

бых конических колес по межосевому углу. – Минск: БелНИИТИ, 1986. – 2с. **9. Антонок В.Е., Изудеман Р.Е., Белов А.М.** Финишная обработка зубьев закаленных измерительных конических прямозубых колес специальным алмазным инструментом // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1982. – №3. – С.101-105. **10. Антонок В.Е., Русецкий В.Н.** Возможности современных средств двухпрофильного контроля зубчатых колес // Вестник Полоцкого государственного университета. Промышленность. Прикладные науки. Технология машиностроения. – №8. – 2009. – С.101-105.

Поступила в редколлегию 18.04.2013

УДК 621.833;539.3

Возможности двухпрофильного контроля конических прямозубых колес / В.Н. Русецкий, В.Е. Антонок // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ". – 2013. – №41(1014). – С.125-129. – Бібліогр.: 10 назв.

Викладено метод двопробільного контролю для конічних коліс з прямими зубцями. Для впровадження цього методу контролю розроблені схема вимірювання та модель приладу для контролю. Описано рекомендації для впровадження двопробільного контролю в умовах масового виробництва з використанням засобів з записуючими приладами.

Ключові слова: конічне зубчасте колесо, точність, вимірювальне колесо, двопробільний контроль, метод запису.

The method of It is offered for conic wheels with direct teeth to use modern means of the two-profile control with recorders. The scheme of measuring and exemplary conic cogwheels is developed for realization of this quality monitoring. Recommendations about realization of a two-profile quality monitoring of conic transfers in the conditions of mass production are resulted.

Keywords: bevel gear, precision, measuring wheel, two-profile control, recording method.

УДК 539.3

Н.Б. СКРИПЧЕНКО, аспирант каф. ТММ и САПР НТУ "ХПИ";

Н.Н. ТКАЧУК, к.т.н., младший научный сотрудник каф. КГМ

им. А.А. Морозова НТУ "ХПИ", ун-т Стэнфорда, США;

Н.А. ТКАЧУК, д.т.н., проф., заведующий каф. ТММ и САПР НТУ "ХПИ";

Д.С. МУХИН, бакалавр комп. наук, студент каф. ТММ и САПР НТУ "ХПИ"

АНАЛИЗ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЛАДКИХ И ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Поставлена и решена задача о взаимодействии гладких и шероховатых тел. Задача сведена к граничному интегральному уравнению. Влияние шероховатости моделируется при помощи упругого основания Винклера.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, метод граничных элементов.

Введение. В конструкциях машин, оборудования и оснастки для осуществления связанных движений и усилий сопряжения традиционно применялись различные виды подвижных соединений. Однако тенденции усложнения кинематических схем, а также интенсификация условий нагружения приводят к неприменимости как известных конструктивных решений, так и методов их расчета. Для современного машиностроения характерным является широкое применение машин, в которых передача требуемых сложных видов движения и значительных рабочих усилий осуществляется посредством контакта сложнопрофильных деталей. Это, например, передача технологических усилий в штампах различного типа, закрепление и базирование заготовок при механообработке на разнообразных металлорежущих станках, передача рабочих нагрузок между зубчатыми колесами в редукто-

рах, усилия сопряжения поршней в гидрообъемных передачах, усилия опирания механизма наклона дуговых сталеплавильных печей и т.п. В силу этого между контактирующими телами возникают значительные контактные давления, во многих случаях определяющие несущую способность машиностроительных конструкций.

Кроме того, характер распределения контактных давлений обуславливает величины и картины распределения перемещений точек взаимодействующих деталей как гладких или шероховатых упругих тел. Это, в свою очередь, влияет на жесткость исследуемого узла, что влечет за собой, например, обеспечение или необеспечение точности выполнения технологической операции. Соответственно, при проектировании таких элементов машин важным является определение напряженно-деформированного состояния в сопряжении упругих деформируемых тел с учетом их контактного взаимодействия [1].

Для решения этой задачи привлекаются самые разнообразные методы: аналитические расчеты, основанные на модели Герца [2], численный метод конечных элементов (МКЭ) [3, 4]; метод граничных элементов [5]. В то же время среди методов анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел (метод Герца, МГИУ и МКЭ) нельзя выделить однозначного лидера: все применяемые методы имеют свои рамки применения, характеризуются различной степенью точности и требовательностью к затрачиваемым ресурсам, что в свою очередь, не дает возможности выделить тот или иной метод как доминирующий или универсальный. Таким образом, в ходе исследований рационально применять различные методы анализа контактного взаимодействия из некоторого доступного их множества (или их сочетание).

Дополнительным фактором, усложняющим модель контактного взаимодействия, является наличие и учет шероховатости, искажающей картину контакта тел, рассматриваемых как гладкие. Соответственно, для сложнопрофильных тел затруднительно рассчитывать на аналитические решения, и для проектных исследований в наибольшей мере подходят численные методы анализа их напряженно-деформированного состояния (НДС) с учетом контактного взаимодействия.

Целью данной работы является совершенствование численных методов определения напряженно-деформированного состояния элементов машиностроительных конструкций с учетом их контактного взаимодействия как гладких или шероховатых тел.

Постановка задачи. При исследовании контактного взаимодействия сложнопрофильных тел [6-8] возникает необходимость проведения многовариантного решения задач анализа при варьировании формы и размеров взаимодействующих тел. Конкурирующими требованиями при этом выступают оперативность и точность решения единичной задачи анализа, которые в значительной мере определяются методом, выбранным для ее решения.

В частности, рассмотрим из всего их разнообразия метод Герца и метод конечных элементов (МКЭ). Первый значительно сужает множество тел, для которых он дает приемлемую точность решения, однако позволяет проводить достаточно оперативную оценку контактных давлений и контактных площадок. Второй применим и обеспечивает высокую точность моделирования для тел конечных размеров любой формы, однако требует больших затрат времени на формирование численных моделей, особенно для контакта СПТ. Таким образом, по критериям "точность-оперативность" данные методы как бы разнесены по противоположным краям воображаемого интервала показателей "применимость-ресурсозатратность",

условно обозначая крайности возможностей по каждому из критериев. Компромиссным с этой точки зрения представляется метод граничных интегральных уравнений (МГИУ): он свободен от требований теории Герца о первоначальном точечном контакте тел и о предствлении локального зазора в сопряжении тел в виде положительно определенной квадратичной формы от координат, задающих точки общей касательной плоскости. Этим существенно расширяется множество тел, доступных для исследования их контактного взаимодействия. С другой стороны, в отличие от МКЭ, он оперирует с существенно меньшими по размерам дискретными моделями, поскольку снижает на единицу физическую размерность при постановке задачи. Таким образом, для многих случаев исследуемого контактного взаимодействия СПТ метод граничных интегральных уравнений является альтернативой методу Герца и МКЭ, сочетая преимуществами первого и второго, и будучи лишен, в значительной мере, их недостатков, а поэтому представляет интерес при решении контактных задач.

Целью проведенных и описываемых в статье разработок является модификация метода граничных интегральных уравнений для исследования контактного взаимодействия гладких и шероховатых сложнопрофильных тел, ограниченных поверхностями произвольной формы.

Кинематическая модель контакта гладких тел. При исследовании контакта гладких тел несогласованной формы [1-5] в отсутствие трения в первом приближении рассматриваются перемещения точек поверхностей и зазор между ними только в нормальном направлении. На этой основе выводятся кинематические соотношения контакта. Такое упрощение модели нормального контакта базируется на пренебрежении изменением направления векторов нормали взаимодействующих тел [1, 5-10]. Примером является теория Герца, в рамках которой нормальный зазор между поверхностями приближенно представляется квадратичной формой в локальной системе координат, связанной с точкой первоначального касания тел.

В более общем случае приходится учитывать точную форму зазора между телами, для чего вводится система координат, центр которой (точку O) традиционно располагают на линии действия прижимающей силы \mathbf{P} (рисунок 1). Оси z_1 и z_2 для удобства имеют направление вовнутрь тела (здесь и далее нижний индекс соответствует номеру тела, к которому относится обозначение). В этом случае уравнения каждой из поверхностей можно записать в виде $z_i = z_i(x, y)$, $i = 1, 2$, а зазор вычисляется соответственно как $h = h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y)$.

В деформированном состоянии под действием силы \mathbf{P} оба тела приводятся в контакт по некоторой площадке. При этом перемещение произвольной точки границы S_i каждого из тел в направлении оси z складывается из смещения δ_i , величина которого отсчитывается в направлении, обратном положительному для оси Oz_i , и отклонения u_{z_i} от первоначальной формы соответствующей поверхности (рисунок 2). Первая компонента представляет собой сближение тел и не связана с их деформированием, а вторая отвечает деформациям, вызванным действием искомого контактного давления. Такое разложение традиционно для задач о взаимодействии упругого полупространства с гладким штампом, в которых компонентами сближения δ_i являются перемещения бесконечно удаленной точки полупространства или всего жесткого штампа как абсолютно твердого тела. Данное представление вертикальных перемещений в пренебрежении поперечными тангенциальными в плоскости Oxy приводит к следующей общепринятой записи нелинейных соотношений для нормального контакта:

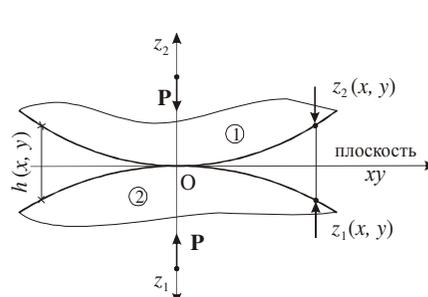


Рисунок 1 – Представление локального зазора между контактирующими телами

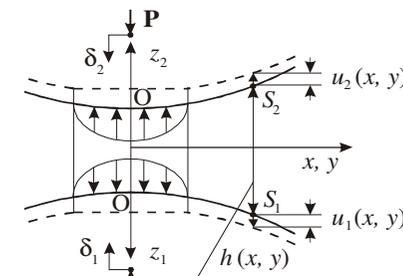


Рисунок 2 – Деформация тел и образование контактной площадки под действием нормального усилия

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \\ = \delta_1 + \delta_2, S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{в контакте;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \\ > \delta_1 + \delta_2, S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (1)$$

Модель деформирования упругого полупространства. Приведенная выше кинематическая модель контакта хорошо сочетается с моделью упругого поведения твердых тел при приложении контактного давления, основанной на том,

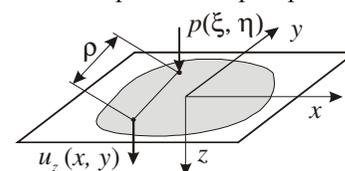


Рисунок 3 – Перемещение границы полупространства под действием нормального усилия

что перемещения точек их поверхности в зоне контакта и локальные деформации приближенно эквивалентны перемещениям и деформациям упругого полупространства под действием нормального усилия. Для упругого полупространства известно интегральное соотношение, устанавливающее связь между давлением и нормальными перемещениями точек его границы (рисунок 3) [11]:

$$u_z(x, y) = (1 - \nu^2) / \pi E \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta; \quad \rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (2)$$

Поскольку распределения контактных давлений, действующих на границу обоих взаимодействующих тел, совпадают, то в соотношениях (1) неизвестные перемещения $u_{z_1}(x, y)$ и $u_{z_2}(x, y)$ выражены исключительно через единственную функцию распределения давления \mathbf{P} , которая в дальнейшем будет искомым,

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta. \quad (3)$$

Здесь ν_i , E_i , $i = 1, 2$ – коэффициент Пуассона и модуль упругости материала каждого из контактирующих тел. Контактная площадка S и распределение давлений $p(\xi, \eta)$, присутствующие в правой части равенства, являются неизвестными и искомыми.

Прямой метод решения задач негерцевского нормального контакта упругих гладких тел состоит в том, что условия контакта записываются для конечного числа точек. В результате формируется система соотношений, позволяющая найти узловые значения контактных давлений, которые им удовлетворяют [12]. Выбор точек локализации и способ приближенной записи различных условий при этом являются довольно субъективными. Стандартной практикой является их численная проверка для серии модельных задач, поскольку для большого числа вариантов методов не существует строгого доказательства и оценок сходимости.

Использование общей сетки для пирамидальных элементов давления и узлов коллокации позволяет применить для записи соотношений метода выражения (1), согласно которым условия контакта в узлах сетки принимают вид:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ узел } J_n - \text{ в контакте;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ узел } J_n - \text{ вне зоны контакта,} \end{cases} \quad (4)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ – суммарное сближение; $h_n = h(x_n, y_n)$ – узловые значения первоначального зазора.

Другим условием является неотрицательность давлений, что накладывает на искомые узловые значения ограничения

$$p_m \geq 0, m = 1, N. \quad (5)$$

Более того, вне зоны контакта они должны быть нулевыми, так что

$$p_m = 0, J_m - \text{ вне зоны контакта.} \quad (6)$$

В условия (1) и их дискретную запись (4) входит сближение тел δ , которое в большинстве задач является неизвестным. Возникающую в связи с этим неопределенность можно исключить, добавив в систему разрешающих соотношений уравнение, в котором присутствует величина действующего прижимающего усилия P . Чаще всего бывает заданной именно оно. Это уравнение получаем интегрированием по элементам кусочно-линейно представленного давления,

$$\sum_m \sqrt{3}c^2 p_m / 2 = P. \quad (7)$$

Система соотношений (4)-(7) на практике всегда разрешается единственным образом относительно неизвестных $\{p_m\}_{m=1}^N$ и δ . При их определении наибольшей трудностью является то, что форма и размеры области контакта обычно неизвестны. Поэтому для начала необходимо сделать предположения относительно зоны контакта и того, какие узлы в нее входят. Обычно строят сетку и делают начальное предположение об области контакта таким образом, что они заведомо покрывают истинную область контакта. В ходе последующей итерационной процедуры уточняются как форма пятна контакта, так и значения контактных давлений. На каждом ее шаге имеется множество N_c , состоящее из индексов n_c узлов, предположительно входящих в контакт. Для них должны выполняться уравнения из системы (4), а также равенство (7):

$$\begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} - \delta = -h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3}c^2 p_{m_c} / 2 = P. \end{cases} \quad (8)$$

Последнее равенство в системе (8) записано с учетом условия (6): $p_m = 0, m \notin N_c$. Соотношения (8) образуют систему из (N_c+1) -го линейного алгебраического уравнения (СЛАУ) относительно такого же числа неизвестных. Ее матрица формируется из коэффициентов влияния C_{nm} и весовых множителей из равенства (7). Система (8) имеет единственное решение. Полученные с его помощью узловые значения $\{p_{m_c}\}_{m_c \in N_c}$ могут оказаться нарушающими условие (5), что будет означать, что размеры зоны контакта завышены. Индексы узлов, в которых это происходит, исключаются из множества N_c , и производится новый шаг итерации. Так происходит до тех пор, пока на некотором шаге не будет получено множество индексов N_c , для которого решение системы (8) даст неотрицательное давление в зоне контакта.

В большинстве ситуаций этот результат является окончательным. Однако он все же требует дополнительной проверки на выполнение еще одного типа условий, представленного в (4). Вне зоны контакта не должно возникать взаимного проникновения взаимодействующих тел. Если в части узлов, не вошедших в область контакта, не будут соблюдаться неравенства из (3), то их индексы придется включить во множество N_c и повторить итерационную процедуру. Однако в большинстве случаев, когда начальное приближение области контакта выбрано достаточно большим и покрывает действительное контактное пятно, подобной необходимости возобновления итерационного процесса не возникает. Варьируемая зона контакта постепенно стягивается к искомой, и проверки выполнения условия (5) оказывается достаточно. Точность результата при этом определяется размером ячейки s .

Вариационные методы решения задачи негерцевского нормального контакта. В отличие от описанного выше прямого метода, в рамках которого находится приближенное распределение контактного давления, обеспечивающего выполнение точных соотношений контакта (1) в конечном числе точек, вариационный подход основывается на слабой постановке контактной задачи. Известные результаты Фикера [13], а также Дюво и Лионса [14-15] устанавливают общий принцип, определяющий существование и единственность решения контактных задач. Он заключается в том, что действительные перемещения точек системы тел, приводимых в контакт при выполнении ряда условий, минимизируют полную энергию системы U в пространстве возможных перемещений, удовлетворяющих условию непроникновения.

Однако при использовании модели упругого полупространства, в которой имеется соотношение (2), выражающее перемещение точек границы через нормальные усилия на поверхности контактирующих тел, представляется более удобными принять в качестве варьируемой функции распределение контактных давлений. В этом случае необходимо воспользоваться отличным от вышеупомянутого вариационным принципом, предложенным Калькером. Согласно ему для истинных области контакта и давления, действующего в сопряжении тел, достигается минимум полной дополнительной работы Φ среди всех возможных неотрицательных распределений p . Вид функционала для рассматриваемой задачи и постановка задачи минимизации, ей эквивалентной, представлены ниже:

$$\left\{ \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS \rightarrow \min; p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S. \right. \quad (9)$$

Здесь S – некоторая достаточно большая область поверхности полупространства

ства (возможные распределения контактных давлений должны иметь ограниченные носители). С учетом соотношения (3) можно видеть, что минимизируемое выражение является функционалом, зависящим от одной лишь неизвестной функции давления p . Распределение давления здесь должно удовлетворять неравенству из (9) в слабом смысле.

Приближенное решение этой задачи можно найти, рассматривая значение минимизируемого функционала на конечномерном пространстве, образованном кусочно-линейными распределениями p на регулярной треугольной сетке. В этом случае S либо точно, либо приближенно совпадает с областью, покрытой сеткой. Сам функционал при этом принимает вид суммы квадратичной и линейной форм относительно узловых значений давления p_n . Способ его вычисления зависит от схемы численного интегрирования. Применяя простую квадратурную формулу с узлами, совпадающими с узлами используемой сетки,

$$\int_S f g dS = \left[(\sqrt{3}c^2)/2 \right] \sum_i f_i g_i, \quad (10)$$

можно прийти к следующей задаче квадратичного программирования, являющейся приближением (9), (10):

$$\left\{ \Phi_n \left(\{p_n\}_{n=1}^N \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm} p_n p_m + \sum_{m=1}^N p_m (h_m - \delta) \right] \rightarrow \min; p_m \geq 0, m=1, N. \quad (11) \right.$$

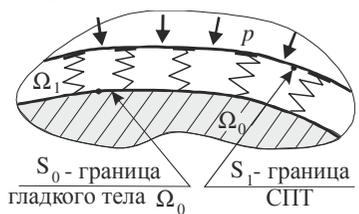
Примечательно, что узловые значения $\{p_n\}_{n=1}^N$, получаемые как решение (11), являются идентичными результату применения прямого метода и удовлетворяют условиям (4)-(6). В этом случае имеется эквивалентность не только начальных сильной и слабой постановки контактной задачи, но и приближенных методов ее решения. Однако это справедливо лишь при использовании формулы (10) для вычисления интегралов в (9), что не является обязательным.

Преимуществами вариационного подхода являются наличие условий, единственным образом определяющих форму области контакта и распределение контактных усилий; возможность применения методов квадратичного программирования. Последнее обстоятельство позволяет применять вариационную формулировку для формального оправдания применения метода коллокаций.

Модель контакта шероховатых тел. Для учета влияния шероховатости на контактное взаимодействие сложнопрофильных тел применима в первом приближении модель упругого слоя, жесткостные свойства которого эквивалентны в некотором смысле свойствам шероховатого поверхностного слоя. Тогда исследуемое тело Ω состоит из двух частей: Ω_0 – гладкое упругое тело и Ω_1 – покрывающий его шероховатый слой (рисунок 4).

При этом между перемещениями точек u_z^Σ поверхности S_1 , участвующих в описании условий контактного взаимодействия, перемещениями гладкого тела $u_z^{(0)}$ и шероховатого слоя $u_z^{(1)}$ существует зависимость

$$u_z^\Sigma = u_z^{(0)} + u_z^{(1)}. \quad (12)$$



--- - упругое гладкое тело Ω_0
 --- - шероховатый слой Ω_1
 Рисунок 4 – Модель шероховатого сложнопрофильного упругого тела

Здесь $u_z^{(0)}$ выражается через интегральное соотношение (2). Перемещение же $u_z^{(1)}$ описывается соответствующей моделью для шероховатого слоя. Из простых можно моделей выделить основание Винклера [16, 17]:

$$u_z^{(1)} = \lambda p, \quad (13)$$

где λ – податливость слоя, зависящая от свойств поверхности исследуемого тела. Модель (13) является достаточно упрощенным вариантом более адекватных и точных зависимостей (например, степенных) между перемещениями и давлениями в шероховатом слое. В то же время она вносит качественное изменение в систему взаимодействующих тел, вводя дополнительные элементы в систему. Соответственно, этим данная упрощенная модель и ценна, в связи с чем использована в дальнейших исследованиях.

Учитывая малую толщину слоя Ω_1 , в дальнейших соотношениях координаты x, y (см. рисунок 1) точек поверхностей S_0, S_1 отождествляются. В то же время в кинематических соотношениях контакта происходит замена $u_z^{(0)}$ на u_z^Σ . В силу этого все приведенные выше соотношения для описания контакта гладких тел остаются по форме такими же, за исключением внесения в матрицу коэффициентов влияния C^Σ дополнительных слагаемых, расположенных на главной ее диагонали:

$$\sum_m C_{nm}^\Sigma p_m + h_n - \delta = 0, \text{ узел } J_n \text{ – в контакте;}$$

$$\sum_m C_{nm}^\Sigma p_m + h_n - \delta > 0, \text{ узел } J_n \text{ – вне зоны контакта,}$$

где коэффициенты матрицы влияния

$$C_{nm}^\Sigma = C_{nm} + \lambda^\Sigma \delta_{nm}. \quad (15)$$

Здесь C_{nm} – коэффициенты матрицы податливости; λ^Σ – суммарная податливость шероховатых слоев в сопряжении шероховатых тел (например, для случая контакта двух шероховатых тел $\lambda^\Sigma = \lambda_1 + \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 – податливости слоев, отнесенных к соответствующим телам 1, 2; если одно из тел гладкое, то соответствующий коэффициент $\lambda_k=0$); $\delta_{nm} = \{1, \text{ если } n = m; 0, \text{ если } n \neq m\}$ – символ Кронекера.

Тогда результирующие разрешающие соотношения по структуре аналогичны соотношениям для гладких тел, однако привнесены дополнительные компоненты от специально введенного упругого основания Винклера. Эффект от введения этого слоя зависит от соотношения податливости этого слоя, моделирующего шероховатость, и гладкого упругого тела, которое этот слой покрывает. Если

$$\lambda^\Sigma \ll C_{kk}, \quad (16)$$

то результирующая матрица C^Σ состоит из матрицы C , возмущенной прибавлением малой диагональной матрицы. Следует ожидать, что при этом и распределение контактных давлений, и перемещений будет слабо отличаться от решения для гладких тел. Если отвлечься от влияния изменения области актуального контакта при изменении λ , то матрица C , которая участвует в формировании разрешающих соотношений, может быть представлена в виде

$$C^\Sigma = C + \lambda E, \quad (17)$$

где E – единичная матрица. Прибавление положительных слагаемых к диагональным элементам матрицы улучшает сходимость применяемых прямых или итерационных методов решения разрешающей системы уравнений.

Что касается остальных разрешающих соотношений (т. е. условия неотрицательных узловых контактных давлений и равенство их суммы интегральному усилию, прикладываемому к взаимодействующим телам), то они остаются такими же, как и для случая контакта гладких тел.

Общая система уравнений для точек в зоне контакта из уравнения (8):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c}^\Sigma p_{m_c} - \delta = -h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3} c^2 p_{m_c} / 2 = P. \end{array} \right. \quad (18)$$

Для точек внутри области контакта, как отмечалось, остаются справедливыми соотношения (18), а для точек вне области контакта – (6) и второе из соотношений (14). Аналогичной случаю контакта гладких тел остается и процедура итерационного уточнения области контакта и распределения контактных давлений.

Заключение. Анализ полученных результатов дает основание для следующих выводов.

1. В работе описан новый вариант метода граничных интегральных уравнений, модифицированный для моделирования контактного взаимодействия сложнопрофильных тел. Он отличается от традиционных формулировок точным вычислением матрицы и правых частей разрешающей системы линейных алгебраических уравнений, ускоренными способами вычисления и экономным хранением коэффициентов матрицы влияния за счет использования свойств симметрии и регулярности сетки дискретизации.

2. Для поиска области контактного взаимодействия предложена итерационная процедура ее уточнения путем пошагового удовлетворения искомыми контактными давлениями системы разрешающих уравнений и неравенств.

3. Для учета влияния шероховатости на контактное взаимодействие упругих тел предлагается вводить на поверхности тела упругое основание Винклера с характеристиками податливости, соответствующими свойствам поверхностного слоя реальных шероховатых тел.

4. Разрешающие соотношения для анализа контактного взаимодействия шероховатых тел аналогичны таковым для случая контакта гладких тел, за исключением введения в матрицу влияния дополнительных диагональных членов, пропорциональных податливости винклерова слоя, моделирующего шероховатость.

В комплексе предложенные подходы и соотношения составляют теоретическую основу для решения задач исследования контактного взаимодействия гладких и шероховатых сложнопрофильных упругих тел. В дальнейшем планируется провести численную реализацию построенной математической модели и применить описанные разработки для решения ряда прикладных задач.

Список литературы: 1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510с. 2. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz // J. Reine Angew. Math. – 1881. – Vol.92. – S.156-171. 3. Стрэнг Э., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349с. 4. Francavilla A. A note on numerical computation of elastic contact problems / A. Francavilla, O.C. Zienkiewicz // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1975. – Vol.9. – P.913-924. 5. Ткачук

Н.Н. Анализ контактного взаимодействия сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями: дисс...канд.техн.наук: спец. 05.02.09. – Харьков, 2011. – 203с. 6. Ткачук А.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А. Термоупругие контактные задачи для элементов штампов и пресс-форм // КШП. ОМД. – М.: ООО "Тисо Принт", 2009. – №12. – С.25-32. 7. Ткачук А.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А. Термоупругие контактные задачи для элементов штампов и пресс-форм (продолжение) // КШП. ОМД. – М.: ООО "Тисо Принт", 2012. – №1. – С.19-28. 8. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Моделирование контактного взаимодействия плоского штампа с полупространством // Кузнечно-штамповочное производство. – 2012. – №10. – С.11-17. 9. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 303с. 10. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. – М.: Физматлит, 2004. – 304с. 11. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1988. – 712с. 12. Васильев К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542с. 13. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости / Г. Фикера. – М.: Мир, 1974. – 159с. 14. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 383с. 15. Киндерлерер Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. – М.: Мир, 1983. – 256с. 16. Реуцетов Д.Н., Портман В.Т. Точность металлорежущих станков. – М.: Машиностроение, 1986. – 336с. 17. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. – М.: Наука, 1970. – 228с.

Поступила в редколлегию 30.04.2013

УДК 539.3

Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов / Н.Б. Скрипченко, Н.Н. Ткачук, Н.А. Ткачук, Д.С. Мухин // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ". – 2013. – №41(1014). – С.129-138. – Бібліогр.: 17 назв.

Поставлена і вирішена задача про взаємодію гладких та шерстких тіл. Задача зведена до граничного інтегрального рівняння. Вплив шерсткості моделюється за допомогою пружної основи Вінклера.

Ключові слова: контактна взаємодія, метод граничних елементів.

The problem of the interaction of smooth and roughness bodies was formulated and solved. The problem is calculated by boundary integral equation. The effect of roughness is modeled by Winkler elastic foundation.

Keywords: contact interaction, boundary element method.

УДК 621.833

В.Н. СТРЕЛЬНИКОВ, д.т.н., проф., главный инженер проекта ПАО "НКМЗ", Краматорск;
Г.С. СУКОВ, к.э.н., генеральный директор ПАО "НКМЗ";
М.Г. СУКОВ, заместитель директора ПМ и ШПО ПАО "НКМЗ"

УСТРАНЕНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ЗУБЬЕВ В КРУПНОЙ ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧЕ

Представлены наиболее актуальные вопросы повышения нагрузочной способности волновых зубчатых передач применительно к тяжелому машиностроению. При передаче больших по величине вращающих моментов и малом модуле зубьев, деформации гибкого колеса выходят далеко за пределы установленных зазоров в зубчатом зацеплении с малым модулем зубьев. Это приводит к негативным явлениям, таким как интерференция, заклинивание и проскок зубьев в зацеплении, активизирующимся с повышением нагрузки. Выполненные исследования позволили устранить интерференцию, заклинивание и проскок зубьев в зацеплении крупных волновых передач и многократно повысить их нагрузочную способность.

Ключевые слова: волновая передача, интерференция, проскок, заклинивание зубьев.

Введение. Ограниченная жесткость гибкого колеса, является основной причиной позиционных отклонений зубьев под нагрузкой. При больших крутящих моментах величина отклонений, как правило, превышает зазоры в зубчатом зацеплении волновой передачи, вызывая интерференцию зубьев. Пред-

© В.М. Стрельников, Г.С. Суков, М.Г. Суков, 2013