

В.А., Шехов А.В. Методика оптимизации многоступенчатого планетарного механизма по критерию массы // Вісник національного технічного університету "ХПІ". – 2009. – Вып.20. – С. 10-19. **37.** Матусевич В.А., Шарбан Ю.В., Шехов А.В., Абрамов В.Т. Равнопрочность зубчатых зацеплений в задаче оптимизации многоступенчатого механизма по критерию массы // Вісник національного технічного університету "ХПІ". – 2010. – Вып.26. – С.77-85. **38.** Шехов А.В. Численное решение задачи оптимизации многоступенчатого планетарного механизма типа  $\text{p} \times \text{AI}$  / Вісник національного технічного університету "ХПІ". – 2012. – Вып.36. – С.169-175. **39.** Старжинский В.Е., Шалобаев Е.В., Басинюк В.Л., Мардосевич Е.И. Оптимизация двухпоточного зубчатого механизма по критерию минимизации объема редуктора // Вісник національного технічного університету "ХПІ". – 2011. – Вып.28. – С.150-162. **40.** Старжинский В.Е., Басинюк В.Л., Мардосевич Е.И. Автоматизированное проектирование двухпоточных двухступенчатых приборных зубчатых механизмов с оптимизацией по критерию минимизации объема редуктора // Свидетельство о регистрации компьютерной программы №422 от 18.05.2012 в Национальном центре интеллектуальной собственности РБ. **41.** Басинюк В.Л., Мардосевич Е.И., Старжинский В.Е., Шалобаев Е.В. Автоматизированное проектирование двухпоточного приборного зубчатого механизма с оптимизацией кинематических параметров по критерию объема редуктора // Сб. науч. работ: Актуальные вопросы машиностроения. – Минск: ОИМ НАН Б, 2012. – С.296-301. **42.** Сидоров П.Г., Пащин А.А., Плясов А.В. Многопоточные зубчатые трансмиссии. Теория и методология проектирования. – М.: Машиностроение, 2011. – 340с.

Поступила в редколлегию 23.03.2013

УДК 621.833

**Анализ публикаций по проблеме оптимизации компоновочных схем зубчатых механизмов / В.Е. Старжинский, В.Л. Басинюк, Е.И. Мардосевич, Е.В. Шалобаев // Вісник НТУ "ХПІ". Серия: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ". – 2013. – №40(1013). – С.152-165. – Бібліогр.: 42 назв.**

Розглядається проблема оптимізації компоувальних схем силових редукторів і зубчатих механізмів приладів. На підставі аналізу різних підходів і методів оптимізації різноманітних схем компоунвання наводяться узагальнені рекомендації з оптимального проектування зубчатих механізмів.

**Ключові слова:** оптимізація, зубчастий механізм, силовий редуктор.

The problem of arrangement diagram optimization of power transmissions and instrument toothed drives is considered. On the base of analysis of different approaches and methods of optimization of various arrangement diagrams summary recommendations for optimal design of gear units are represented.

**Keywords:** optimization, gear mechanism, power transmission.

УДК 621.833

**В.Н. СТРЕЛЬНИКОВ**, д.т.н., проф., главный инженер проекта ПАО "НКМЗ", Краматорск;  
**Г.С. СУКОВ**, к.э.н., генеральный директор ПАО "НКМЗ";  
**М.Г. СУКОВ**, заместитель директора ПМ и ШПО ПАО "НКМЗ"

### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧКИ ГИБКОГО КОЛЕСА ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассмотрено напряженно-деформированное состояние оболочки гибкого колеса. Силовые факторы в сечениях оболочки координатными плоскостями и смещения вдоль координатных линий представлены через производные функции напряжений В.З. Власова, которая выражается через функции Крылова. Из граничных условий получаем систему уравнений для определения коэффициентов, входящих в выражение функции напряжений.

**Ключевые слова:** гибкое колесо, оболочка, напряженное состояние, функция напряжений, силовые факторы.

**Актуальность задачи.** Гибкое колесо преобразует вращение генератора волн в волновое движение гибкого зубчатого венца. Составляющая вращательно-

© В.М. Стрельников, Г.С. Суков, М.Г. Суков, 2013

го движения волновой деформации гибкого колеса отбирается посредством оболочки и через шлицы передается на выходной вал волновой передачи. [1-3]. Гибкое колесо рассматриваем как тонкостенную цилиндрическую оболочку длиной  $l$  с гибким зубчатым венцом шириной  $b_1$  на одном конце и шлицами шириной  $b_2$  на противоположном. Отношение толщины оболочки  $h$  к диаметру окружности, делящей стенку оболочки пополам  $2a$ , составляет 0,012.

Оболочка представляет часть гибкого колеса свободную от внешней нагрузки, передающую крутящий момент на шлицы. Демпфирование оболочки сглаживает влияние пиковых нагрузок при передаче крутящего момента и выравнивает распределение сил в кинематических парах.

Крутящий момент формируется дисками генератора волн на участке гибкого зубчатого венца и передается касательными усилиями, распределенными по торцу оболочки неравномерно, вследствие неравномерной деформации зубчатого венца. Неравномерность этих усилий выравнивается оболочкой. Напряженное состояние оболочки рассматриваем как поле возмущений, вследствие краевого эффекта у торца оболочки, наложенное на поле касательных напряжений, при равномерном распределении касательных усилий по торцу оболочки.

Наличие поля возмущений, вызванное неравномерной деформацией торца оболочки, во многом определяет ее прочностные свойства. Неравномерная деформация гибкого колеса в окружном направлении является определяющей, т.к. значительно превышает его продольную деформацию. Основной задачей данного исследования является определение функции напряжений, через которую определяются деформации и поле напряжений оболочки гибкого колеса.

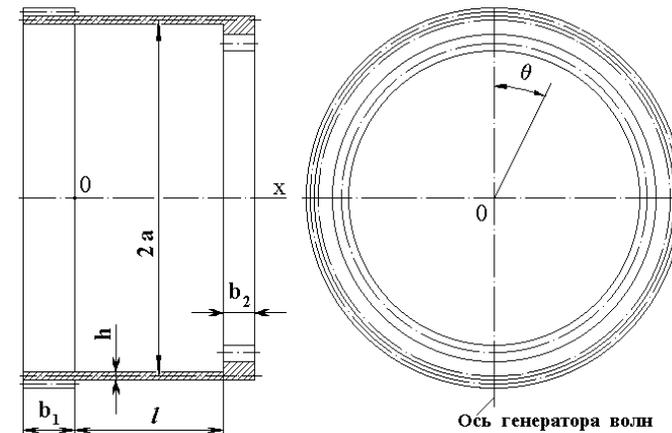


Рисунок 1 – Конструктивная схема гибкого колеса

определяющим ее несущую способность и ресурс работы. Гибкое колесо находится в условиях стесненного деформирования – растяжения в окружном направлении, которые существенны для зацепления зубьев и изменения формы гибкого колеса при наложении нагрузки. Гибкое колесо можно рассматривать в виде тонкостенной цилиндрической оболочки [4, 5]. Отношение толщины стенки гибкого колеса к диаметру окружности, делящей стенку колеса пополам, составляет 0,01232 (рисунок 2).

**Материалы исследования.** Пусть цилиндрическая оболочка длиной  $l$ , толщиной стенки  $h$ , радиусом срединной поверхности  $a$  закреплена с двух торцов в

толстые плиты, поворачивающиеся относительно друг друга на некоторый угол.

При этом сохраняется расстояние между плитами равное длине недеформированной оболочки  $l$ . В процессе поворота плиты не испытывают деформации. При деформации оболочки точка  $M$ , лежащая на ее поверхности и определяемая радиусом  $\bar{r}$ , получает перемещение  $\bar{U}$  и переходит в некоторую точку  $M_1$ , радиус которой  $\bar{r}^*$  равен:

$$\bar{r}^* = \bar{r} + \bar{U}; \quad \bar{U} = u\bar{\tau}_1 + v\bar{\tau}_2 + w\bar{n}, \quad (1)$$

где  $u, v, w$  – составляющие вектора перемещения  $\bar{U}$  по осям  $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{n}$ .

Деформация зубчатого венца вызывает деформацию торца оболочки, что создает в ней краевой эффект и дополнительное поле напряжений, наиболее опасными из которых являются изгибные, вызванные неравномерностью распределения нагрузки, приложенной к ободу зубчатого венца. Верхнюю границу изгибных напряжений можно получить, заменив распределенную нагрузку сосредоточенными силами [6].

Для решения задачи напряженного состояния гибкого колеса записано уравнение функции напряжений в операторах Власова и составлены граничные условия, исходя из взаимодействия оболочки с зубчатым и шлицевым венцом.

Для получения граничных условий на торце оболочки со стороны зубчатого венца рассмотрена деформация зубчатого венца, под действием приложенных сил с учетом взаимодействия венца с торцом оболочки. Граничные условия для торца оболочки со стороны шлицевого венца определялись из предположения, что венец, по отношению к оболочке, является абсолютно жестким конструктивным элементом.

Решение задачи найдено в форме рядов. Для торца оболочки, который сопрягается с зубчатым венцом, выполнен предельный переход и получены специальные расчетные формулы. На основе полученного решения разработан алгоритм для расчета на ЭВМ и выполнен расчет.

Особенностью деформирования зубчатого венца гибкого колеса является наличие зоны, свободной от воздействия генератора волн, что приводит к неравномерности распределения окружных усилий в зубчатом венце. Цилиндрическая оболочка выравнивает распределение окружных усилий, и при этом выполняет функции демпфера. Механические и прочностные свойства оболочки оказывают существенное влияние на напряженное состояние, несущую способность и долговечность гибкого колеса. Напряженное состояние оболочки является результатом действия крутящего момента и краевого эффекта на стыке оболочки и зубчатого венца.

В оболочке выделим поле напряжений, связанное с передачей крутящего момента и поле напряжений от краевого эффекта. Поле напряжений от крутящего момента определяется через компоненты смещения срединной поверхности,

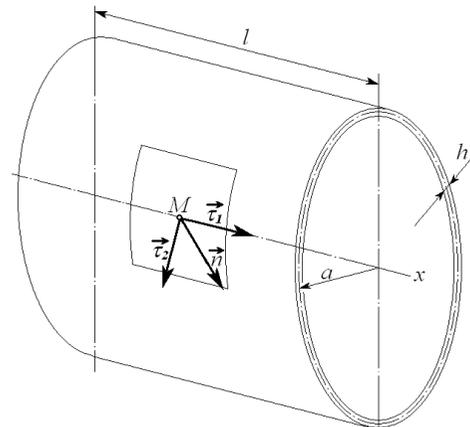


Рисунок 2 – Оболочка гибкого колеса волновой передачи

$$U_0 = 0; \quad V_0 = \frac{(1+\nu)M_2 X}{\pi(1+3\xi^2)aEh}; \quad W_0 = 0, \quad (2)$$

где  $U_0, V_0, W_0$  – соответственно, осевые, окружные и радиальные смещения точек срединной поверхности оболочки;  $a$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $h$  – толщина оболочки;  $E$  – модуль упругости первого рода;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $X$  – осевая координата, отсчитанная от торца оболочки, сопряженного с зубчатым венцом. Параметр  $\xi^2$  вычисляется по формуле:  $\xi^2 = h^2/12a^2$ .

Смещениям (2) соответствуют напряжения:

$$\sigma_{x_0} = 0; \quad \sigma_{\theta_0} = 0; \quad \tau_0 = \frac{M_2(1+z/a)}{2\pi a^2 h(1+\xi^2)}, \quad (3)$$

где  $z$  – координата, отсчитанная по нормали к срединной поверхности.

Решениям (3) соответствуют краевые условия для свободных торцов, нагруженных касательной нагрузкой, распределенной по тому же закону, что и касательные напряжения  $\tau_0$  в последней формуле системы (3). Касательные напряжения  $\tau_0$  в конструкциях крупных волновых редукторов невелики. Для волновых редукторов приводов перефутеровки рудоразмольных мельниц, с размерами гибкого колеса  $a=548,3$ мм,  $h=13,5$ мм,  $M_2=500$ кН·м, максимальное значение касательных напряжений составило  $\tau_{0\max} = 20$  МПа.

Краевой эффект возникает в результате неравномерности деформации при контакте зубчатого венца с дисками генератора волн. Влияние краевого эффекта рассматриваем как поле возмущений, наложенное на поле касательных напряжений  $\tau_0$  при передаче крутящего момента  $M_2$  на ведомом валу. Основными являются изгибные напряжения. В запас прочности примем, что на торцах оболочки действуют сосредоточенные силы, которые создают максимальную радиальную деформацию, равную максимальной деформации зубчатого венца при контакте с дисками генератора волн.

Неравномерность радиальной нагрузки и существование у зубчатого венца ненагруженных зон создают в оболочке изгибные напряжения в окружном направлении. Учитывая определяющую роль этих напряжений, воспользуемся полубезмоментной теорией В.З. Власова [7].

Задачу о напряженном состоянии оболочки под действием краевого эффекта рассмотрим исходя из решения В.Л. Бидермана [8], представленного через функцию напряжений, удовлетворяющую дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \xi^2 \left( \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \theta^8} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \theta^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} \right) = 0, \quad (4)$$

где  $x = X/a$  – безразмерный параметр;  $X$  – линейный размер, отсчитанный от торца оболочки вдоль образующей;  $\theta$  – угловая координата.

Силовые факторы в сечениях оболочки координатными плоскостями (рисунок 3) и смещения  $U, V, W$  вдоль координатных линий выражаются через производные функции напряжений:

$$N_x = \frac{Eh}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right), \quad (5) \quad N_\theta = -\frac{D}{a^4} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \theta^6} \right), \quad (6) \quad M_\theta = -\frac{D}{a^3} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -\frac{Eh}{a^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}, \quad (8) \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{D}{a^4} \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^3} + 2 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \theta^5} + \frac{\partial^7 \Phi}{\partial \theta^7} \right), \quad (9)$$

$$U = \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (10) \quad V = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (11) \quad W = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad (12)$$

где  $D = Eh^3/12$  – цилиндрическая жесткость оболочки при  $V = 0$ .

Деформация оболочки симметрична относительно оси генератора волн, решение уравнения (4) отыскиваем в виде ряда по косинусам [9],

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) \cos k\theta. \quad (13)$$

Подставив выражение (13) в уравнение (4), получим последовательность дифференциальных уравнений  $\Phi_k (K=2, 4, \dots)$ ,

$$\Phi_k^{(4)}(x) + 4m_k^4 \Phi_k(x) = 0, \quad (14)$$

где  $m_k = K \sqrt{\xi(k^2 - 1)/2}$ .

Функции  $\Phi_k(x)$  выражаются через функции Крылова,

$$\Phi_k(x) = C_{k_1} K_1(m_k x) + C_{k_2} K_2(m_k x) + C_{k_3} K_3(m_k x) + C_{k_4} K_4(m_k x). \quad (15)$$

Функции Крылова вычисляются по формулам:

$$K_1(m_k x) = \operatorname{ch}(m_k x) \cos(m_k x); \quad K_2(m_k x) = 1/2 [\operatorname{ch}(m_k x) \sin(m_k x) + \operatorname{sh}(m_k x) \cos(m_k x)]; \\ K_3(m_k x) = 1/2 \operatorname{sh}(m_k x) \sin(m_k x); \quad K_4(m_k x) = 1/4 [\operatorname{ch}(m_k x) \sin(m_k x) - \operatorname{sh}(m_k x) \cos(m_k x)].$$

Производные функций Крылова удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{dK_1}{dx} = -4m_k K_4(m_k x); \quad \frac{dK_2}{dx} = m_k K_1(m_k x); \quad \frac{dK_3}{dx} = m_k K_2(m_k x); \quad \frac{dK_4}{dx} = m_k K_3(m_k x).$$

Коэффициенты  $C_{ki} (i = 1, 2, 3, 4)$  в формулах (15) при каждом фиксированном  $K$  определяем из граничных условий. Функция напряжений определена, если заданы условия на торцах. Так как на оболочку не действуют внешние осевые силы, а торцы зубчатого и шлицевого венцов свободны от нагрузки, можно принять, что на торцах оболочки отсутствуют осевые усилия:

$$(N_x)_{x=0} = 0; \quad (N_x)_{x=q} = 0, \quad (18)$$

где  $q = l/a$ ;  $l$  – длина оболочки.

Шлицевый венец гибкого колеса предполагается нерастяжимым. Считаем равным нулю смещения точек шлицевого венца в окружном направлении,

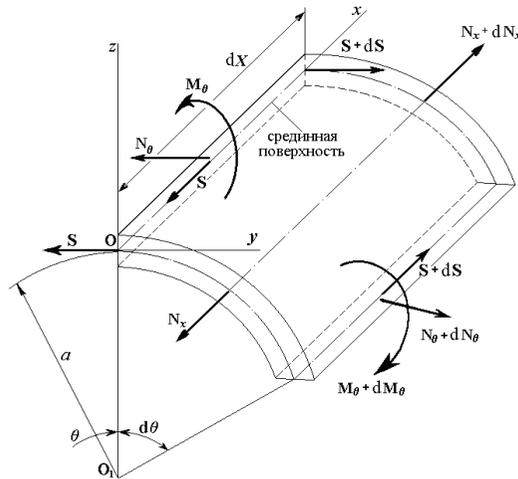


Рисунок 3 – Силы и моменты, приложенные к уравновешенному элементу оболочки гибкого колеса

$$(V)_{x=q} = 0. \quad (19)$$

Четвертое граничное условие получаем, рассматривая взаимодействие зубчатого венца с торцом оболочки, при  $x=0$ :

$$\left\{ S - 2E\xi^3 \sqrt{3} \left( \frac{b_1}{a} \right) \left( \frac{h_1}{h} \right)^3 \left( \frac{\partial^5 W}{\partial \theta^5} + \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} + \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{dq_n}{d\theta} \right\}_{x=0} = 0. \quad (20)$$

Из граничных условий получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_{ki} (i = 1, 2, 3, 4)$  в формуле (15). При деформации зубчатого венца гибкого колеса, по торцу, оболочке передается касательное усилие  $S$ .

Напряженное состояние оболочки рассчитывается по формулам:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h}; \quad \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} + \frac{12M_\theta z}{h^2}; \quad \tau = \frac{S}{h}, \quad (21)$$

где  $\sigma_x, \sigma_\theta, \tau$  – нормальные и касательные напряжения.

**Выводы.** Растягивающие напряжения  $\sigma_\theta$  принимают максимальные значения в момент прохождения большой оси генератора волн, максимальные сжимающие напряжения  $\sigma_\theta$  возникают в момент прохождения малой оси генератора волн, на угол  $40...45^\circ$  нормальные напряжения проходят через нулевое значение.

Снижение максимальных значений нормальных напряжений изгиба  $(\sigma_\theta)_{\max}$  до уровня максимальных касательных напряжений кручения  $\tau_{\max}$ , способствует улучшению напряженно-деформированного состояния гибкого колеса, что повышает нагрузочную способность и ресурс работы крупных высоконагруженных волновых редукторов.

**Список литературы:** 1. Гинзбург Е.Г. Волновые зубчатые передачи. – Л.: Машиностроение, 1969. – 160с. 2. Ковалев Н.А. Общие основы теории передач гибкими колесами // Машиноведение. – 1977. – №5. – С.59-65. 3. Волков Д.П., Крайнев А.Ф. Волновые зубчатые передачи. – К.: Техника, 1976. – 224с. 4. Цейтлин Н.И., Михеев М.Б. Определение податливости диафрагмы гибкого колеса – стакана волновой зубчатой передачи // Волновые передачи: Сб. тр. – М.: Станкин, 1978. – Вып.4. – С.153-165. 5. Иванов М.Н. Волновые зубчатые передачи. – М.: Высшая школа, 1981. – 184с. 6. Шувалов С.А., Горелов В.Н. Исследование напряжений в гибком зубчатом венце методом конечных элементов // Вестник машиностроения. – 1983. – №1. – С.10-12. 7. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М., Л.: Гостехиздат, 1949. – 784с. 8. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 486с. 9. Колзунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. – М.: Высшая школа, 1963. – 278с.

Поступила в редколлегию 31.03.2013

УДК 621.833

**Представление гибкого колеса волновой передачи в виде цилиндрической оболочки, заземленной по торцам / В.Н. Стрельников, Г.С. Суков, М.Г. Суков // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ". – 2013. – №40(1013). – С.165-170. – Бібліогр.: 9 назв.**

Розглянуто напружено-деформований стан оболонки гнучкого колеса. Силіви чинники в перетинах оболонки координатними площинами і зміщення вздовж координатних ліній представлені через похідні функції напружень В.З. Власова, яка виражається через функції Крылова. З граничних умов отримуюмо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів, що входять у вираз функції напружень.

**Ключові слова:** гнучке колесо, оболонка, напружений стан, функція напружень, силіви фактори.

The stress-strain state of a shell of a flexible wheel is observed. Power factors in shell cross-sections and displacement along coordinate lines are presented by co-ordinate planes through V.Z. Vlasov stress arbitrary functions of which is expressed through Krylov's functions. From boundary conditions we gain the equations system for definition of the factors entering into expression of stress functions.

**Keywords:** flexible wheel, envelope, stress state, stress functions, power factors.