УДК 621.833

А.П. ПОПОВ, д.т.н., проф., заведующий каф. механики и конструирования машин НУК им. адм. Макарова, Николаев;
Л.А. ПОПОВА, научный сотрудник НУК им. адм. Макарова
А.М. МЕДВЕДОВСКИЙ, к.т.н., профессор НУК им. адм. Макарова;
О.И. САВЕНКОВ, ассистент НУК им. адм. Макарова

НЕЛИНЕЙНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАЦЕПЛЕНИЮ ПРЯМЫХ ЗУБЬЕВ

Впервые представлены результаты теоретических исследований контактной прочности традиционных зубчатых передач с прямыми зубьями с учётом нелинейной взаимосвязи между упругими перемещениями (деформациями) зубьев и возникающими при этом напряжениями. При этом определены зависимости максимальных контактных напряжений σ_H и полуширины b_0 прямоугольной площадки контакта. Показано, что величина напряжений σ_H в рассматриваемом случае несколько превышает таковую, имеющую место при отсутствии указанной нелинейности. В соответствии со сказанным величина b_0, наоборот, несколько превышает аналогичную ширину, характерную для случаев отсутствия рассматриваемой нелинейности.

Ключевые слова: зубчатая передача, зубья, контакт, напряжения, нагрузочная способность.

Постановка проблемы. Контактная прочность зубьев является одним из основных критериев работоспособности зубчатых передач. Следует отметить, что расчет зубчатых передач на контактную прочность, предусматривающий определение максимальных контактных напряжений, осуществляется по общеизвестной формуле Герца применительно к модели контакта двух упруго сжатых цилиндров с радиусами ρ_1 и ρ_2 в полюсе зацепления [1].

Однако расчет указанных напряжений по формуле Герца не сразу нашел своё применение. Так, например, А.И. Петрусевич [2] в тридцатые годы прошлого столетия предлагал определять максимальные контактные напряжения в зубчатых передачах, исходя не из эллиптического закона распределения деформаций, положенного в основу решения задачи Герца, а из параболического. При параболическом законе изменения контактных деформаций и, как следствие, контактных напряжений, максимальные контактные напряжения выше таковых при эллиптическом законе изменения напряжений при коэффициентах Пуассона $\nu_1=\nu_2=\nu$ и модулях упругости материалов $E_1=E_2=E$ в 0,454/0,418=1,086 раза [3].

Из сказанного и анализа существующих источников информации по зубчатым передачам следует, что метод расчета контактных напряжений не претерпел каких-либо изменений, связанных с увеличением либо уменьшением определяемых величин максимальных контактных напряжений. В связи с этим предлагаемое ниже решение контактной задачи является первой попыткой по установлению влияния нелинейной зависимости между деформациями и напряжениями на определяемые величины максимальных контактных напряжений.

Анализ последних исследований. Наиболее полно исследования по данной проблеме изложены в [3]. Данные исследования базируются на основе новой теории контактной прочности упруго сжатых тел, разработанной проф. А.П. Поповым, а также на новых технических решениях, защищенных патентами на изобретения.

Цель работы. Основная цель работы – доказательство влияния нелинейной зависимости между упругими контактными деформациями зубьев и возникающими при этом напряжениями. Основа доказательства построена на

впервые выполненных теоретических и экспериментальных исследованиях линейного контакта упруго сжатых тел. Найденные решения послужат в дальнейшем для уточнения расчетных данных величин максимальных контактных напряжений и размеров площадки контакта, найденных по формулам Герца.

Изложение основного материала. Как известно, при расчетах максимальных величин контактных напряжений в зубчатых передачах используется формула Герца. При этом в качестве расчетной модели в полюсе зацепления зубьев выступают два упруго сжатых цилиндра с радиусами ρ_1 и ρ_2, которые характеризуют кривизну боковых эвольвентных профилей зубьев соответственно шестерни и колеса.

Формулы Герца для определения максимальных контактных напряжений σ_H и полуширины b_0 прямоугольной площадки контакта получены для случая линейной взаимосвязи между упругими деформациями и напряжениями взаимно контактирующих тел. Однако в работе [4] показано, что между перемещениями упруго взаимодействующих тел и возникающими в них при этом напряжениями, существует нелинейная взаимосвязь. При этом показатель степени n, характеризующий эту зависимость, находится в пределах 0,7…0,8.

Следовательно, все ранее выполненные решения, в том числе и решения Герца, полученные для случая линейной зависимости между перемещениями зубьев и возникающими при этом в них напряжениями, следует рассматривать как приближенные.

А теперь перейдем непосредственно к решению рассматриваемой задачи. Новая теория контактной прочности упруго сжатых тел построена на получении двух равнозначных функций контактных деформаций [3]. При этом первая функция в рассматриваемой, как и в любой другой задаче, определяется с учетом конфигурации тел и формы зазора между телами до и после нагружения, и она в данном случае имеет вид

$$W(x) = W_{\max}\sqrt{1-\frac{x^2}{b_0^2}}\ , \tag{1}$$

где $W_{\max}=b_0^2/2\rho_w$ – максимальная величина контактной деформации; b_0 – полуширина площадки контакта; $\rho_w=\rho_1\rho_2/(\rho_1\pm\rho_2)$ – приведенный радиус кривизны зубьев; знак "плюс" принимается при внешнем, а знак "минус" при внутреннем контакте тел.

Вторая функция контактных деформаций $W(x)$ базируется на использовании гипотезы Винклера, которая в общем случае характеризует зависимость между просадкой кромки упругого основания и интенсивностью его реакции, и она имеет вид [3]

$$r(x) = \kappa\cdot\delta(x), \tag{2}$$

где $r(x)$ – интенсивность реакции упругого основания, Н/мм; κ – коэффициент жёсткости, Н/мм^2; $\delta(x)$ – просадка кромки упругого основания, мм.

Выражение (2) с учетом $\kappa=1/A$, $\delta(x)=W(x)$ и $r(x)=\omega(x)$ представим следующим образом

$$W(x) = A\cdot\omega(x), \tag{3}$$

где $W(x)$ – функция контактных деформаций, мм; $\omega(x)$ – удельная нагрузка, приходящаяся на единицу длины контакта, Н/мм; A – коэффициент постели, мм^2/Н.

Если разделить и умножить правую часть уравнения (3) на b_w, то данное уравнение примет вид

$$W(x) = \frac{b_w}{b_w} A \cdot \omega(x) = b_w \cdot A \cdot \sigma(x)\,, \qquad (4)$$

где b_w – длина, например, каждого из двух упруго сжатых цилиндров; $\omega(x)/b_w=\sigma(x)$ – функция контактных напряжений, Н/мм^2 или МПа.

Таким образом, проф. А.П. Поповым указанная гипотеза не только доработана, но и расширена область её применения. В [3] доказано и показано, что данная гипотеза может быть использована при решениях не только плоских, но и пространственных контактных задач. В связи со сказанным рецензент книги [3] в предисловии к ней посчитал необходимым в дальнейшем именовать гипотезу Винклера гипотезой Винклера-Попова.

Решение задачи выполним, исходя из $\nu_1 \neq \nu_2$ и $E_1 \neq E_2$ при показателе степени нелинейности n=0,7. В связи с этим основную зависимость между упругими деформациями W и напряжениями σ представим в виде:

$$W = C_m \sigma^n = C_m \sigma^{0,7}, \qquad (5)$$

где C_m – размерный параметр мм/МПа^{0,7}.

Применительно к каждому из двух упруго сжатых тел на основании зависимости

$$\sigma = \frac{\varepsilon E}{1-\nu^2} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

запишем выражения контактных напряжений применительно к каждому из двух упруго сжатых тел, а именно

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \cdot \frac{\Delta L}{L}\,; \qquad \sigma_2 = \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \cdot \frac{\Delta L}{L}\,,$$

где ε – относительная деформация; ΔL – абсолютная величина деформации; L – некоторый линейный размер, равный ширине площадки контакта $2b_0$, т.е. $L=2b_0$ [3].

Объединив выражение (5), а также σ_1 и σ_2, представим зависимость W в виде двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} W &= 2C_{m1}\left[\frac{E_1}{(1-\nu_1^2)L}\right]^{0,7} \cdot \Delta L^{0,7}; \\ W &= 2C_{m2}\left[\frac{E_2}{(1-\nu_2^2)L}\right]^{0,7} \cdot \Delta L^{0,7}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Далее, умножив и разделив правые части выражений (6) на $\Delta L^{0,3}$, полагая при этом $L=2b_0$, $\Delta L^{0,3}=(b_0^2/2\rho_w)^{0,3}$ и $W=\Delta L$, найдем выражения размерных параметров:

$$\left.\begin{aligned} C_{m1} &= \frac{1}{2}\left[\frac{2(1-\nu_1^2)b_0}{E_1}\right]^{0,7} \cdot \frac{b_0^{0,6}}{(2\rho_w)^{0,3}}; \\ C_{m2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{2(1-\nu_2^2)b_0}{E_2}\right]^{0,7} \cdot \frac{b_0^{0,6}}{(2\rho_w)^{0,3}}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Используя зависимости (7) и формулу средних контактных напряжений $\sigma_m=F_n/2b_0b_w$, определим выражения контактной податливости упруго сжатых тел в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{\text{к}1} &= \frac{W_1}{F_n} = \frac{C_{m1}\sigma_m^{0,7}}{F_n} = 0{,}406\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1 b_w}\right)^{0,7} \cdot \frac{b_0^{0,6}}{(\rho_w F_n)^{0,3}}; \\ \delta_{\text{к}2} &= \frac{W_2}{F_n} = \frac{C_{m2}\sigma_m^{0,7}}{F_n} = 0{,}406\left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2 b_w}\right)^{0,7} \cdot \frac{b_0^{0,6}}{(\rho_w F_n)^{0,3}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где F_n – нормальная сила, действующая на упруго контактирующие тела; $\delta_{\text{к}1}$, $\delta_{\text{к}2}$ – контактные податливости соответственно первого и второго тел, мм/Н.

С учетом выражений (8) представим уравнение коэффициента постели A следующим образом:

$$A = 2b_0(\delta_{\text{к}1} + \delta_{\text{к}2}) = 0{,}812\left[\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1 b_w}\right)^{0,7} + \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2 b_w}\right)^{0,7}\right] \cdot \frac{b_0^{1,6}}{(\rho_w F_n)^{0,3}}. \qquad (9)$$

В результате подстановки уравнения (9) в выражение (3) с учетом использования функции (1) и выполненного интегрирования найдем зависимость

$$A\int_{-b_0}^{b_0}\omega(x)dx = AF_n = \frac{0{,}812 b_0^{1,6}F_n}{(\rho_w F_n)^{0,3}}\left[\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1 b_w}\right)^{0,7} + \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2 b_w}\right)^{0,7}\right] = \frac{b_0^2}{2\rho_w}\int_{-b_0}^{b_0}\sqrt{1-\frac{x^2}{b_0^2}}\,dx = \frac{\pi b_0^3}{4\rho_w},$$

исходя из которой получим

$$b_0^{7/5} = 1{,}035\left\{\left[\frac{(1-\nu_1^2)\rho_w F_n}{E_1 b_w}\right]^{0,7} + \left[\frac{(1-\nu_2^2)\rho_w F_n}{E_2 b_w}\right]^{0,7}\right\}.$$

Возведя левую и правую части последнего уравнения в степень, равную 5/7, найдем выражение полуширины площадки контакта

$$b_0 = 1{,}025\sqrt{\left\{\left[\frac{(1-\nu_1^2)\rho_w F_n}{E_1 b_w}\right]^{0,7} + \left[\frac{(1-\nu_2^2)\rho_w F_n}{E_2 b_w}\right]^{0,7}\right\}^{10/7}}. \qquad (10)$$

Из уравнения (4) при x=0 запишем выражение $W_{\max}=b_w \cdot A \cdot \sigma_{\max}$, исходя из которого при $W_{\max}=b_0^2/2\rho_w$ найдем зависимость максимальных контактных напряжений $\sigma_{\max}=\sigma_H=b_0^2/2\rho_w A b_w$. В результате подстановки в выражение $\sigma_H=b_0^2/2\rho_w A b_w$ вместо b_0 и A правых частей уравнений (9) и (10) найдем следующую зависимость:

$$\sigma_H = 0{,}62\sqrt{\frac{F_n^2}{b_w^2\left\{\left[\frac{(1-\nu_1^2)\rho_w F_n}{E_1 b_w}\right]^{0,7} + \left[\frac{(1-\nu_2^2)\rho_w F_n}{E_2 b_w}\right]^{0,7}\right\}^{10/7}}}. \qquad (11)$$

В зубчатых передачах, как известно, в качестве материалов используются стали, у которых одинаковые по своим величинам коэффициенты Пуассона и модули упругости. В связи с этим, приняв $\nu_1=\nu_2=\nu=0{,}3$ и $E_1=E_2=E$, преобразуем уравнения (10) и (11) к более упрощенному виду:

$$b_0 = 1{,}604\sqrt{\frac{\rho_w F_n}{E b_w}}\,; \qquad (12) \qquad\qquad \sigma_H = 0{,}396\sqrt{\frac{E F_n}{\rho_w b_w}}\,. \qquad (13)$$

Если вышеуказанное решение задачи выполнить, исходя из отсутствия нелинейности между упругими деформациями и напряжениями, т.е. при показателе степени нелинейности $n=1$, то в этом случае при $\nu_1=\nu_2=\nu=0{,}3$ и $E_1=E_2=E$ зависимости (12) и (13) примут вид:

$$b_0 = 1{,}522\sqrt{\frac{\rho_w F_n}{E b_w}}\,; \qquad \sigma_H = 0{,}418\sqrt{\frac{E F_n}{\rho_w b_w}}\,,$$

то есть они целиком и полностью оказались идентичными общеизвестным выражениям Герца, полученным также применительно к двум упруго сжатым цилиндрам.

Сравнивая между собой коэффициенты при b_0 и σ_H в формулах (12), (13) и в формулах Герца отмечаем, что при учете нелинейности между деформациями и напряжениями полуширина площадки контакта b_0 возрастает в 1,606/1,522=1,055 раза, а максимальные контактные напряжения σ_H при этом, как следствие, снижаются в 0,418/0,396=1,055 раза. Таким образом, нагрузочная способность эвольвентного зацепления по контактным напряжениям возрастает в $1{,}055^2=1{,}113$ раза, т.е. примерно на 11,3%.

Для сравнения величин b_0 и σ_H, найденных при $n=1$ и $n=0{,}7$ с учетом $\nu_1=\nu_2=\nu=0{,}3$ и $E_1=E_2=E$, а также при $\nu_1\neq\nu_2$ и $E_1\neq E_2$, выполним расчет зубчатой передачи, у которой $z_1=50$; $z_2=100$; $m=5$мм; $\alpha_w=20°$; $b_w=125$мм; $F_n=4\cdot10^4$Н; $\nu_1=0{,}25$; $\nu_2=0{,}3$; $E_1=1{,}15\cdot10^5$МПа и $E_2=2{,}1\cdot10^5$МПа. Данные расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Данные расчетов

Расчетные величины параметров	Исходные данные			
	$n=1$; $\nu_1=\nu_2=\nu$; $E_1=E_2=E$	$n=0{,}7$; $\nu_1=\nu_2=\nu$; $E_1=E_2=E$	$n=1$; $\nu_1\neq\nu_2$; $E_1\neq E_2$	$n=0{,}7$; $\nu_1\neq\nu_2$; $E_1\neq E_2$
b_0, мм	0,317	0,335	0,343	0,392
σ_H, МПа	642,00	608,50	595,80	520,32

Из таблицы 1 очевидно, что снижение величины максимальных контактных напряжений σ_H при $n=0{,}7$; $\nu_1\neq\nu_2$, $E_1\neq E_2$ по сравнению с $n=1$; $\nu_1\neq\nu_2$, $E_1\neq E_2$ составляет 595,8/520,32=1,144раза, что равнозначно повышению полуширины площадки контакта b_0 при тех же условиях в 0,392/0,343=1,143 раза. В то же время при $n=0{,}7$; $\nu_1=\nu_2=\nu=0{,}3$ и $E_1=E_2=E$ по сравнению с $n=1$; $\nu_1=\nu_2=\nu=0{,}3$ и $E_1=E_2=E$ указанное снижение напряжений составляет 642/608,5=1,055 за счёт увеличения полуширины площадки контакта в 0,335/0,317=1,054 раза.

Таким образом, при показателе степени $n=0{,}7$ нагрузочная способность зубчатого зацепления увеличивается в 1,113 раза в случае равенства между собой коэффициентов Пуассона и модулей упругости материалов по сравнению с $n=1$. Если же коэффициенты Пуассона и модули упругости соответственно не равны между собой, то в данном случае при $n=0{,}7$ по сравнению с $n=1$ нагрузочная способность зацепления по контактным напряжениям, например, в червячных передачах возрастает в $1{,}144^2=1{,}31$ раза. Данное обстоятельство указывает на необходимость расчета зубчатых передач с учетом изложенной нелинейности между упругими деформациями и напряжениями по формулам (12) и (13) или по формулам (10) и (11) в случае неравенства между собой коэффициентов Пуассона и модулей упругости материалов.

Для подтверждения достоверности выполненных решений вышеприведенной контактной задачи были проведены экспериментальные исследования в статике применительно к модели контакта кругового цилиндра радиусом $r=60$мм и длиной $b=100$мм с плоскостью в условиях нагружения силами $F_n=(0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ 2{,}5;\ 3{,}0)\cdot10^4$Н на специально спроектированном для этих целей устройстве, приведенном в [3]. В процессе исследований определялась ширина площадки контакта $2b_0$. В таблице 2 расчетные данные, определяемые по формуле (12), а также опытные данные ширины $2b_0$ прямоугольной площадки контакта размером $2b_0b$ и значения коэффициента χ, характеризующего отклонения опытных величин $2b_0$ от расчетных.

Таблица 2 – Расчетные и опытные данные

Определяемые величины		Величина силы $F_n\cdot10^{-4}$, Н					
		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Расчет	$2b_0$, мм	0,384	0,541	0,664	0,763	0,856	0,939
Опыт		0,395	0,550	0,650	0,770	0,860	0,950
Коэффициент χ		1,0286	1,0166	0,9790	1,0092	1,0047	1,0117

Из таблицы 2 следует, что замеренные и расчетные величины ширины площадки контакта $2b_0$ отличаются друг от друга в пределах от 2,1% до 2,86%. Указанные расхождения между значениями $2b_0$ указывает на практическую сходимость их величин, что, таким образом, подтверждает правильность решения вышеуказанной задачи.

Выводы.

1. Впервые выполнено решение плоской контактной задачи с линейной системой зацепления зубьев применительно к модели контакта упруго сжатых круговых цилиндров с учётом нелинейности между контактными деформациями и возникающими при этом напряжениями при показателе степени нелинейности $n=0{,}7$.

2. Получены выражения максимальных контактных напряжений σ_H и полуширины площадки контакта b_0 для случаев когда коэффициент Пуассона $\nu_1\neq\nu_2$ и модули упругости материалов $E_1\neq E_2$, а также, когда $\nu_1=\nu_2$ и $E_1=E_2$.

3. Установлено, что при $\nu_1=\nu_2$ и $E_1=E_2$ нагрузочная способность зубчатого зацепления по контактным напряжениям, примерно, на 11,3% выше таковой, вычисленной при $n=1$, т.е. для случая линейной взаимосвязи между упругими деформациями и напряжениями.

4. Если $\nu_1\neq\nu_2$ и $E_1\neq E_2$, что имеет место, например, в червячных передачах, то в этом случае вышеуказанная нагрузочная способность зубчатого зацепления по сравнению с традиционной нагрузочной способностью, определяемой по формуле Герца, возрастает на 31%.

Список литературы: **1.** Энциклопедический справочник. Инженерные расчеты в машиностроении [Текст] – М.: Гос. науч.-техн. изд-во машиностроит. лит., 1948. – 891с. **2.** *Ковальский Б.С.* Расчет деталей на местное сжатие [Текст] / *Б.С. Ковальский*. – Харьков, 1967. – 223с. **3.** *Попов А.П.* Зубчатые механизмы с точечным контактом зубьев [Текст] / *А.П. Попов*. – Николаев: Изд-во Атолл, 2010. – 774с. **4.** *Левина З.М.* Контактная жесткость [Текст] / *З.М. Левина, Д.Н. Решетов*. – М.: Машиностроение, 1971. – 264с.

Bibliography (transliterated): **1.** Enciklopedicheskij spravochnik. Inzhenernye raschety v mashinostroenii [Tekst] – Moscow: Gos. nauch.-tehn. izd-vo mashinostroit. lit., 1948. – 891p. **2.** *Koval'skij B.S.* Raschet detalej na mestnoe szhatie [Tekst] / *B.S. Koval'skij*. – Kharkov, 1967. – 223p. **3.** *Popov A.P.* Zubchatye mehanizmy s tochechnym kontaktom zub'ev [Tekst] / *A.P. Popov*. – Nikolaev: Izd-vo Atoll, 2010. – 774p. **4.** *Levina Z.M.* Kontaktnaja zhestkost' [Tekst] / *Z.M. Levina, D.N. Reshetov*. – M.: Mashinostroenie, 1971. – 264p.

Поступила (received) 07.05.2015