УДК 621.833

П.Н. ТКАЧ, к.т.н., доц., старший научный сотрудник отдела прочности сварных конструкций ИЭС им. Е.О. Патона НАН Украины, Киев;
О.А. РЕВЯКИНА, к.т.н., доцент каф. физики и прикладной механики ЛНУ им. Тараса Шевченко, Старобельск;
Е.Ю. ЧАЛАЯ, ассистент каф. прикладной математики ВНУ им. В. Даля, Северодонецк

СРАВНЕНИЕ АРОЧНОЙ ПЕРЕДАЧИ СМЕШАННОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ С ТРАДИЦИОННОЙ ПО ГЕОМЕТРО-КИНЕМАТИЧЕСКИМ ПОКАЗАТЕЛЯМ

В статье представлен профиль исходного контура обкатных арочных передач смешанного зацепления. Головка зуба шестерни и ножка зуба колеса образованы отрезком прямой, т.е. представляют собой традиционное квазиэвольвентное зацепление. Ножка зуба шестерни и головка зуба колеса образованы кривой, полученной на основе синтеза по заданному значению приведенной кривизны. Приведена сравнительная оценка геометро-кинематических показателей таких передач с традиционными квазиэвольвентными передачами.

Ключевые слова: арочная передача, смешанное зацепление, квазиэвольвентные передачи, показатели работоспособности, приведенная кривизна

Введение. Актуальность задачи. Зубчатые передачи получили широкое распространение в приводах современных машин и во многом определяют их качество. Поэтому задача совершенствования зубчатых приводов есть, безусловно, актуальной. Одним из путей решения этой задачи является поиск рациональной геометрии зацепляющихся зубьев, который может быть сведен к задаче синтеза геометрии по заданным значениям качественных показателей работоспособности. Такая задача относится к проблеме многокритериальной оптимизации машиностроительных конструкций [1].

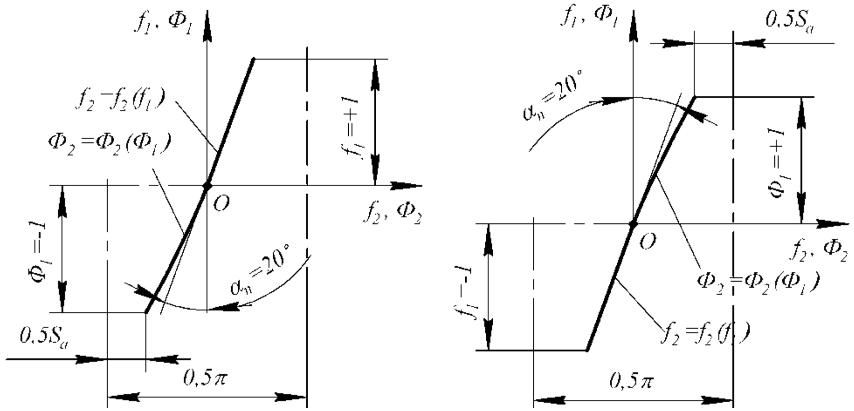
Анализ последних исследований и литературы. Основным критерием работоспособности зубчатых передач является контактная прочность рабочих поверхностей зубьев, которая зависит от приведенной кривизны рабочих поверхностей. Уменьшение приведенной кривизны приводит к снижению интенсивности износа зубьев, повышению толщины масляного слоя в зоне контакта рабочих поверхностей, уменьшению потерь в зацеплении и теплонапряженности в зоне контакта [2]. Решению задачи совершенствования зубчатых передач из условия контактной прочности выбором рациональной геометрии рабочих поверхностей зубьев посвящено значительное количество работ специалистов в области исследования передач зацеплением [3,4,5]. В этих работах предлагаются различные способы уменьшения приведенной кривизны рабочих поверхностей зубьев. В работе [5] предложен метод синтеза исходного контура режущего инструмента по заданной постоянной величине приведенной кривизны рабочих поверхностей зубьев.

Синтез сводится к решению дифференциального уравнения, связывающего геометрические параметры передачи с приведенной кривизной. Однако получаемые при этом передачи имеют высокую чувствительность к погрешностям изготовления и монтажа по сравнению с традиционными. Устранить данный недостаток можно применением смешанного зацепления [6], в котором

головка зуба шестерни и ножка зуба колеса образованы отрезком прямой, т.е. представляют собой квазиэвольвентное зацепление, а ножка зуба шестерни и головка зуба колеса образованы кривой, полученной на основе синтеза по заданному значению приведенной кривизны, например по методу [7].

Цель статьи. Получить исходный контур для реализации смешанного зацепления в арочной передаче и для нее определить геометро-кинематические показатели работоспособности.

Постановка задачи. Исходный контур смешанного зацепления в работе [6] представлен в параметрическом виде соответственно для головки и ножки. Учитывая, что половина исходного контура, предназначенная для образования квазиэвольвентного зацепления, представляет собой отрезок прямой, ее удобнее представить в явном виде, т.е. $f_2 = f_2(f_1) = f_1 \operatorname{tg} \alpha_n$ (рисунок 1). Поэтому и синтезированную часть далее получим в виде $\Phi_2 = \Phi_2(\Phi_1)$.



а б

Рисунок 1 – Исходный контур смешанного зацепления:
а – для образования зуба шестерни (головка – $f_2(f_1)$, ножка – $\Phi_2(\Phi_1)$);
б – для образования зуба колеса (головка – $\Phi_2(\Phi_1)$, ножка – $f_2(f_1)$)

Для успешной реализации смешанного зацепления необходимо при синтезе, т.е. при определении зависимости $\Phi_2 = \Phi_2(\Phi_1)$, выбирать угол профиля на начальной прямой равным углу профиля прямобочного участка. Такое равенство означает и равенство значений относительной приведенной кривизны, т.к. в полюсе она зависит только от угла профиля. Наибольшее распространение в приводах машин общего назначения получили передачи с углом зацепления $\alpha_n = 20°$. Такой угол соответствует значению относительной приведенной кривизны

$$\overline{\chi}_0 = 1/\sin \alpha_n = 1/\sin 20° = 2{,}92 . \qquad (1)$$

Следовательно, синтезировать участок для образования ножки зуба шестерни и головки зуба колеса будем по значению (1).

Материалы исследований. Уравнение для синтеза передач с зубьями по заданной приведенной кривизне рабочих поверхностей получено в работе [6], приведем его к виду

$$\bar{\chi}_0=\frac{(\zeta-\Phi_1\zeta')^2\zeta^3}{\left[\zeta^3+\bar{\Phi}(\zeta-\Phi_1\zeta')\right]\left[\zeta^3-\dfrac{\bar{\Phi}}{u}(\zeta-\Phi_1\zeta')\right]}, \qquad (2)$$

где R_1, R_2 – радиусы делительных окружностей шестерни и колеса соответственно; u – передаточное отношение передачи, равное $u=R_2/R_1$; $\bar{\Phi}=\Phi_1/R_1$; $\zeta=\sin\alpha$, α – угол профиля исходного контура, ζ' – производная ζ по f_1.

Для осуществления синтеза передач по заданному значению $\bar{\chi}_0$ необходимо уравнение (2) разрешить относительно Φ_1. Рассмотрим алгоритм синтеза исходного контура на примере головки зуба колеса (рисунок 1,*б*), где Φ_1 принимает положительные значения. Здесь и далее параметры зацепления (например R_1, R_2) задаются в долях модуля.

1. Задаем постоянное значение $\bar{\chi}_0=2{,}92$.

2. Принимаем, что синтез осуществляется для передачи с минимальным числом зубьев, поэтому $R_1=R_2=5$, $u=1$.

3. Задаем начальные значения $\Phi_{10}=0{,}05$; $\Phi_{20}=0$; $\alpha_0=20°$.

4. После преобразования равенства (2) получаем дифференциальное уравнение

$$A(\zeta')^2+B\zeta'+C=0, \qquad (3)$$

где $A=\bar{A}+\bar{\chi}_0 b_2\Phi_1^4$; $B=-\bar{\chi}_0\left(2\Phi_1^3\zeta b_2-\bar{A}b_1\right)-2\bar{B}$; $C=\zeta^5-\bar{\chi}_0\left(\zeta^6+\bar{B}b_1-\bar{C}b_2\right)$; $\bar{A}=\Phi_1^2\zeta^3$; $\bar{B}=\Phi_1\zeta^4$; $\bar{C}=\Phi_1^2\zeta^2$; $b_1=u-1/(uR_1)$; $b_2=1/\left(uR_1^2\right)$.

5. Решение дифференциального уравнения представляем в виде ряда ($\Phi_1=\Phi$, $\Phi>0$)

$$\zeta=a_0+a_1(\Phi-\Phi_0)+(1/2)a_2(\Phi-\Phi_0)^2+(1/6)a_3(\Phi-\Phi_0)^3+\ldots \qquad (4)$$

где Φ_0 – значение переменной Φ в точке, в окрестности которой ζ раскладывается в ряд; $a_0=\sin\alpha_0=\zeta_0$; $a_1=\zeta_0'$; $a_2=\zeta_0''$; $a_3=\zeta_0'''$ – значение функции ζ и первых трех ее производных в точке Φ_0; α_0 – угол профиля в этой точке.

Последовательно дифференцируя левую часть (4) получаем при $\Phi=\Phi_0$

$$a_0=\sin\alpha_0;\ a_1=\left(-B\pm\sqrt{B^2-4AC}\right)\Big/(2A);\ a_2=-\left(A'a_1^2+B'a_1+C'\right)\Big/(2Aa_1+B);$$
$$a_3=-\left(A''a_1^2+4Aa_1a_2+2Aa_2^2+B''a_1+2B'a_2+C''\right)\Big/(2Aa_1+B). \qquad (5)$$

Здесь

$$A'=\bar{A}'+\bar{\chi}_0'b_2\Phi_0^4+4b_2\Phi_0^3\bar{\chi}_0;\ A''=\bar{A}''+\left(\bar{\chi}_0''\Phi_0^4+8\Phi_0^3\bar{\chi}_0'+12\Phi_0^2\bar{\chi}_0\right)b_2;$$
$$B'=-\bar{\chi}_0'\left(2\Phi_0^3a_0b_2-\bar{A}b_1\right)-\bar{\chi}_0\left[2b_2\left(3\Phi_0^2a_0+\Phi_0^3a_1\right)-\bar{A}'b_1\right]-2\bar{B}';$$
$$B''=-\bar{\chi}_0''\left(2\Phi_0^3a_0b_2-\bar{A}b_1\right)-2\bar{\chi}_0'\left[2b_2\left(3\Phi_0^2a_0+\Phi_0^3a_1\right)-\bar{A}'b_1\right]-$$
$$-\bar{\chi}_0\left[2b_2\left(6\Phi_0a_0+6\Phi_0^2a_1+\Phi_0^3a_2\right)-\bar{A}''b_1\right]-2\bar{B}'';$$
$$C'=5a_0^4a_1-\bar{\chi}_0'\left(a_0^6+\bar{B}b_1-\bar{C}b_2\right)-\bar{\chi}_0\left(6a_0^5a_1+\bar{B}'b_1-\bar{C}'b_2\right);$$

$$C''=5a_0^3(4a_1+a_0a_2)-\bar{\chi}_0''\left(a_0^6+\bar{B}b_1-\bar{C}b_2\right)-\bar{\chi}_0'\left(6a_0^5a_1+\bar{B}'b_1-\bar{C}'b_2\right)-$$
$$-\bar{\chi}_0\left[6\left(5a_0^4a_1^2+a_0^5a_2\right)+\bar{B}''b_1-\bar{C}''b_2\right];$$
$$\bar{A}'=2\Phi_0a_0^3+3\Phi_0^2a_0^2a_1;\ \bar{A}''=2a_0^3+12\Phi_0a_0^2a_1+6\Phi_0^2a_0a_1^2+3\Phi_0^2a_0^2a_2;$$
$$\bar{B}'=a_0^4+4\Phi_0a_0^3a_1;\ \bar{B}''=8a_0^3a_1+12\Phi_0a_0^2a_1^2+4\Phi_0a_0^3a_2;$$
$$\bar{C}'=2\Phi_0a_0^2+2\Phi_0^2a_0a_1;\ \bar{C}''=2a_0^2+8\Phi_0a_0a_1+2\Phi_0^2a_1^2+2\Phi_0^2a_0a_2.$$

$\bar{\chi}_0', \bar{\chi}_0''$ – первая и вторая производные $\bar{\chi}_0$ по Φ (в общем случае заданная относительная приведенная кривизна может зависеть от Φ).

6. Определяем функцию $\Phi_2(\Phi)$ решением дифференциального уравнения $\Phi_2'=\zeta\Big/\sqrt{1-\zeta^2}$.

Решение этого уравнения представим в виде ряда ($\Phi>0$)

$$\Phi_2=\Phi_{20}+\Phi_{20}'(\Phi-\Phi_0)+(1/2)\Phi_{20}''(\Phi-\Phi_0)^2+(1/6)\Phi_{20}'''(\Phi-\Phi_0)^3+\ldots \qquad (6)$$

где Φ_{20}, Φ_{20}', Φ_{20}'', Φ_{20}''' – значение функции Φ_2 и ее первых трех производных при $\Phi=\Phi_0$.

Последовательным дифференцированием уравнения (6) получаем

$$\Phi_{20}'=a_0\left(1-a_0^2\right)^{-0,5};\ \Phi_{20}''=a_1\left(1-a_0^2\right)^{-1,5};\ \Phi_{20}'''=a_2\left(1-a_0^2\right)^{-1,5}+3a_0a_1^2\left(1-a_0^2\right)^{-2,5}.$$

На этом шаг вычислений закончен. Исходными данными для следующего шага являются конечные данные предыдущего. Например, второй шаг производится при $\Phi=\Phi_0=0{,}1$; при Φ_{20}, равном значению Φ_2, вычисленному по формуле (6); при ζ_0 равном значению ζ, вычисленному по формуле (4) с учетом (5). Последним является шаг при $\Phi=\Phi_0=1$, что соответствует вершине зуба колеса.

Таблица 1 – Параметры исходного контура для образования арочных зубьев передачи смешанного зацепления (для образования зубьев шестерни)

Головка зуба рейки ($f_2=f_1\,\mathrm{tg}\alpha_n$)			Ножка зуба рейки ($\Phi_2=\Phi_2(\Phi_1)$)		
α,°	f_1	f_2	α,°	Φ_1	Φ_2
20	1	0,36397	20*	0	0
20	0,9	0,327573	20,3	–0,1	–0,03663
20	0,8	0,291176	20,7	–0,2	–0,07395
20	0,7	0,254779	21,3	–0,3	–0,11229
20	0,6	0,218382	21,9	–0,4	–0,15187
20	0,5	0,181985	22,6	–0,5	–0,19283
20	0,4	0,145588	23,4	–0,6	–0,23528
20	0,3	0,109191	24,1	–0,7	–0,27927
20	0,2	0,072794	24,9	–0,8	–0,32484
20	0,1	0,036397	25,6	–0,9	–0,3720
20*	0	0	26,4	–1	–0,42078

Примечание: * – значение профильного угла на начальной прямой

Чтобы получить синтезированный участок для ножки шестерни (рисунок 1,*а*), нужно принимать отрицательные значения $\Phi=\Phi_0=0\ldots-1$. Тогда исходный контур будет иметь параметры, приведенные в таблице 1.

Для полученных $\Phi_2=\Phi_2(\Phi_1)$ проверим, выполняется ли для полученного контура условие отсутствия заострения $0{,}5S_a\geq0{,}3$ (рисунок 1)

$$0{,}5S_a=0{,}25\pi-\Phi_2\left(\Phi_1^{\max}\right)=$$
$$=0{,}25\cdot3{,}14-0{,}48207=0{,}3.$$

Полученное значение допустимо, заострения не будет.

Ширину кругового зуба определим для максимального угла наклона $\beta_{\max} = 50°$ при радиусе инструмента $R_u = 10$

$$0{,}5B = R_u \sin\beta_{\max} = 10 \sin 50° = 7{,}66 .$$

Определим геометро-кинематические показатели работоспособности арочных передач смешанного зацепления с круговым зубом в сравнении с традиционными.

На рисунке 2 представлены проекции линий контакта на плоскость *XOZ*, касательную к окружности, описывающую продольную форму зуба. Пунктирными линиями показаны границы поля зацепления f_1* и Φ_1*, определенные при $Z_1 = 18$ и $Z_2 = 90$ из соотношений

$$[(Z_1+2)/2]^2 = (f_1*+R_1)^2 + (f_1*/f_2')^2; \quad [(Z_2+2)/2]^2 = (\Phi_1*-R_2)^2 + (\Phi_1*/\Phi_2')^2 .$$

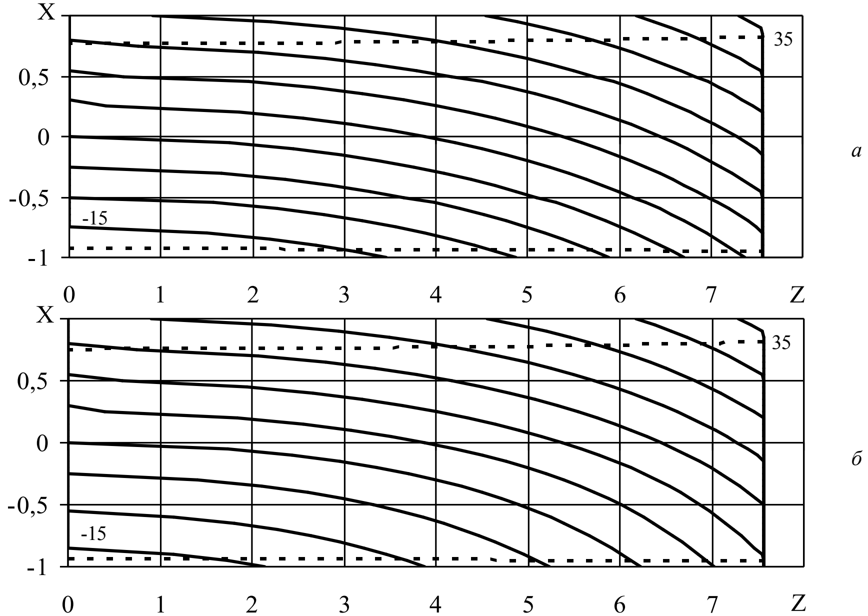


Рисунок 2 – Проекции контактных линий (угол поворота шестерни от –15° до 35°)

На рисунках 3-10 приведены значения геометро-кинематических показателей работоспособности, определенных по зависимостям [6].

Результаты исследований. Сравнение значений показателей работоспособности, приведенных на рисунках 3-10 для синтезированных участков (ножка зуба шестерни и головка зуба колеса), с соответствующими им значениями квазиэвольвентной передачи представлено в таблице 2.

Таблица 2 – Соотношение показателей работоспособности на границе поля зацепления (ножка зуба шестерни и головка зуба колеса)

$\frac{V_{12}^k}{V_{12}^c}$	$\frac{V_1^c}{V_1^k}$	$\frac{V_2^c}{V_2^k}$	$\frac{V_\Sigma^c}{V_\Sigma^k}$	$\frac{\eta_1^k}{\eta_1^c}$	$\frac{\eta_2^k}{\eta_2^c}$	$\frac{\overline{\chi}^k}{\overline{\chi}^c}$	$\frac{\nu^c}{\nu^k}$	$\frac{V^k}{V^c}$
от 1,14 до 1,18	от 2,17 до 5,06	от 1,45 до 1,56	от 1,68 до 2,06	от 2,5 до 5,95	от 1,68 до 1,83	от 2,49 до 6,23	от 0,92 до 0,99	от 1,15 до 1,18

Примечание: индексы "*k*" и "*c*" относятся к квазиэвольвентному и смешанному зацеплению соответственно

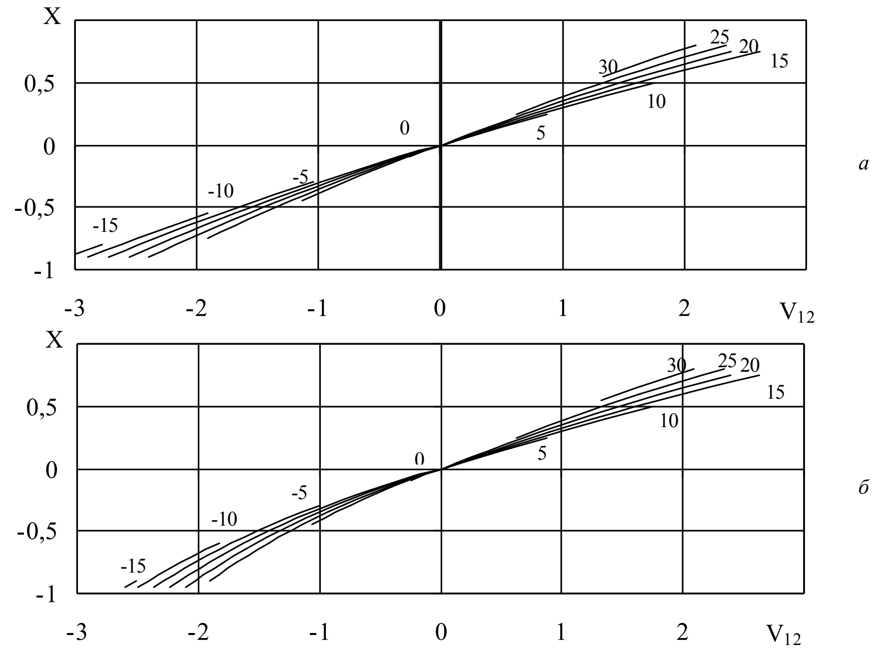


Рисунок 3 – Значения скорости скольжения по высоте профиля зуба

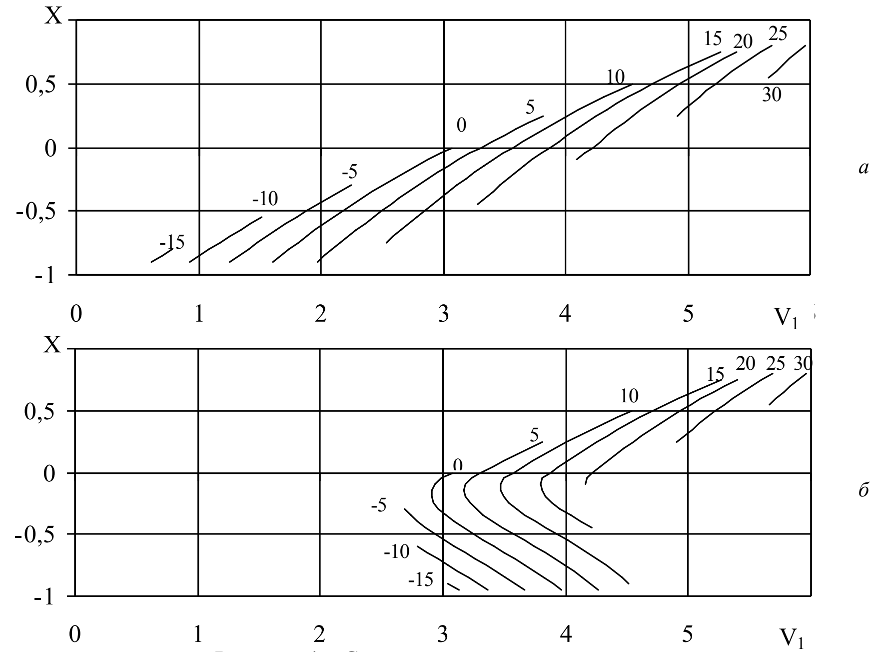


Рисунок 4 – Скорость качения на шестерне

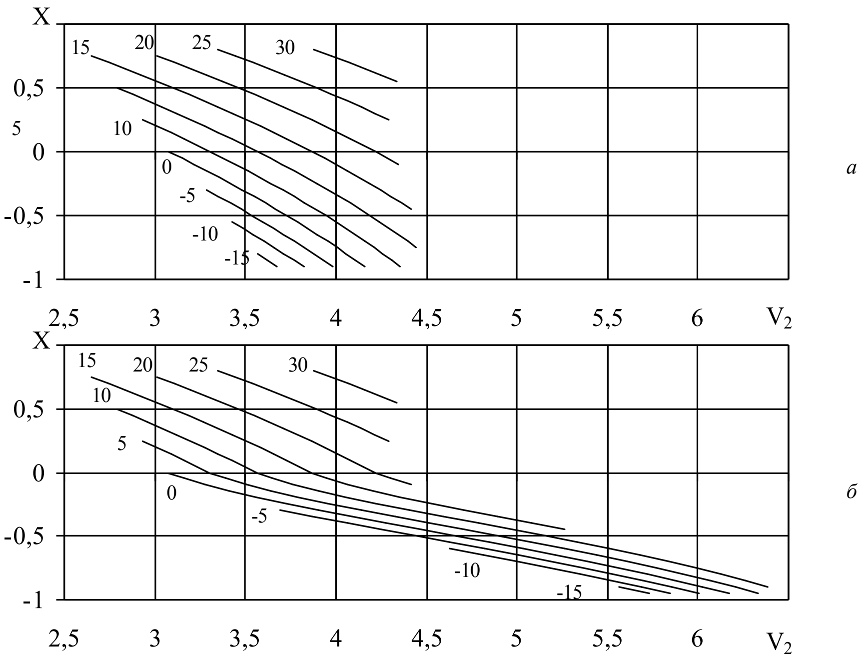


Рисунок 5 – Скорость качения на колесе

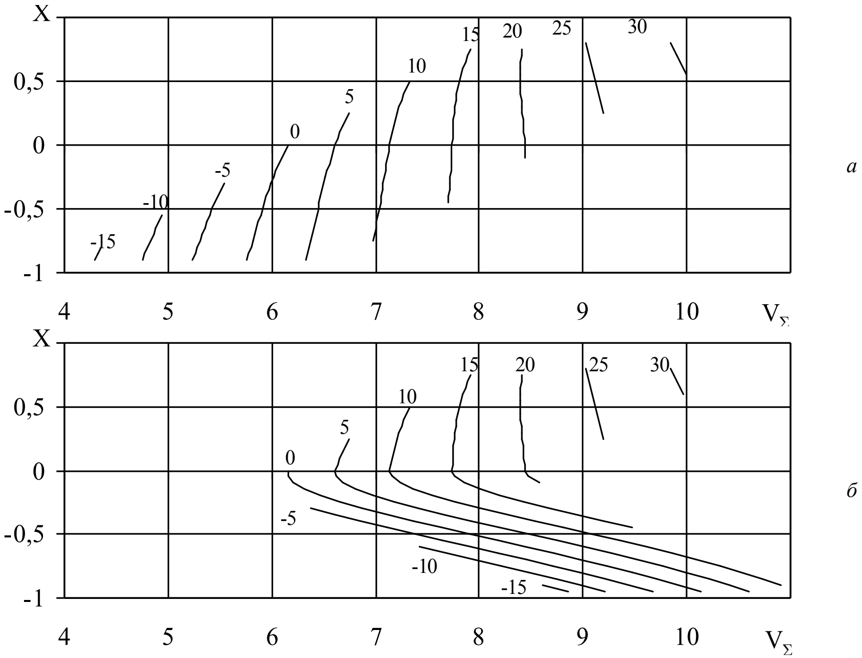


Рисунок 6 – Суммарная скорость качения

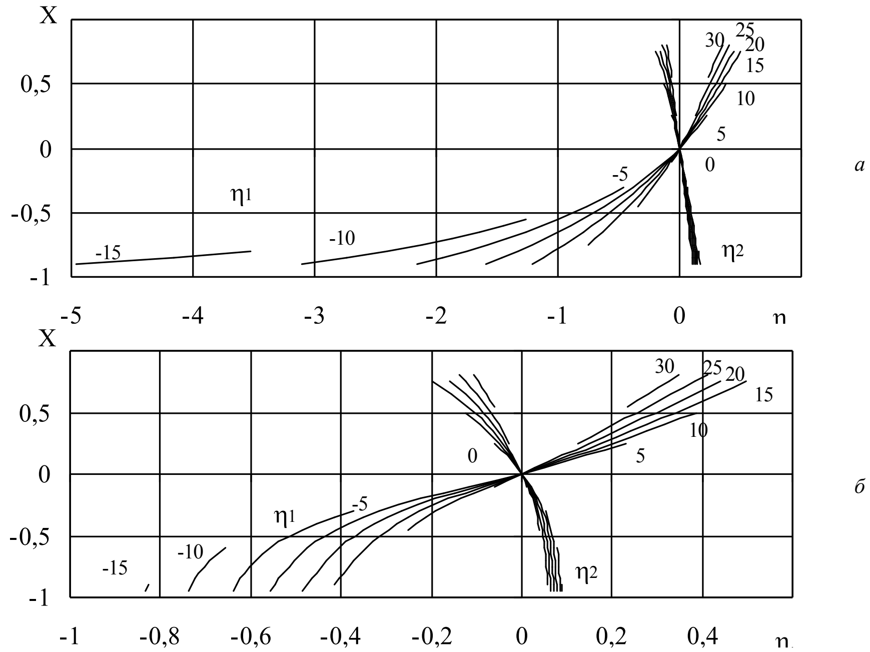


Рисунок 7 – Удельные скольжения (η_1 – на шестерне; η_2 –на колесе)

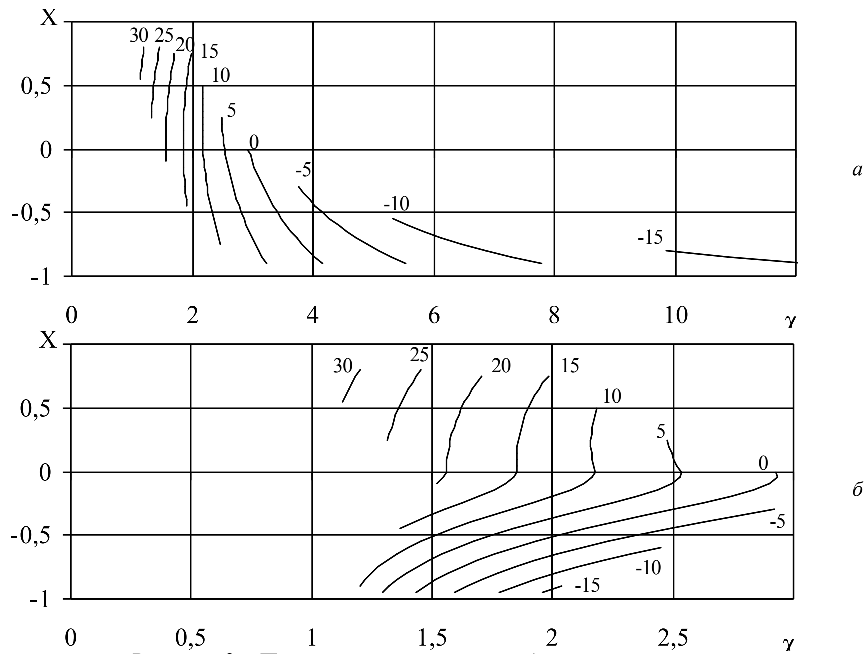


Рисунок 8 – Приведенная кривизна рабочих поверхностей

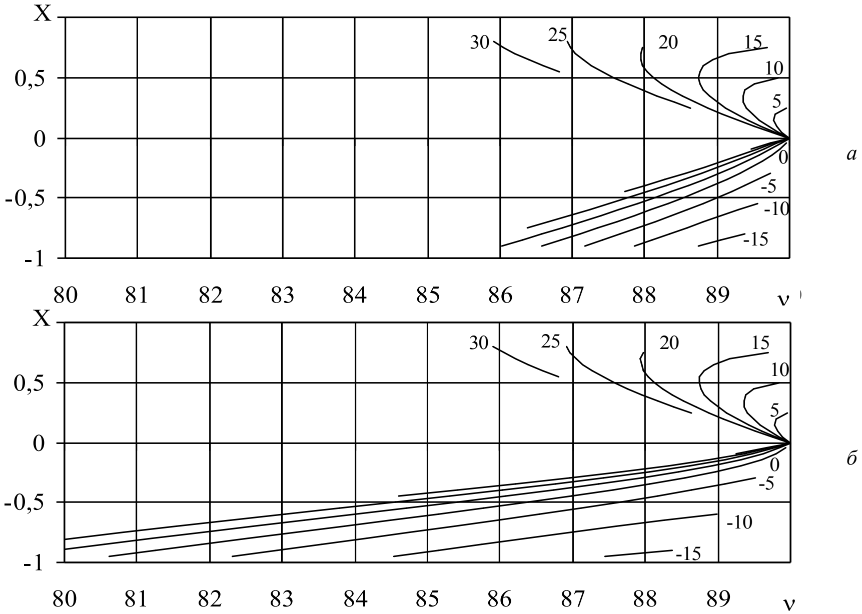


Рисунок 9 – Угол между вектором скорости скольжения и контактной линией

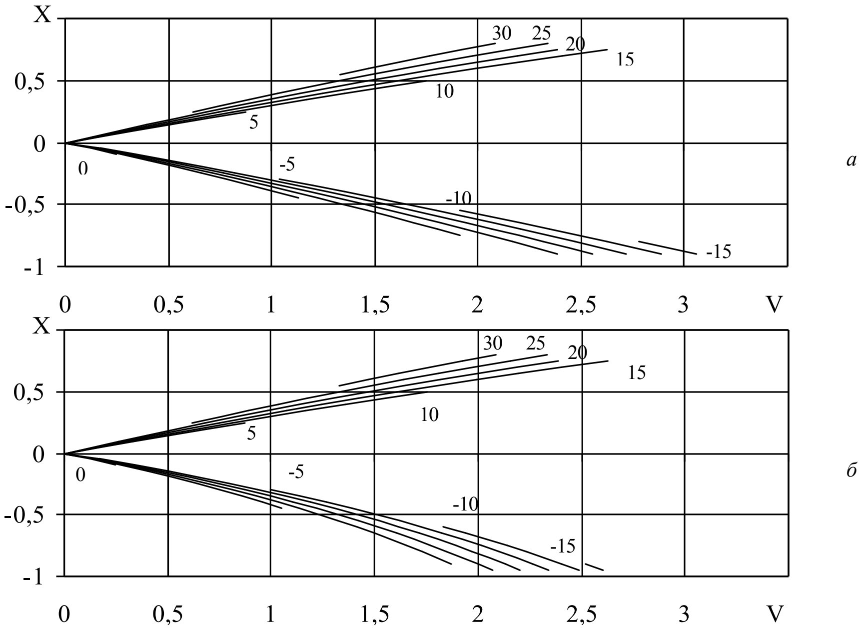


Рисунок 10 – Проекция вектора $\overline{V}_{12}$ на нормаль к мгновенной контактной линии

Примечания к рисункам 2-10: 1. *а* – традиционное зацепление; *б* – смешанное зацепление. 2. Рядом с линиями указаны соответствующие им углы поворота шестерни в градусах.

Анализ данных таблицы 2 показывает, что значения показателей работоспособности синтезированной зубчатой передачи на границах поля зацепления в основном превосходят по своей величине показатели квазиэвольвентной передачи.

Выводы:

1. Получен исходный контур смешанного арочного зацепления, в котором головка зуба шестерни и ножка зуба колеса представляют собой квазиэвольвентную передачу, а ножка зуба шестерни и головка зуба колеса образованы кривой, полученной на основе синтеза по заданному значению приведенной кривизны. Предложена методика синтеза, определены геометро-кинематические показатели работоспособности при $Z_1 = 18$, $Z_2 = 90$.

2. Приведена сравнительная оценка показателей таких передач с традиционными квазиэвольвентными, которая показала, что на границах поля зацепления значения большинства показателей смешанного зацепления выше, чем у некорригированного традиционного в 1,14…6,23 раза. Меньше на 1…8% только угол ν, однако это уменьшение не сказывается на значении проекции скорости скольжения.

3. Наибольший эффект от применения смешанного зацепления наблюдается в основании зуба шестерни. Это связано с тем, что ее число зубьев $Z_1 = 18$ близко к минимально допустимому из условия отсутствия подрезания. Повышение показателей работоспособности на зубьях колеса, напротив, незначительное по сравнению с шестерней. Поэтому наибольший эффект от применения смешанного зацепления ожидается в передачах с минимальными числами зубьев.

Список литературы: **1.** *Кіндрацький Б.* Сучасний стан і проблеми багатокритеріального синтезу машинобудівних конструкцій (огляд) / *Кіндрацький Б., Сулим Г.* // Машинознавство. – Львів, 2002. – №10(64). – С.26-40. **2.** *Ревякіна О.А.* Удосконалювання циліндричних передач із арковими зубцями синтезом за критериями працездатності: Автореф. дис...канд. техн. наук. 05.02.02. – Луганськ, 2003. – 25с. **3.** *Вулгаков Э.Б.* Зубчатые передачи с улучшенными свойствами / *Э.Б. Вулгаков*. – М.: Машиностроение, 1974. – 264с. **4.** *Павлов А.И.* Современная теория зубчатых зацеплений. Монография / *А.И. Павлов*. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100с. **5.** *Шишов В.П.* Теоретические основы синтеза передач зацеплением: Монография / *В.П. Шишов, П.Л. Носко, П.В. Филь*. – Луганск: Изд-во СНУ им. В. Даля, 2006. – 408с. **6.** *Ткач П.М.* Геометро-кінематичні критерії працездатності циліндричних аркових передач змішаного зачеплення з круговим зубом / *П.М. Ткач, О.Ю. Чала* // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ", 2014. – №31(1074). – С.163-168. 7. *Шишов В.П.* Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубчатых передач смешанного зацепления / *В.П. Шишов, П.Н. Ткач, Е.Ю. Чалая, Т.Е. Журавлёва* // Вісник Нац. техн. ун-ту "ХПІ". Збірник наукових праць. Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ", 2013. – №41(1014). – С.181-189.

Bibliography (transliterated): 1. *Kindrac'kiyj B.* Suchasniyj stan i problemi bogatokriterial'nogo sintezu mashinobudivnikh konstrukciyj (oglyad) / *Kindrac'kiyj B., Sulim G.* // L'viv, Mashinoznavstvo, 2002, No10(64). P.26-40. **2.** Udoskonalyuvannya cilindrichnikh peredach iz arkovimi zubcyami sintezom za kriteriyami pracezdatnosti: Avtoref. dis... kand.tekhn.nauk. 05.02.02 / *Revyakina O.A.* – Lugansk, 2003. 25p. **3.** *Vulgakov E.B.* Zubchatihe peredachi s uluchshennihmi svoyjstvami / *E.B. Vulgakov*. Moskow.: Mashinostroenie, 1974. 264p. **4.** *Pavlov A.I.* Sovremennaya teoriya zubchatikh zacepleniyj. Monografiya / *A.I. Pavlov*. – Kharkov: KhNADU, 2005. 100p. **5.** *Shishov V.P.* Teoreticheskie osnovih sinteza peredach zacepleniem: Monografiya / *V.P Shishov, P.L. Nosko, P.V. Fil'*. Lugansk: Izd-vo SNU im. V. Dalya. 2006. 408p. **6.** *Tkach P.M.* Geometro-kinematichni kriteriji pracezdatnosti cilindrichnikh arkovikh peredach zmishanogo zacheplenniya z krugovim zubom / *P.M. Tkach, O.Yu. Chala* // Visnik NTU "KhPI". Seriya: Problemi mekhanichnogo privodu. Kh.: NTU "KhPI", 2014. No31(1074). P.163-168. **7.** *Shishov V.P.* Differencial'nie uravneniya dlya sinteza geometrii arochnikh zubchatikh peredach smeshannogo zacepleniya / *V.P. Shishov, P.N. Tkach, E.Yu. Chalaya, T.E. Zhuravlyova* // Visnik Nac. tekhn. un-tu "KhPI". Zbirnik naukovikh prac'. Seriya: Problemi mekhanichnogo privodu. Kharkiv: NTU "KhPI". 2013. No41(1014). 193p. P.181-189.

Поступила (received) 10.05.2015