

**С.В. ШИЛЬКО**, к.т.н., доц., заведующий лабораторией ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель;  
**В.Е. СТАРЖИНСКИЙ**, д.т.н., доц., главный научный сотрудник ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси;  
**Е.М. ПЕТРОКОВЕЦ**, научный сотрудник ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси

### АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА МАТЕРИАЛА НА ДЕФОРМАТИВНОСТЬ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

С использованием конечноэлементной аппроксимации анализируется напряженно-деформированное состояние прямозубчатого цилиндрического зубчатого колеса из низкомолекулярного композиционного материала в различных фазах зацепления с металлической шестерней. В частности, сопоставлены значения упругих перемещений зуба и коэффициента перекрытия при контактировании в плоской зоне и вершине зуба. Установлена нелинейная зависимость соотношения изгибной и контактной жесткости зуба от коэффициента Пуассона  $\nu$  и показано существенное увеличение жесткости в области отрицательных значений  $\nu$ , характерных для ауксетичных материалов.

**Ключевые слова:** зубчатые передачи, контактная и изгибная жесткость, коэффициент перекрытия, полимерные композиты, коэффициент Пуассона, ауксетики, метод конечных элементов.

**Введение.** Демпфирующие характеристики полимерных зубчатых колес во многом обусловлены низким, в пределах 10 ГПа, модулем упругости используемых в передачах конструкционных пластиков (текстолита, угле- и стеклонанополненных полиамидов и т.д.), что способствует снижению динамических усилий. Однако характерная для полимерных зубчатых колес повышенная изгибная и контактная податливость зубьев является источником кинематической погрешности передачи. При проектировании композитных зубчатых колес, в отличие от металлических (упругие характеристики которых могут регулироваться геометрической коррекцией либо термообработкой в относительно узком интервале значений), следует использовать широкие возможности оптимизации деформационных характеристик композитных колес путем изменения структуры материала, например, содержания армирующего наполнителя при неизменной геометрии зубьев.

Так, методы композиционного материаловедения позволяют получить материалы с аномально низкими (отрицательными) значениями коэффициента Пуассона  $\nu < 0$ , называемые ауксетиками [1]. Эти материалы демонстрируют значительное сопротивление сдвиговым деформациям, что может быть использовано для повышения формостабильности зубчатых колес при передаче нагрузки.

Цель настоящей работы – установление зависимостей изгибной и контактной жесткости зуба от коэффициента Пуассона в теоретически допустимом интервале значений данного параметра для изотропного материала.

**Метод и результаты исследования.** Для анализа напряженно-деформированного состояния цилиндрической металлополимерной зубчатой передачи с модулем зацепления  $m=3,5$  мм в предположении ее плоского деформированного состояния, рассматривали сопряжение фрагмента (одиночного зуба) полимерного колеса и жесткого кругового цилиндра эквивалентного радиуса  $R=2,3$  мм, моделирующего металлическую шестерню. К цилиндру прикладывалось усилие  $F=10$  Н/см по нормали к эвольвентному профилю зуба с координатами, приведенными в работах [2, 3].

© С.В. Шилько, В.Е. Старжинский, Е.М. Петроковец, 2013

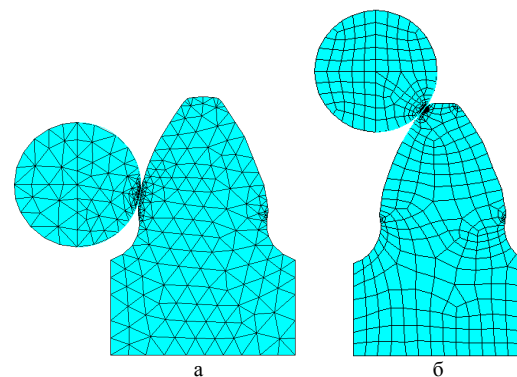


Рисунок 1 – Конечноэлементное моделирование зубчатого зацепления при контактировании:  
 а – в плоскую зону зацепления; б – на вершине зуба

2, 3). С целью выделения компонент контактной и изгибной жесткости зуба, расчет выполнялся для двух вариантов его закрепления. При закреплении нижнего края, перемещения  $u_x$  и  $u_y$  определялись в полной мере контактными и изгибными деформациями (рисунок 2, 3в). Дополнительным закреплением указанного фрагмента по правому боковому контуру зуба минимизировался фактор изгиба; в этом случае перемещения были обусловлены практически только контактными деформациями (рисунок 2, 3г).

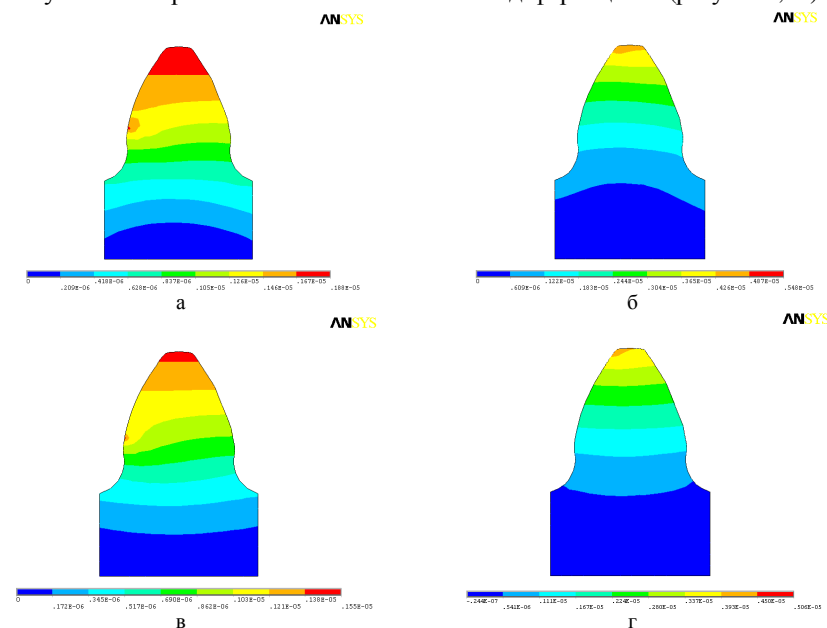


Рисунок 2 – Поле перемещений  $u_x$ :  
 контактирование в плоскую зону зацепления, а, на вершине зуба, б, при коэффициенте Пуассона  $\nu=0,4$ ;  
 контактирование в плоскую зону зацепления, в, на вершине зуба, г, для коэффициента Пуассона  $\nu=-0,4$

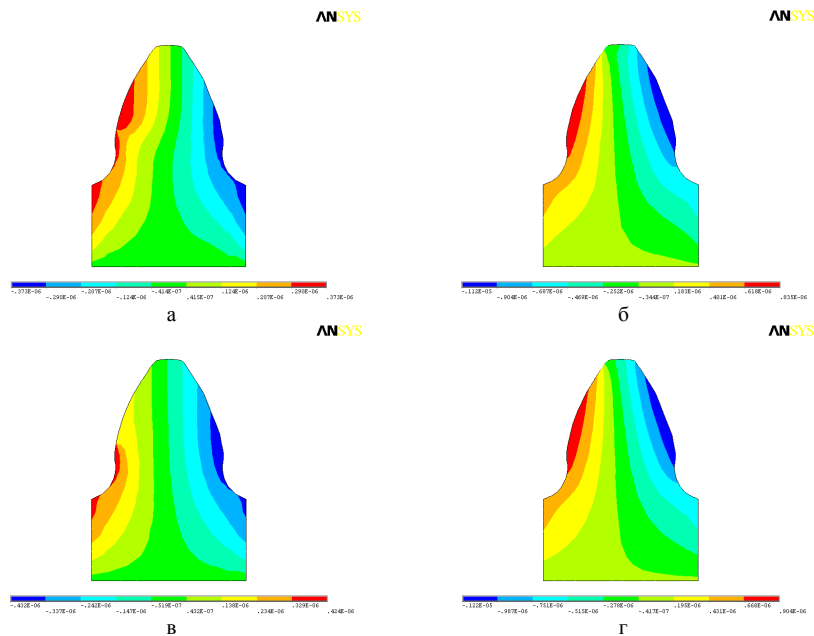


Рисунок 3 – Поле перемещений  $u_y$ :

контактирование в полюсе зацепления, а, на вершине зуба, б, при коэффициенте Пуассона  $\nu=0,4$ ; контактирование в полюсе зацепления, в, на вершине зуба, г, для коэффициента Пуассона  $\nu=-0,4$

В таблице приведены максимальные значения вышеуказанных компонент перемещений, а также их отношение  $\Delta$  для контакта в зоне полюса и вершины при варьировании коэффициента Пуассона.

Таблица – Соотношение контактной и изгибной жесткости зуба в зависимости от способа его закрепления и коэффициента Пуассона  $\nu$  (закрепление по правому боковому контуру зуба отмечено знаком \*)

Параметр	Зона контакта								
	Полюс зацепления			Вершина зуба					
$\nu$	0,4	-0,4	-0,9	0,4	0,4*	-0,4	-0,4*	-0,9	-0,9*
$u_x$ , мкм	1,9	1,6	0,33	5,48	1,25	5,06	1,26	1,11	0,29
$u_y$ , мкм	0,37	0,42	0,095	0,84	-0,99	0,90	-1,01	0,20	-0,23

Уменьшение изгибных (в большей мере) и контактных перемещений по мере снижения коэффициента Пуассона (в особенности, при значениях  $\nu < -0,4$ ) свидетельствует о существенном увеличении жесткости зуба (рисунки 4, 5).

На практике важна оценка влияния податливости зубьев на коэффициент перекрытия передачи (впервые этот вопрос изучался в работе [4] при решении задачи о распределении нагрузки между одновременно зацепляющимися зубьями).

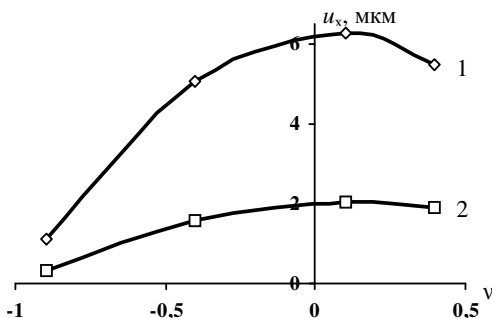


Рисунок 4 – Зависимость перемещений по оси  $x$  от коэффициента Пуассона  $\nu$ : 1 – вершина зуба; 2 – полюс зацепления

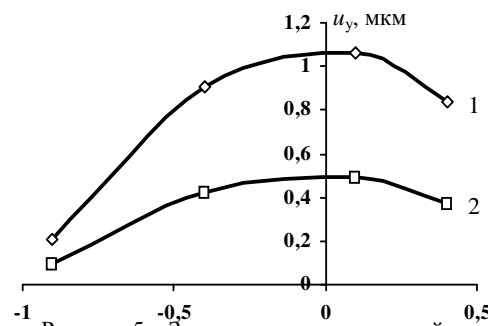


Рисунок 5 – Зависимость перемещений по оси  $y$  от коэффициента Пуассона  $\nu$ : 1 – вершина зуба; 2 – полюс зацепления

Фактический (реальный) коэффициент торцового перекрытия  $\epsilon_{\alpha r}$ , определяемый с учетом упругих перемещений зубьев,

$$\epsilon_{\alpha r} = \epsilon_{\alpha} + \Delta\epsilon_{\alpha} \quad (1)$$

состоит из теоретического коэффициента перекрытия  $\epsilon_{\alpha}$ , реализуемого в случае абсолютно жестких зубьев, и приращения коэффициента перекрытия  $\Delta\epsilon_{\alpha}$ , обусловленного упругими перемещениями [5, 6]:

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{z_1}{2\pi} \phi_1; \quad (2) \quad \Delta\epsilon_{\alpha} = \frac{z_1}{2\pi} (\phi_1' + \phi_2'), \quad (3)$$

где  $\phi_1$  – угол перекрытия на шестерне без учета влияния перемещений;  $\phi_1'$  – дополнительный угол перекрытия на шестерне при входе в зацепление;  $\phi_1''$  – то же при выходе из зацепления.

В работе [5] даны приближенные выражения для определения дополнительных углов перекрытия:

$$\phi_1' = \sqrt{2\delta_{v2} / \rho_{a1}(1 + \rho_{a1} / \rho_{p2})}; \quad \phi_2' = \sqrt{2\delta_{u2} / \rho_{a2}(1 + \rho_{a2} / \rho_{p1})} - \delta_{u2} / r_{b1}, \quad (4)$$

где  $\delta_{v2}$ ,  $\delta_{u2}$  – перемещения зубьев в точках  $v_2$  и  $u_2$ ;  $\rho_{a1(2)}$ ,  $\rho_{p1(2)}$  – радиусы кривизны зубьев в точках  $a_{1(2)}$ ,  $p_{1(2)}$ . Для нашего случая при  $u=1$  имеем:

$$\phi_1' = \sqrt{2\delta_v / \rho_a(1 + \rho_a / \rho_p)}; \quad \phi_2' = \sqrt{2\delta_u / \rho_a(1 + \rho_a / \rho_p)} - \delta_u / r_b, \quad (5)$$

где  $\rho_a$  и  $\rho_p$  – радиусы кривизны профиля в точках начала (на вершине зуба) и конца (на ножке зуба) активной линии зацепления соответственно;  $\delta_u$  и  $\delta_v$  – перемещения зуба соответственно в точках начала ( $u$ ) и конца ( $v$ ) зоны однопарного зацепления.

На рисунке 6 показано приращение коэффициента перекрытия  $\Delta\epsilon_{\alpha}$ , найденное по формулам (3) и (5); его изменение при уменьшении коэффициента Пуассона аналогично зависимостям перемещений  $u_x(\nu)$  и  $u_y(\nu)$  (рисунки 4, 5), рассчитанным методом конечных элементов.

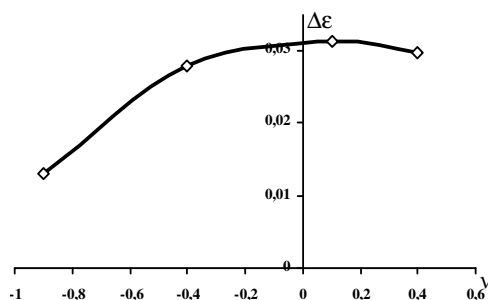


Рисунок 6 – Зависимость приращения коэффициента перекрытия от коэффициента Пуассона

**Заключение.** На примере прямоугольного цилиндрического зубчатого колеса показана возможность регулирования в широких пределах контактной и изгибной жесткости зубьев путем изменения коэффициента Пуассона материала. Для нагружения зуба в двух различных зонах зацепления (полюсной зоне и вершине) установлены нелинейные зависимости соотношения изгибной и контактной жесткости зубьев при варьировании коэффициента Пуассона. Установлена нелинейная зависимость указанного соотношения от коэффициента Пуассона и показано существ-

венное увеличение изгибной и контактной жесткости зуба с уменьшением коэффициента Пуассона в области его отрицательных значений, в особенности, при  $\nu < -0,4$ .

**Список литературы:** 1. Плескачевский Ю.М., Шилько С.В. Ауксетики: модели и приложения // Весті Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2003. – №4. – С.26-36. 2. Старжинский В.Е., Шалобаев Е.В., Шилько С.В. и др. Элементы привода приборов. Расчет, конструирование, технологии / Под общ. ред. Ю.М. Плескачевского. – Минск: Беларуская навука, 2012. – 784с. 3. Шилько С.В., Старжинский В.Е., Петроковец Е.М., Черноус Д.А. Двухуровневый метод расчета на прочность и деформативность зубчатых колес из дисперсно-армированных композитов // Вісник Національного Технічного університету "ХПІ": Збірник наукових праць. Серія "Проблеми механічного приводу". – Харків: НТУ "ХПІ", 2012. – №35. – С.173-178. 4. Андожский В.Д. Упругие деформации зубьев цилиндрических колес // В кн.: Зубчатые зацепления / Под ред. Х.Ф. Кетова. – М.-Л.: Машгиз, 1947. – С.149-215. 5. Шандалов К.С. Влияние податливости зубьев на коэффициент перекрытия передачи // В кн.: Зубчатые и червячные передачи / Под ред. Н.И. Колчина. – Л.: Машиностроение, 1968. – С.90-101. 6. Muller R. Maschinenteile aus Kunststoff. – Ausbau, 1972. – №8. – S.491-501.

Поступила в редколлегию 08.04.2013

УДК 539.3: 621.897

**Анализ влияния коэффициента пуассона материала на деформативность зубчатых колес / С.В. Шилько, В.Е. Старжинский, Е.М. Петроковец** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ". – 2013. – №41(1014). – С.177-181. – Бібліогр.: 6 назв.

З використанням скінченноелементної апроксимації аналізується напружено-деформований стан прямозубого циліндричного зубчастого колеса з низькомодульного композиційного матеріалу в різних фазах зачеплення з металевою шестернею. Зокрема, зіставлені значення пружних переміщень зуба і коефіцієнта перекриття при контактуванні в полюсній зоні і вершині зуба. Встановлена нелінійна залежність співвідношення згинальної і контактною жорсткості зуба від коефіцієнта Пуассона  $\nu$  і показано істотне збільшення жорсткості у області негативних значень  $\nu$ , характерних для ауксетичних матеріалів.

**Ключові слова:** зубчасті передачі, контактна і згина жорсткість, коефіцієнт перекриття, полімерні композити, коефіцієнт Пуассона, ауксетіки, метод кінцевих елементів.

Stress-strain state of straight spur gear made of low modular composite in different phases of meshing with metal pinion is analyzed by finite-element approximation. Particularly, values of tooth elastic displacements and contact ratio at contact in the pole zone and tooth top were compared. The nonlinear dependences of a ratio between contact and bending stiffness on Poisson's ratio  $\nu$  were established. Significant increase of the stiffness was shown in the area of negative value  $\nu$  being typical for auxetic materials.

**Keywords:** gears, contact and bending stiffness, contact ratio, polymeric composites, Poisson's ratio, auxetics, finite element method.

УДК 621.833

**В.П. ШИШОВ**, д.т.н., профессор каф. машиноведения  
ВНУ им. В. Даля, Луганск;

**П.Н. ТКАЧ**, к.т.н., доцент каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля;

**Е.Ю. ЧАЛАЯ**, ассистент каф. прикладной математики ВНУ им. В. Даля;

**Т.Е. ЖУРАВЛЕВА**, аспирант каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля

#### **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИНТЕЗА ГЕОМЕТРИИ АРОЧНЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ СМЕШАННОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ**

В статье приведены основные геометро-кинематические критерии для оценки качества арочного зацепления, зубья колес которого образованы несимметричным исходным контуром. Получены дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубчатых передач смешанного зацепления по указанным геометро-кинематическим критериям работоспособности для головки и ножки зуба.

**Ключевые слова:** арочная зубчатая передача, синтез геометрии зуба, критерии работоспособности, смешанное зацепление.

© В.П. Шишов, П.М. Ткач, О.Ю. Чала, Т.Е. Журавлева, 2013