V., Khramtsova, I. Ya., Ishchenko, O. A.** Analiz chuvstvitel'nosti prochnostnykh i dinamicheskikh kharakteristik mashinostroitel'nykh konstruktсий na osnove pryamogo vozmushcheniya konechno-elementnykh modeley. *Visnik Natsional'nogo tekhnichnogo universitetu "Kharkivs'kiy politekhnichniy institut"*, Kharkiv: NTU "KhPI", 2012, **22**, 147-169.
8. **Tanchenko, A. Yu.** Vliyanie tolschiny paneley na spektr sobstvennykh chastot kolebaniy korpusov transportnykh sredstv spetsial'nogo naznacheniya. *Visnik Natsional'nogo tekhnichnogo universitetu "Kharkivs'kiy politekhnichniy institut"*, Kharkiv : NTU "KhPI", 2013, **23**, 138-145.
9. **Grabovskiy, A. V., Tkachuk, N. A., Tkachuk, N. N., Tanchenko, A. Yu., Mazur, I. V.** Chuvstvitel'nost' sobstvennykh form kolebaniy sistem s neskol'kimi stepenyami svobody k var'irovaniyu parametrov dinamicheskoy sistemy. [The sensitivity of the natural modes of systems with several degrees of freedom to variations in the parameters of the dynamic system]. *Bulletin of NTU «KhPI». Seriya: Transportnoe mashinostroenie*. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015, **43**, 25 - 29.
10. **Grabovskiy, A. V.** Zavisimost' sobstvennykh chastot i sobstvennykh form kolebaniy ot inertsionno-zhestkostnykh kharakteristik sistem s konechnym chislom stepeny svobody. [The dependence of natural frequencies and natural modes of inertial stiffness characteristics of systems with a finite number of degrees of freedom]. *Bulletin of NTU «KhPI». Seriya: Novye resheniya v sovremennykh tekhnologiyakh*. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015, **46**, 11
11. **Grabovskiy, A.** The effect of variable inertia-stiffness parameters on dynamic multi-mass systems. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies*. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016, **12** (1184), 17-22. – doi:10.20998/2413-4295.2016.12.03.
12. **Clough, R. W.** Dynamics of structures / **R. W. Clough, J. Penzien** // *McGraw-Hill*. – 1993. – 752 p.

Bibliography (transliterated):

1. **Liu, A. Q., Chen, H. L.** Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions. *Journal of Applied Mechanics*, 2007, **74**, 1247-1251, doi:10.1115/1.2744043.
2. **O'Boy, D. J., Krylov, V. V.** Vibration of a rectangular plate with a central power-law profiled groove by the Rayleigh Ritz method. *Applied Acoustics*, 2016, **104**, 24 – 32, doi:10.17028/rd.lboro.2005377.v1.
3. **Qiong, Z., Zhengnong, L., Honghua, W.** Modal analysis of trough solar collector. *Solar Energy*, 2017, **141**, 81 – 90, doi:10.1016/j.solener.2016.11.026.
4. **Yu, H., Wujun, C., Yufeng, C., Daxu, Z., Zhenyu, Q.** Modal behaviors and influencing factors analysis of inflated membrane structures. *Engineering Structures*, 2017, **132**, 413–427, doi:10.1016/j.engstruct.2016.11.037.

Сведения об авторах (About authors)

Грабовский Андрей Владимирович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, кафедра теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков, Украина; e-mail: grabovskiy@tmm-sapr.org.

Andrey Grabovskiy – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Researcher, Department theory and systems of automated design of mechanisms and machines, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov, Ukraine, e-mail: grabovskiy@tmm-sapr.org.

Пожалуйста, ссылайтесь на эту статью следующим образом:

Грабовский, А. В. Определение чувствительности собственных частот и форм колебаний прямоугольной пластины к варьированию ее инерционно-жесткостных характеристик / **А. В. Грабовский** // *Вестник НТУ «ХПИ», Серия: Новые решения в современных технологиях*. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2017. – № 7 (1229). – С. 39-48. – doi:10.20998/2413-4295.2017.07.06.

Please cite this article as:

Grabovskiy, A. Determination of the sensitivity of own frequencies and modes vibrations of a rectangular plate to the variation of its inertial stiffness characteristics. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies.* – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017, **7** (1229), 39-48. – doi:10.20998/2413-4295.2017.07.06.

Будь ласка, посилайтесь на цю статтю наступним чином:

Грабовський, А. В. Визначення чутливості власних частот і форм коливань прямокутної пластини до варіювання її інерційно-жорсткісних характеристик / **А. В. Грабовський** // *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях.* – Харків: НТУ «ХПІ». – 2017. – № 7 (1229). – С. 39-48. – doi:10.20998/2413-4295.2017.07.06.

АНОТАЦІЯ У статті досліджено вплив зміни інерційно-характеристик жорсткості на зміну власних частот і власних форм коливань (переміщення і еквівалентні напруження) для прямокутної, затисненої по контуру, пластини. Показана актуальність наведеної задачі. Рішення отримано з використанням методу скінченних елементів. Показана можливість з високою точністю апроксимувати зміну власних частот, власних форм (а також положення зон пучностей і вузлів) лінійної залежністю від зміни варіюваних інерційно-жорсткісних параметрів.

Ключові слова: Вільні коливання; динамічна система; власні частоти; власні форми коливань; чутливість

Поступила (received) 28.02.2017