

Turbo Expo 2005. Reno-Tahoe, Nevada, 6-9 Jun., 2005. – Paper №GT2005-68879. 15. *Rapley S.* The Application of CFD to model windage power loss from a spiral bevel gear / *S. Rapley, C. Eastwick, K. Simmons* // Proceedings of GT2007, ASME Turbo Expo 2007: Power for land, sea and air, Montreal, Canada, 2007. – Paper №GT2007-27879. 16. *Ставицкий В.В.* Исследование аэродинамических потерь энергии в высокоскоростных прямозубых цилиндрических передачах. / *В.В. Ставицкий, П.Л. Носко*. // Вестник НТУ "ХПИ" – Харьков: ХПИ, 2010. – №27. – С.167-173.

Поступила (received) 11.03.2014

УДК 621.89

Г.П. ТАРИКОВ, д.т.н., профессор кафедры ДМ, П и СМ БелГУТ, Гомель, Беларусь;
В.Н. ПАРХОМЕНКО, старший преподаватель кафедры СХМ ГГТУ им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь;
В.В. КОМРАКОВ, к.т.н., доцент кафедры ИТ ГГТУ им. П.О. Сухого

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧЕ С ТОЧЕЧНЫМ КОНТАКТОМ

В работе рассмотрено решение пространственной контактной задачи с учетом температуры применительно к зубчатому зацеплению. Выведены формулы для определения контактных напряжений возникающих на площадке контакта. Приведен числовой пример решения задачи.

Ключевые слова: контактная задача, площадка контакта, шестерня, колесо, термоупругость, точечный контакт, контактное напряжение

Введение. Актуальность задачи. В процессе работы зубчатой передачи (системы шестерня-колесо) зубья нагреваются, что влияет на распределение контактных давлений по площадке контакта. Пространственная контактная задача с учетом тепловыделения применительно к деталям машин и механизмов до сих пор является актуальной [5]. Большое количество работ посвящено изучению данного вопроса [4]. В работах [2, 3] данная задача исследуется с учетом тепловых явлений, т.е. решается пространственная контактная задача термоупругости.

Цель работы. Целью работы является решение пространственной контактной задачи термоупругости применительно к зубчатой передаче с точечным контактом.

Постановка задачи. Рассматривается термоупругая задача о контакте зубьев (шестерни и колеса) с начальным контактом в точке. При этом задаются радиусы кривизны контактирующих тел в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рисунок 1).

В работе [1] получено двумерное интегральное уравнение контактной задачи термоупругости первого рода

$$\delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} = \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2\pi} \iint_R \frac{1}{R} p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 - \frac{(\eta_1 + \mu_2)}{2\pi} \iint_\Omega \frac{1}{R} \theta_0(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (1)$$

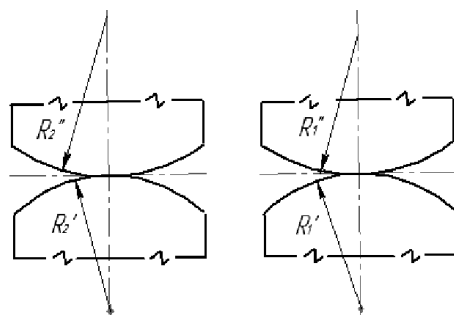


Рисунок 1 – Схема контакта поверхностей вращения с параллельными осями при внешнем соприкосновении

Введем обозначение

$$F(x_1, x_2) = (\vartheta_1 + \vartheta_2)P(x_1, x_2) - (\eta_1 + \eta_2)\theta_0(x_1, x_2). \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) примет такой вид:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_\Omega \frac{1}{R} F(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (3)$$

Из теории потенциала известно, что решение уравнения (3) должно обращаться в нуль на границе элемента E.

$$E_0: \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

где a, b ($a \geq b$) – полуоси эллипса.

Решение уравнения (3), удовлетворяющее этому условию имеет вид:

$$F(x_1, x_2) = C \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (4)$$

Условие равновесия

$$P = \iint_\Omega P(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (5)$$

где P – нормальная сила, прижимающая упругие тела.

На основании (2) и (4) имеем

$$C \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} = (\vartheta_1 + \vartheta_2)P(x_1, x_2) - (\eta_1 + \eta_2)\theta_0(x_1, x_2).$$

Отсюда находим

$$P(x_1, x_2) = \frac{C}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \theta_0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (6)$$

Подставляя (6) в условие равновесия (5), получаем

$$C = \frac{3}{2} \frac{1}{\pi ab} [(\vartheta_1 + \vartheta_2)P - (\eta_1 + \eta_2)D], \quad (7)$$

где

$$D = \iint_\Omega \theta_0(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (8)$$

На основании (6) и (7) окончательно имеем

$$P(x_1, x_2) = \frac{3}{2\pi ab} (P - \gamma D) \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} + \gamma \theta_0(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (9)$$

Формула (9) определяет распределение давления по эллиптической площадке контакта. Здесь $\gamma = (\eta_1 + \eta_2) / (\vartheta_1 + \vartheta_2)$.

Исследуем влияние температуры на величину контактного давления и размеры области контакта. В основу исследования положим интегральное уравнение (1). Решение этого уравнения дается формулой (9). Для дальнейшего необходимо конкретизировать вид функции $\theta_0(x_1, x_2)$, входящей в формулу (9).

В работе [3] показано, что функцию $\theta_0(x_1, x_2)$ целесообразно принять в таком виде:

$$Q_0(x_1, x_2) = Q_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right) \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (10)$$

где Q_0 – температура в центре площадки контакта.

Подставляя (10) в (9), находим

$$P(x_1, x_2) = \frac{3}{2} \left(P_c - \frac{1}{2} \gamma \theta_0 \right) \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} + \gamma \theta_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right) \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (11)$$

Давление в центре области контакта

$$P_{\max} = \frac{3}{2} P_c + \frac{1}{4} \gamma \theta_0. \quad (12)$$

Рассмотрим вопрос об определении размеров площадки контакта. Для этого подставим формулы (4), (7) в уравнение (3). После вычисления интеграла по области Ω приходим к соотношению

$$2\pi \left[\delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} \right] = P_0 (I_0 - I_1 x_1^2 - I_2 x_2^2), \quad (13)$$

где

$$P_0 = \frac{3(v_1 + v_2)}{2\pi ab} (P - \gamma D). \quad (14)$$

Из (13) находим

$$\delta = \frac{1}{2} P_0 b K(e); \quad \frac{1}{R_1} = \frac{P_0}{\pi} I_1; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{P_0}{\pi} I_2. \quad (15)$$

Из этих формул следует, что

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{K(e) - E(e)}{\frac{1}{1-e^2} E(e) - K(e)}. \quad (16)$$

Из формулы (16) можно определить эксцентриситет e эллипса E_0 . Эта формула имеет точно такой же вид, как и при рассмотрении контактной задачи без учета температуры. Следовательно, температура зубьев не влияет на величину e .

Учитывая (14) и (15), получаем

$$\frac{1}{R_1} = \frac{3(v_1 + v_2)}{2\pi e^2 a^3} (P - \gamma D) [K(e) - E(e)]. \quad (17)$$

Если в формулу (8) подставить выражение (7), то будем иметь

$$D = \frac{1}{2} 2\pi ab \theta_0. \quad (18)$$

Из (17) с учетом (18) получаем уравнение для определения параметра ε

$$\varepsilon^3 + \omega \varepsilon^2 = 1, \quad (19)$$

где

$$a = \varepsilon a_0; \quad a = \frac{1}{R_1} = [(v_1 + v_2) P R_1]^{1/3} \alpha_a; \quad (20) \quad \omega = \frac{3}{4} (\eta_1 + \eta_2) \frac{R_1 \theta_0}{a_0 e^2} (1 - e^2)^{1/2} [K(e) - E(e)]. \quad (21)$$

Величину α_a можно найти по (13). Здесь a – большая полуось эллипса E_0 .

Величину полуоси b можно найти по первой формуле (20), а полуось b из соотношения

$$b = a(1 - e^2)^{1/2}.$$

Эксцентриситет граничного эллипса E_0 можно найти из (16). Распределение давления на площадке контакта дается формулой (11), а величину P_{\max} можно определить по (12).

На рисунке 2 представлен график зависимости параметра ε от величины ω .

Из этого графика следует, что $\varepsilon \leq 1$. Таким образом величина a с учетом температуры меньше, чем без учета температуры.

Пример. Значения расчетных контактных напряжений одинаковы для шестерни и колеса. Поэтому расчеты на прочность выполняют для того из колес пары, у которого меньшее допускаемое напряжение (чаще это бывает колесо, а не шестерня). Полученные выше формулы используют для проверочного расчета, когда все необходимые размеры и другие параметры зубчатой передачи известны.

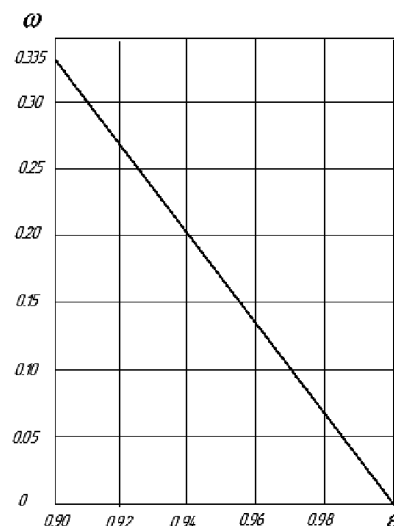


Рисунок 2 – График зависимости параметра ε от величины ω

Принимаем:

$$\rho_1 = 30 \text{ мм}; \quad \rho_2 = 60 \text{ мм}; \quad R = 70 \text{ мм},$$

где ρ_1, ρ_2 – радиусы кривизны боковых профилей выпуклых зубьев; R – радиусы кривизны образующей боковой поверхности зуба шестерни,

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \mu = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad \nu = 0,28,$$

где E – модуль продольной упругости (модуль Юнга); μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

Полагаем, что распределение температуры по площадке контакта подчиняется закону (20),

$$\alpha = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}; \quad \theta_0 = 200^\circ\text{C}; \quad \nu = 0,28;$$

$$\eta_1 + \eta_2 = 2(1 + \nu)\alpha = 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}; \quad R_2 / R_1 = 0,286.$$

По формуле (18) определяем эксцентриситет $e^2 = 0,811$. По второй формуле (20) находим величину $a_0 = 3,43 \text{ мм}$. Далее определяем безразмерный параметр ω по формуле (21)

$$\omega = \frac{3}{4} \cdot 3,33 \cdot 10^{-5} \frac{70 \cdot 200}{3,43 \cdot 0,811} (1 - 0,811)^{1/2} (-1,171 + 2,281) = 0,0607.$$

Решая кубическое уравнение (19), находим $\varepsilon = 0,982$.

Большая полуось эллиптической площадки контакта

$$a = \varepsilon a_0 = 0,982 \cdot 3,43 = 3,37 \text{ мм};$$

меньшая полуось

$$b = a(1 - e^2)^{1/2} = 3,37(1 - 0,811)^{1/2} = 1,47 \text{ мм}.$$

Наибольшее давление на площадке контакта находим по формуле (12)

$$P_{\max}^T = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} + \frac{1}{4} \theta_0 \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \right) = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} + \frac{\theta_0 \mu \alpha}{4} \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) = \frac{3 \cdot 50 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 3,37 \cdot 1,47 \cdot 10^{-6}} +$$

$$+ \frac{200,81 \cdot 10^{10} \cdot 1,3 \cdot 10^{-5}}{4} \left(\frac{1 + 0,28}{1 - 0,28} \right) = (4,82 \cdot 10^9 + 9,36 \cdot 10^7) \text{ Па} = 4,91 \cdot 10^9 \text{ Па} = 4910 \text{ МПа}.$$

Давление в любой точке площадки контакта Ω_2 с учетом температуры определяется формулой (11).

Имеем

$$\frac{3}{2} \left(P_c - \frac{1}{2} \gamma \theta_0 \right) = 4,82 \cdot 10^9 - 3 \cdot 9,36 \cdot 10^7 = 4,53 \cdot 10^9 \text{ Па} = 4,53 \cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

Следовательно

$$P^T(x_1, x_2) = 4536 \left(1 - \frac{x_1^2}{3,37^2} - \frac{x_2^2}{1,47^2} \right)^{1/2} + 374 \left(1 - \frac{x_1^2}{3,37^2} - \frac{x_2^2}{1,47^2} \right) \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega_1. \quad (22)$$

Здесь P^T – давление на площадке контакта с учетом температуры; x_1 и x_2 в формуле (22) отсчитываются в мм. Давление $P^T(x_1, x_2)$ в (22) выражается в МПа.

Полагая в формуле (22) $x_2 = 0$, получим

$$P^T(x_1, 0) = 4536 \left(1 - \frac{x_1^2}{3,37^2} \right)^{1/2} + 374 \left(1 - \frac{x_1^2}{3,37^2} \right), \quad |x_1| \leq 3,37 \text{ мм};$$

$$P^T(0, x_2) = 4536 \left(1 - \frac{x_2^2}{1,47^2} \right)^{1/2} + 374 \left(1 - \frac{x_2^2}{1,47^2} \right), \quad |x_2| \leq 1,47 \text{ мм}.$$

По этим формулам можно вычислять давление в точках, расположенных на осях координат. В этих формулах давление P^T выражается в МПа.

Выводы. Решена пространственная термоупругая контактная задача применительно к зубчатой передаче с первоначально точечным контактом. Получены формулы для определения контактных напряжений на площадке контакта. Дан числовой пример решения конкретной задачи.

Список литературы: 1. *Таригов Г.П.* К решению контактной задачи термоупругости применительно к зубчатой передаче / *Г.П. Таригов, В.Н. Пархоменко* // Вестник ГТТУ им. П.О. Сухого. – 2013. – №4. – С.43-49. 2. *Бородачев Н.М.* О решении пространственной температурной задачи теории упругости в перемещениях / *Н.М. Бородачев, В.В. Астанин* // Проблемы прочности. – 2005. – №3. – С. 86-95. 3. *Бородачев Н.М.* Пространственная контактная задача с учетом тепловыделения при трении скольжения / *Н.М. Бородачев, Г.П. Таригов* // Трение и износ. – 2003. – Т.24. – №2. – С.153-160. 4. *Бородачев Н.М.* О задаче Герца с учетом тепловыделения / *Н.М. Бородачев, Г.П. Таригов* // Доклады НАНБ. – 2003. – Т.47. – №2. – С.35-43. 5. *Иванов М.Н.* Детали машин / *М.Н. Иванов*. – М.: Высшая школа, 1991. – 383с. 6. *Лурье А.И.* Теория упругости / *А.И. Лурье*. – М. Наука, 1970. – 939с.

Поступила (received) 11.03.2014