

348с. 7. *Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике. Том 2. – М.: Мир, 1986. – 320с.
8. *Кіндрацький Б.І.* Багатокритеріальний структурно-параметричний синтез машинобудівних конструкцій: дис...докт.техн.наук. – Львів: Львівська політехніка, 2004. – 392с. 9. *Кіндрацький Б., Сулим Г.* Сучасний стан і проблеми багатокритеріального синтезу машинобудівних конструкцій (огляд) // *Машинознавство*. – 2002. – № 10. – С.26-40. 10. *Кіндрацький Б.І.* Концепція і алгоритм багатокритеріального структурно-параметричного синтезу машинобудівних конструкцій // *Вісник ТДТУ імені Івана Пулюя*. – 2003. – Том 8. – № 1. – С.73-82. 11. *Кіндрацький Б.І.* Концепція і алгоритм ієрархічного багатокритеріального структурно-параметричного синтезу машинобудівних конструкцій / В кн.: *Zagadnienia dydaktyczne w środowisku systemów technologicznych*. – Lublin: Lubelskie Towarzystwo Naukowe, 2003. – С.113-116. 12. <http://www.ansys.com>. 13. <http://www.mscsoftware.com>. 14. *Веретельник Ю.В., Миргородский Ю.Я., Пелешко Е.В., Ткачук Н.А.* Параметрические модели элементов сложных систем как основа построения специализированных расчетных систем // *Механіка та машинобудування*. – Харків: НТУ "ХПІ", 2003. – №1, т.2. – С.3-7. 15. *Ткачук Н.А., Грищенко Г.Д., Чепурной А.Д., Орлов Е.А., Ткачук Н.Н.* Конечно-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания // *Механіка та машинобудування*. – 2006. – №1. – С.57-79. 16. *Танченко А.Ю.* Влияние толщины панелей на спектр собственных частот колебаний корпусов транспортных средств специального назначения // *Вісник НТУ "ХПІ"*. Серия *Машинознавство та САПР*. – 2013. – №1(975). – С.138-145. 17. *Ткачук Н.А., Литвиненко А.В., Костенко Ю.В., Танченко А.Ю., Грабовский А. В.* Линеаризация функции отклика прочностных и динамических характеристик тонкостенных конструкции на изменение толщины // *Вісник НТУ "ХПІ"*. Серия *Транспортне машинобудування*. – 2014. – № 14(1057). – С.138-154. 18. *Танченко А.Ю.* Динамические и прочностные характеристики тонкостенных элементов машиностроительных конструкций при уменьшении толщины в процессе эксплуатации / *А.Ю. Танченко, Н.А. Ткачук, И.В. Артемов, А.В. Литвиненко* // *Актуальные вопросы машиностроения: сб. науч. тр. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; редкол.: А.А. Дюжев [и др.]*. – 2013. – Вып.2. – С.210-213. 19. *Ткачук Н.А.* Чувствительность прочностных и жесткостных характеристик тонкостенных элементов машиностроительных конструкций к неравномерному изменению толщины / *Н.А. Ткачук, А.В. Литвиненко, А.В. Грабовский* // *Вісник СевНТУ. Збірник наукових праць. Випуск 137/2013. Серія: Механіка, енергетика, екологія*. – 2013. – С.187-191. 20. *Zienkiewicz O.C.* The Finite Element Method. Vol. 1: Basic Formulation and Linear Problems / *O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor*. – London: Mc Graw-Hill, 1989. – 648p. 21. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики / *Г.И. Марчук*. – М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1980. – 536с. 22. *Гузь А.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред / *А.Н. Гузь, Ю.Н. Немчиш*. – К.: Вища шк., 1989. – 352с. 23. *Штейнвольф Л.И.* Динамические расчеты машин и механизмов. М.-К.: МАШГИЗ, 1961. – 340с. 24. *Симсон Э.А.* Методика анализа чувствительности вибрационных параметров механических систем / *Э.А. Симсон, С.А. Назаренко, М.В. Трохиман* // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. – 2/4(32). – 2008. 25. *Голоскоков Е.Г.* Нестационарные колебания механических систем / *Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов*. – К.: Наукова думка, 1966. – 335с. 26. *Гринев В.Б.* Оптимизация стержней по спектру собственных значений / *В.Б. Гринев, А.П. Филиппов*. – К.: Наукова думка, 1979. – 211с. 27. *Катманов В.Г.* Математическое программирование – М.: Наука, 1975. – 272с.; 6-е изд. – Физматлит, 2008. – 263с.

Поступила (received) 21.01.2014

УДК 681.12.08:534.09

А.В. МАМОНТОВ, старший преподаватель каф. ОТ ХНУРЭ, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ СПОСОБА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИЧЕСКОЙ НЕУРАВНОВЕШЕННОСТИ РОТОРОВ

Рассматривается новый способ измерения статической неуравновешенности роторов. Выводятся формулы для расчета угла и величины дисбаланса. Расчет основан на предварительном измерении частот свободных колебаний ротора, установленного на маятниковую раму.

Ключевые слова: балансировка, дисбаланс, ротор, маятниковая рама, свободные колебания.

Введение. Актуальность задачи. Одной из важных технологических задач в машиностроении остается уравнивание роторов (балансировка) различных машин и механизмов.

Не смотря на значительные достижения науки и техники в этой области, проблема по-прежнему остается *актуальной*, так существующие способы и

средства уравнивания роторов имеют определенные недостатки. Они связаны тем, что на точность измерения неуравновешенности влияют различные факторы, которые более подробно описаны ниже.

В данной статье рассматривается авторский способ определения статической неуравновешенности роторов, в котором часть вышеупомянутых факторов исключена, а остальная их часть значительно снижена.

Анализ последних исследований и литературы. Наиболее распространенные методы измерения неуравновешенностей роторов основаны на измерении вынужденных колебаний, возникающих при их вращении, соответственно, на дорезонансном, резонансном и зарезонансном станках [1-3]. Однако всем этим методам и соответствующему оборудованию присущи характерные недостатки.

На дорезонансном станке измеряются динамические нагрузки (силы) на опоры ротора. Точность измерения резко зависит от скорости вращения ротора, сил трения в его опорах, жесткости основания станка и внешних помех. Для минимизации инструментальной погрешности станка требуется его периодическая калибровка эталонными роторами.

На резонансном станке измеряется амплитуда вынужденных колебаний, зависящая от трения в системе. Кроме того, требуется постоянство частоты вращения, влияющее на точность измерения неуравновешенности.

На зарезонансном станке измеряется амплитуда вынужденных колебаний в податливых (мягких) опорах, которая также зависит от трения. Требуется калибровка станка для каждого типа ротора, а в отдельных случаях, для каждого ротора.

Также известны способ и устройства для определения статической неуравновешенности роторов [4-8], разработчиком которых является автор данной статьи (в соавторстве). Способ основан на измерении собственных частот свободных колебаний ротора, установленного на маятниковую раму, с последующим расчетом величины дисбаланса и его угла. В отличие от традиционных способов измерения статической неуравновешенности роторов данный способ обладает меньшим влиянием трения в опорах и внешних помех на измеряемые величины, благодаря чему обладает меньшей погрешностью.

Цель статьи. Для практической реализации данного способа необходимо его математическое обоснование, свидетельствующее об адекватности математических формул [4] и возможности их применения. Именно оно и является целью статьи.

Постановка задачи. Статическая неуравновешенность ротора характеризуется величиной дисбаланса и его угла, которые, согласно данному способу, должны вычисляться по измеренным частотам свободных колебаний маятниковой рамы. Для вывода формул необходимо составить математическую модель колебательной системы "маятниковая рама-ротор" на основе уравнения Лагранжа 2-го рода. Вывод формул должен быть осуществлен на основе решения систем уравнений движения, соответствующих различным положениям ротора в раме.

Материалы исследования. Упрощенная схема устройства с исследуемым ротором показана на рисунке 1. Оно представляет собой механическую колебательную систему маятникового типа. Неуравновешенный ротор 1 установлен на маятниковой раме 2 с возможностью поворота вокруг своей оси и фиксации в четырех положениях, отличающихся друг от друга поворотом ротора на 90°. Рама 2 подпружинена упругим элементом 3. Ротор 1 имеет неуравновешенную массу 4, являющуюся причиной дисбаланса.

Определение дисбаланса и его угла делается расчетным путем с помощью частот свободных колебаний системы, измеренных в четырех положениях ротора А, В, С и D,

© А.В. Мамонтов, 2014

получаемых при его повороте вокруг своей оси на 90° .

Колебательная система имеет одну степень свободы. Обобщенной координатой является угол поворота ϕ рамы 2 относительно вертикальной оси О. Система находится под действием консервативной силы – силы упругости. Для получения уравнения качания маятника воспользуемся уравнением Лагранжа 2-го рода, которое имеет вид [2, 9, 10]

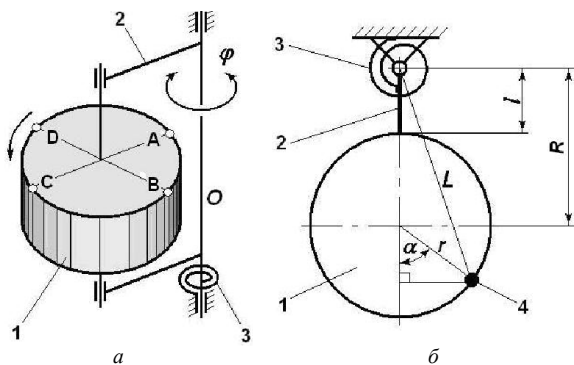


Рисунок 1 – Упрощенная схема устройства:
а – общий вид; б – вид сверху

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \phi}, \quad (1)$$

где T и Π – кинетическая и потенциальная энергии, соответственно; ϕ и $\dot{\phi}$ – обобщенная координата и обобщенная скорость, соответственно.

Кинетическая энергия системы T равна сумме кинетических энергий ротора 1 (T_{POT}), неуравновешенной массы 4 (T_{HEVP}) и рамы 2 (T_{CT}).

Для простоты далее будем рассматривать раму 2 в качестве стержня, а ротор 1 в качестве диска (см. рисунок 1,а).

Кинетическая энергия стержня равна [9]

$$T_{CT} = \frac{1}{2} J_{CT} \omega^2, \quad (2)$$

где J_{CT} – момент инерции стержня относительно оси О, ω – угловая скорость.

Кинетическая энергия ротора (диска)

$$T_{POT} = \frac{1}{2} J_{POT} \omega^2, \quad (3)$$

где J_{POT} – момент инерции ротора относительно своей оси.

Кинетическая энергия неуравновешенной массы 4 относительно оси О.

$$T_{HEVP} = m_{HEVP} L^2 \omega^2, \quad (4)$$

где m_{HEVP} – величина неуравновешенной массы; L – расстояние от центра неуравновешенной массы 4 до оси О.

По теореме Пифагора (см. рисунок 1,а) найдем квадрат величины L и подставим в (4).

$$L^2 = (l+r+r \cos \alpha)^2 + r^2 \sin^2 \alpha; \quad (5)$$

$$T_{HEVP} = m_{HEVP} \omega^2 [(l+r+r \cos \alpha)^2 + r^2 \sin^2 \alpha] = m_{HEVP} \omega^2 [l^2 + 2r(1+\cos \alpha)(l+r)]. \quad (6)$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T_{CT} + T_{POT} + T_{HEVP} = \frac{1}{2} J_{CT} \omega^2 + \frac{1}{2} J_{POT} \omega^2 + m_{HEVP} \omega^2 [l^2 + 2r(1+\cos \alpha)(l+r)] =$$

$$= \left[\frac{1}{2} (J_{CT} + J_{POT}) + m_{HEVP} [l^2 + 2r(1+\cos \alpha)(l+r)] \right] \dot{\phi}^2. \quad (7)$$

Найдем частные производные для подстановки в уравнение (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = 0; \quad (8) \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 2 \left[\frac{1}{2} (J_{CT} + J_{POT}) + m_{HEVP} [l^2 + 2r(1+\cos \alpha)(l+r)] \right] \dot{\phi}; \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = 2 \left[\frac{1}{2} (J_{CT} + J_{POT}) + m_{HEVP} [l^2 + 2r(1+\cos \alpha)(l+r)] \right] \ddot{\phi}; \quad (10) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = 2G\phi, \quad (11)$$

где Π – потенциальная энергия системы; G – коэффициент жесткости упругого элемента 3;

$$\Pi = G\phi^2. \quad (12)$$

Подставив выражения (8...11) в выражение (1), получим уравнение движения колебательной системы, представляющее собой однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\left[\frac{1}{2} (J_{CT} + J_{POT}) + m_{HEVP} [l^2 + 2r(1+\cos \alpha)(l+r)] \right] \ddot{\phi} = -G\phi. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно записать в общем виде [10]

$$a\ddot{\phi} + c\phi = 0, \quad (14)$$

откуда квадрат циклической частоты равен

$$k_A^2 = \frac{c}{a} = - \frac{G}{\frac{1}{2} (J_{CT} + J_{POT}) + m_{HEVP} [l^2 + 2r(1+\cos \alpha)(l+r)]}. \quad (15)$$

Выражение (15) соответствует начальному положению ротора 1 относительно рамы 2, при котором условная точка А находится вблизи оси О (см. рисунок 1,а). Запишем уравнение (15) для остальных положений ротора, если бы на месте точки А оказались точки (В; С и D). Эти положения соответствуют углам $\alpha+90^\circ$; $\alpha+180^\circ$ и $\alpha+270^\circ$.

$$k_B^2 = - \frac{G}{\frac{1}{2} (J_{CT} + J_{POT}) + m_{HEVP} [l^2 + 2r(1+\cos(\alpha+90^\circ))(l+r)]}; \quad (16)$$

$$k_C^2 = - \frac{G}{\frac{1}{2} (J_{CT} + J_{POT}) + m_{HEVP} [l^2 + 2r(1+\cos(\alpha+180^\circ))(l+r)]}; \quad (17)$$

$$k_D^2 = - \frac{G}{\frac{1}{2} (J_{CT} + J_{POT}) + m_{HEVP} [l^2 + 2r(1+\cos(\alpha+270^\circ))(l+r)]}. \quad (18)$$

Решим уравнения (15...18) совместно. Вычитая левые и правые части уравнений (15) и (17), получим

$$-G \left(\frac{1}{k_A^2} - \frac{1}{k_C^2} \right) = 4m_{HEVP} r \cos \alpha (l+r). \quad (19)$$

Вычитая левые и правые части уравнений (16) и (18), получим

$$-G \left(\frac{1}{k_B^2} - \frac{1}{k_D^2} \right) = -4m_{\text{НЕВР}} r \sin \alpha (l+r). \quad (20)$$

Разделив левые и правые части уравнений (19) и (20) друг на друга, получим тангенс угла дисбаланса

$$\frac{\frac{1}{k_B^2} - \frac{1}{k_D^2}}{\frac{1}{k_A^2} - \frac{1}{k_C^2}} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (21)$$

Отсюда угол равен

$$\alpha = -\operatorname{arctg} \left[\frac{\frac{1}{k_B^2} - \frac{1}{k_D^2}}{\frac{1}{k_A^2} - \frac{1}{k_C^2}} \right]. \quad (22)$$

Возведем в квадрат и сложим левые и правые части уравнений (19) и (20):

$$G^2 \left[\left(\frac{1}{k_A^2} - \frac{1}{k_C^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{k_B^2} - \frac{1}{k_D^2} \right)^2 \right] = 16m_{\text{НЕВР}}^2 r^2 (l+r)^2 = 16m_{\text{НЕВР}}^2 r^2 R^2. \quad (23)$$

Величина дисбаланса равна

$$D = m_{\text{НЕВР}} r = \frac{G}{4R} \sqrt{\left(\frac{1}{k_A^2} - \frac{1}{k_C^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{k_B^2} - \frac{1}{k_D^2} \right)^2}. \quad (24)$$

Переходя от циклической частоты k к частоте колебаний ν (Гц), получим

$$D = m_{\text{НЕВР}} r = \frac{G}{16\pi^2 R} \sqrt{\left(\frac{1}{\nu_A^2} - \frac{1}{\nu_C^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\nu_B^2} - \frac{1}{\nu_D^2} \right)^2}; \quad (25) \quad \alpha = -\operatorname{arctg} \left[\frac{\frac{1}{\nu_B^2} - \frac{1}{\nu_D^2}}{\frac{1}{\nu_A^2} - \frac{1}{\nu_C^2}} \right] + n\pi. \quad (26)$$

Для устранения неоднозначности результата, вызванной периодичностью данной функции, угол дисбаланса будем определять с помощью следующего алгоритма (см. рисунок 2).

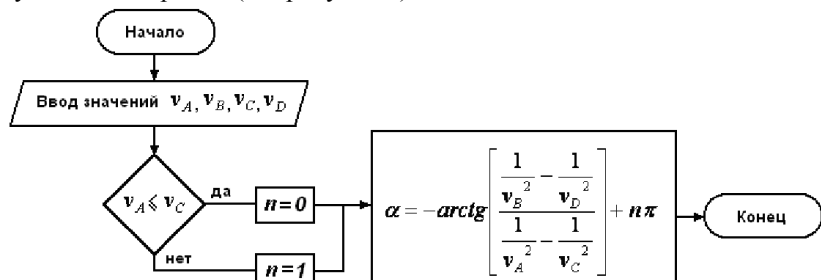


Рисунок 2 – Алгоритм расчета угла дисбаланса

Результаты исследования. В ходе исследования были получены формулы для расчета величины дисбаланса (25) и угла (26). Для устранения неоднозначности угол дисбаланса необходимо рассчитывать, пользуясь алгоритмом, приведенным на рисунке 2.

Выводы. В результате анализа традиционных способов и средств измерения статической неуравновешенности роторов стала очевидной необходимость дальнейших исследований в этом направлении. Для этого автором данной статьи ранее были разработаны и защищены патентами (в соавторстве) способ и устройства для определения статической неуравновешенности роторов. Для практической реализации предложенных решений понадобилось математическое обоснование, которое отражено в данной статье в виде вывода необходимых математических формул.

Научная новизна заключается в определении величины статической неуравновешенности роторов расчетным путем по измеренным частотам свободных колебаний маятниковой рамы с установленным на нее ротором.

Практическая значимость данной работы заключается в возможности создания относительно точного, а также простого в изготовлении и обслуживании устройства для определения статической неуравновешенности роторов.

Список литературы: 1. ГОСТ22061-76. Машины и технологическое оборудование. Система классов точности балансировки. 2. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. – 639с. 3. Теория и конструкция балансировочных машин / Под ред. *проф. В.А. Щенетильникова*. – М.: Машгиз, 1963. – 443с. 4. *Мамонтов А.В.* Методы вибродиагностики неуравновешенных роторов для снижения вибрации и шума производственного оборудования // Радиозлектроника и информатика: Научно-технический журнал. – 2002. – Вып.3. – С.68-70. 5. А.С. №1825996 G01M1/10. 6. Патент України №38863 G01M1/00. 7. Патент України №39118 G01M1/00. 8. Патент України №70504 G01M1/10. 9. *Яблонский А.А.* Курс теоретической механики. Часть II. Динамика. – М.: Высшая школа, 1984. – 423с. 10. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 255с.

Поступила (received) 05.02.2014

УДК 621.83

М.В. МАРГУЛИС, д.т.н., профессор каф. ТМ ГВУЗ ПГТУ, Мариуполь;
Я.О. ГОРДИЕНКО, аспирант каф. ТМ ГВУЗ ПГТУ

КОРРИГИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДОРОЖЕК КАЧЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРЕЦЕССИОННЫХ ПЕРЕДАЧ С ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

В данной статье на основе анализа известных конструкций волновых прецессионных передач с телами качения, а также экспериментальных данных, полученных при испытании прототипа механизма, представлены рекомендации по корригированию профиля поперечного сечения периодических дорожек качения с целью повышения несущей способности и долговечности. Приведены предложенные зависимости, учитывающие влияние точности профиля периодических дорожек качения на расположение точки первоначального контакта тела и дорожки качения.

Ключевые слова: волновая передача, периодическая дорожка качения, тело качения, контактная площадка, угол контакта, корригирование.

Введение. Актуальность задачи. Прочностной расчет волновых прецессионных передач с телами качения (ВПТК) основывается на определении допустимых контактных напряжений и деформаций, возникающих в процессе работы передачи при контакте тел качения (шариков) с периодическими дорожками качения (ПДК), выполненными на специфических звеньях меха-

© М.В. Маргулис, Я.О. Гордиенко, 2014