

4. Entsiklopedycheskyi spravochnyk. Ynzhenernye raschety v mashynostroyeni [Tekst] – Moscow : Hos. nauch. – tekhn. yzd-vo mashynostroyt. lyt., 1948. – 891 p.
5. Petrushevych A. Y. "Detaly mashyn" pod redaktsiyei N.S. Acherkana [Tekst] / A. Y. Petrushevych. – Moscow : Mashhyz, 1953. – 342 p.

Поступила (received) 30.04.2016

*Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions*

**Контактна міцність зубчастих передач з урахуванням впливу перекосів зубів / О. П. Попов, О. І. Мироненко, О. І. Савенков** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Харків : НТУ "ХПІ", 2016. – № 23 (1195). – С. 121–125. – Библиогр.: 5 назв. – ISSN 2079-0791.

**Контактная прочность зубчатых передач с учетом влияния перекосов зубьев / А. П. Попов, А. И. Мироненко, О. И. Савенков** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х. : НТУ "ХПІ", 2016. – № 23 (1195). – С. 121–125. – Библиогр.: 5 назв. – ISSN 2079-0791.

**Contact strength of gears, taking into account the effect of skewing the teeth / A. P. Popov, A. I. Myronenko, O. I. Savenkov** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Problem of mechanical drive. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2016. – No 23 (1195). – P. 121–125. – Bibliogr.: 5. – ISSN 2079-0791.

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Попов Олексій Павлович** – доктор технічних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, завідувач кафедрою "Механіки та конструювання машин"; тел.: (0512) 46-44-74.

**Попов Алексей Павлович** – доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки и техники Украины, Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, заведующий кафедрой "Механики и конструирования машин"; тел.: (0512) 46-44-74.

**Popov Aleksey Pavlovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Honored Scientist of Ukraine, Admiral Makarov National Univeral of Shipbuilding, head of the department "Mechanics and construction of machines"; tel.: (0512) 46-44-74.

**Мироненко Олександр Іванович** – Державне підприємство Миколаївський виробничий комплекс газотурбобудування, начальник редукторного відділу.

**Мироненко Александр Иванович** – Государственное предприятие Николаевский производственный комплекс газотурбостроения, начальник редукторного отдела.

**Myronenko Alexander Ivanovich** – State Enterprise Nikolaev industrial complex of gas turbine, head gear department.

**Савенков Олег Ігорович** – Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, асистент кафедри "Механіки та конструювання машин"; тел.: (063) 838-47-59; e-mail: rmn.nuk@gmail.com.

**Савенков Олег Игоревич** – Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, ассистент кафедры "Механики и конструирования машин"; тел.: (063) 838-47-59; e-mail: rmn.nuk@gmail.com.

**Savenkov Oleg Igorevich** – Admiral Makarov National University of Shipbuilding, assistant of the department "Mechanics and construction of machines"; tel.: (063) 8384759; e-mail: rmn.nuk@gmail.com.

УДК 621.833

**Р. В. ПРОТАСОВ, А. В. УСТИНЕНКО**

**СИНТЕЗ ЭВОЛЮТНОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ И АНАЛИЗ ЕГО КАЧЕСТВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ**

Отримані рівняння робочого профілю та перехідної кривої зубців еволютної передачі в параметричному вигляді. Розглянута методика визначення приведенного радіуса кривизни та контактних напружень в еволютному зацепленні. Описана методика визначення коефіцієнта перекриття для усіх типів еволютних прямозубих передач, у тому числі й при модифікації вихідного контуру. Визначені швидкості ковзання в зацепленні. Проведено аналіз контактної взаємодії за допомогою формули Герца. Для детального аналізу контактної тиску в САЕ-системі побудована твердотільна модель зубчастої пари і на її основі скінчено-елементна сітка. Використовуючи метод скінчених елементів в САЕ-системі отримані розподілення напружень по об'єму зуба. Усі якісні показники наведені у вигляді блокуючого контуру для існуючих передач. Дані рекомендації щодо призначення вихідного контуру при синтезі нових еволютних передач.

**Ключові слова:** опукло-увігнутий контакт, еволютна передача, коефіцієнт перекриття, контактні напруження.

Получены уравнения рабочего профиля и переходной кривой зубьев эволютной передачи в параметрическом виде. Рассмотрена методика определения приведенного радиуса кривизны и контактных напряжений в эволютном зацеплении. Описана методика определения коэффициента перекрытия для всех типов эволютных прямозубых передач, в том числе и при модификации исходного контура. Определены скорости скольжения в зацеплении. Проведен анализ контактного взаимодействия с помощью формулы Герца. Для детального анализа контактных давлений в САЕ-системе построена твердотельная модель зубчатой пары и на ее основании конечно-элементная сетка. Используя метод конечных элементов в САЕ-системе получены распределения напряжений по объему зуба. Все качественные показатели представлены в виде блокирующего контура для существующих передач. Даны рекомендаций по назначению параметров исходного контура для синтеза новых эволютных передач.

**Ключевые слова:** выпукло-вогнутый контакт, эволютная передача, коэффициент перекрытия, контактные напряжения.

© Р. В. Протасов, А. В. Устиненко, 2016

The equations work profile and transition curve evolute teeth transmission in parametric form. The method of determining the reduced radius of curvature and evolute contact stresses in the engagement. It is shown that in the polar zone occurs lenticular contact, as indicated by the engagement theory. A technique for determining the coefficient of overlap for all types of evolute spur gear, including during the initial contour modification. A comparative analysis of the overlap ratio for the original and modified evolute involute profiles of the same. Defined slip speed engaged. The dependence of the initial loop parameters on specific sliding speed. The analysis of the interaction of the contact using the Hertz formula. For a detailed analysis of contact pressure in the CAD-system is built solid model gear pair on the basis of its finite element model. Using the finite element method in CAE-systems obtained stress distribution on the tooth volume. A comprehensive analysis of all the data presented in the form of a blocking circuit for existing programs and recommendations for the appointment of the initial loop parameters for the synthesis of new evolute gears.

**Keywords:** convex-concave contact, evolute gear, contact ratio, contact stress.

**Введение.** Контактную прочность зубчатой передачи можно повысить увеличением ее габаритов или повышая приведенный радиус кривизны (применяя выпукло-вогнутое зацепление).

Первый путь приводит к ухудшению массогабаритных характеристик передач, а второй – является весьма перспективным. Поэтому последние 70 лет ведутся интенсивные работы по созданию новых видов зацеплений с выпукло-вогнутым контактом зубьев, в частности эволютное зацепление, предложенное А. И. Павловым. В нем довольно подробно рассмотрены методы синтеза исходных контуров и геометрии эволютных зацеплений, однако оценка их качественных показателей и нагрузочной способности выполнена только ориентировочно. Поэтому их подробное исследование является важной научно-практической задачей.

**1. Построение бокового профиля зуба.** Для подробного исследования эволютных передач необходимо получить уравнения боковых поверхностей зубьев, что позволит: 1) исследовать качественные показатели зацепления; 2) определить главные кривизны рабочих поверхностей зубьев; 3) построить геометрические и конечно-элементные модели, необходимых для исследования контактного взаимодействия зубьев и их изгибной прочности, опираясь на возможности современных САЕ-систем.

Исходное уравнение профиля зуба инструментальной рейки (1) записано в относительных величинах [1, 2], где  $x_0$  изменяется в пределах от  $-1$  до  $+1$ ,

$$\left. \begin{aligned} x_0 &\in [-1, 1]; \\ y_0 &= C_1 x_0 + C_2 x_0^2 + C_3 x_0^3 + \dots + C_n x_0^n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

см. рис. 1. Здесь  $\alpha$  – угол наклона касательной, проведенной из текущей точки исходного контура к вертикальной оси, в данном случае к оси  $x$ .

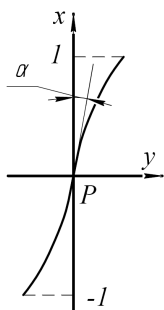


Рис. 1 – Профиль рейки в исходной системе координат

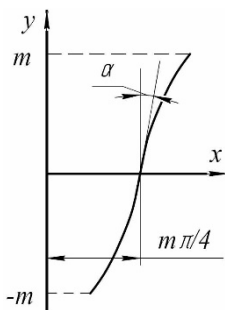


Рис. 2 – Профиль рейки в принятой системе координат

Преобразуем его в параметрический вид (2), при этом заменим координатные оси на традиционные в абсолютных единицах [3] (рис. 2):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(x_0); \\ y_1 &= f_2(x_0). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для построения профиля зуба шестерни по заданному профилю рейки будем использовать метод профильных нормалей [3, 4]. Для определения сопряженного профиля в системе координат  $(x_2, y_2)$ , связанной с центром зубчатого колеса, воспользуемся уравнениями перехода (3). В них  $\varphi_2 = a / r_2$ , где  $r_2$  – радиус центроиды (начальной окружности) второго колеса.

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (x_1 - a) \cos \varphi_2 + (y_1 + r_2) \sin \varphi_2; \\ y_2 &= -(x_1 - a) \sin \varphi_2 + (y_1 + r_2) \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

**2. Уравнение переходной кривой зуба шестерни.** Основным геометрическим элементом, влияющим на изгибную прочность зуба, является переходная кривая. Радиус переходной кривой  $\rho_f$  определяется из формулы  $\rho_f = (m \cdot c^*) / (1 - \sin \alpha_H)$  [5], где  $c^*$  – коэффициент радиального зазора;  $\alpha_H$  – угол, образуемый касательной к рабочему профилю рейки, проведенной из крайней нижней точки рабочего профиля  $N$ , имеющей координаты  $N(x_0 = -1, y_0|_{x_0=-1})$ .

Каждому исходному контуру будет соответствовать свой граничный угол  $\alpha_H$ , который определяется по формуле:

$$\alpha_H = (\arctg(C_1 + 2C_2 \cdot (-1) + 3C_3 \cdot (-1)^2 + \dots + nC_n \cdot (-1)^{n-1}) \cdot 180 / \pi, \quad (4)$$

следовательно, для обеспечения радиуса закругления  $\rho_f$  коэффициент  $c^*$  также варьируется.

Координаты контактной точки в системе  $(x_1, y_1)$ , где  $L_1$  – расстояние от полюса зацепления системы координат  $(x, y)$  до центра радиуса закругления рейки [6]:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (L_1 + \rho_f) \cdot \cos \alpha - a + x_{П1}; \\ y_1 &= -(L_1 + \rho_f) \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \right\}$$

где  $\alpha = \arctg((m - \rho_f \cdot \sin \alpha_H) / a)$ .

На рис. 3 показаны полные профили шестерни и колеса для различных типов эволютных передач.

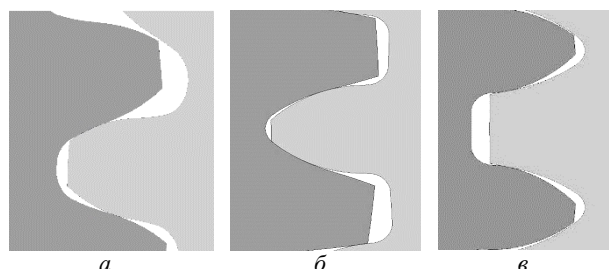


Рис. 3 – Боковые профили и переходные кривые шестерни и колеса: а – двустороннее зацепление; б, в – одностороннее зацепление

**3. Исследование коэффициента перекрытия.**

Как известно [5], коэффициент перекрытия зубчатой передачи определяется как отношение угла поворота шестерни  $\Psi_\epsilon$  к шагу зацепления  $P_a = 2\pi / z_1$ ,  $\epsilon_a = \Psi_\epsilon / P_a$ .

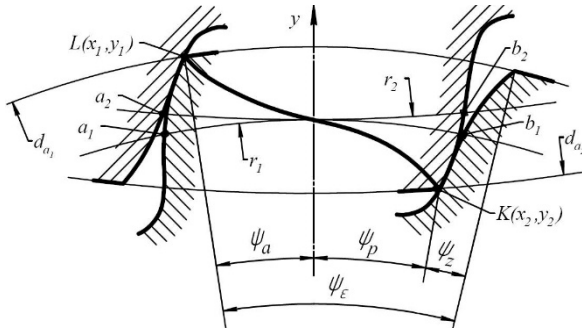


Рис. 4 – Определение коэффициента перекрытия в общем случае:  $a_1, a_2$  и  $b_1, b_2$  – начальные и конечные точки зацепления

Рассмотрим положения двух сопряженных эволютных профилей в начале и конце зацепления (рис. 4). Угол  $\Psi_\epsilon$  будет состоять из суммы углов:

$$\begin{aligned} \Psi_\epsilon &= (\Psi_{za} - \Psi_{zp}) + \Psi_a + \Psi_p = \\ &= (\arctg(x_a/y_a) - \arctg(x_p/y_p)) + \\ &+ \arctg(x_{z1}/y_{z1}) + \arctg(x_{z2}/y_{z2}). \end{aligned} \quad (5)$$

Так как профили зубчатых колес, показанных на рис. 4, ограничены окружностями вершин  $d_{a1}$  и  $d_{a2}$ , то линия зацепления используется только частично. Для ее нахождения воспользуемся уравнениями [1]:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &\in [-h_f^*, h_a^*]; \\ y_z(x_0) &= \frac{(x_0)}{y'(x_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Анализируя графики на рис 5, 6, можно заключить, что коэффициент перекрытия одностороннего эволютного зацепления несколько ниже эвольвентного, однако  $\epsilon_a > 1$ , а при  $z_1 > 120$   $\epsilon_a > 2$ .

С изменением передаточного числа  $u$   $\epsilon_a$  меняется незначительно, что позволяет использовать односторонние передачи во всем диапазоне  $u$ .

Из графиков на рис. 7, 8 видно, что, коэффициент перекрытия двустороннего зацепления находится в пределах  $\epsilon_a > 1$ .

Также данный тип зацепления можно применять для широкого диапазона передаточных чисел, но, несмотря на малый угол зацепления в полюсе  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\epsilon_a > 1,5$ .

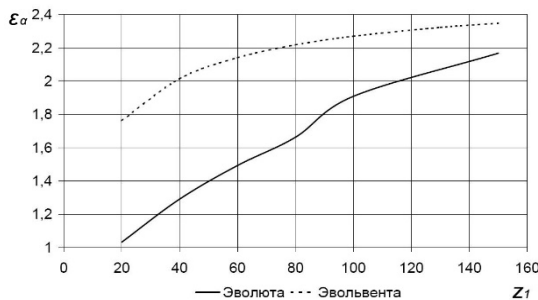


Рис. 5 – Коэффициент перекрытия односторонней эволютной передачи и аналогичной эвольвентной ( $\alpha = 15,9^\circ, u = 1$ )

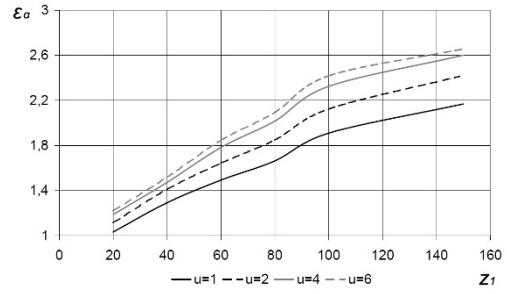


Рис. 6 – Коэффициент перекрытия односторонней эволютной передачи при различных передаточных числах

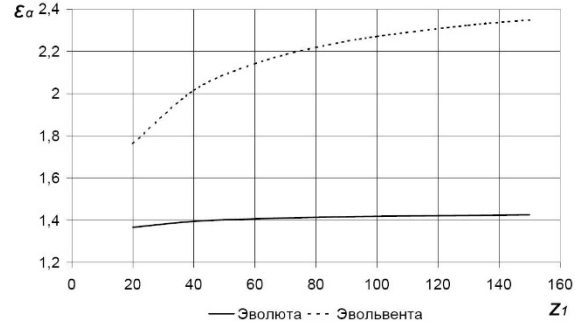


Рис. 7 – Коэффициент перекрытия двусторонней эволютной передачи и аналогичной эвольвентной ( $\alpha = 15^\circ, u = 2$ )

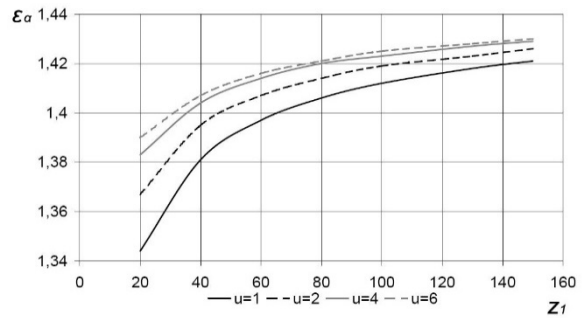


Рис. 8 – Коэффициент перекрытия двусторонней эволютной передачи при различных передаточных числах

Анализируя рис. 7 и 8, можно заключить, что предлагаемый в работе [7] вариант модификации исходного профиля может привести к неработоспособности передачи, т.к. для ее реализации необходимо, чтобы коэффициент перекрытия был больше 2. Однако двусторонняя эволютная передача может работать и без этой модификации.

**4. Определение скорости скольжения.** Скорость скольжения является важнейшим фактором, влияющим на износостойкость зубьев. Показатель, характеризующий степень взаимного скольжения профилей – коэффициент скольжения  $\lambda$  – является отношением абсолютной скорости скольжения точки профиля, находящейся в данный момент в контакте к касательной составляющей этой скорости.

Выражения для коэффициента скольжения запишем в следующем виде [5, 8]:

для шестерни

$$\lambda = V_y / V_{Fy1}, \quad (7)$$

для колеса

$$\lambda = V_y / (V_{Fy2} \cdot u), \quad (8)$$

где

$$V_y = \sqrt{(x_1(0)^2 - x_1(x_0)^2) + (y_1(0)^2 - y_1(x_0)^2)}(u + 1/u);$$

$$V_{F_y} = \omega_1 r_y \sin \alpha_y.$$

Покажем на рис. 9 удельные скольжения по высоте зуба шестерни. Анализ графиков показывает, что удельные скольжения на ножке и головке зуба в эвольвентной передаче меньше, чем у аналогичной эвольвентной, причем с уменьшением  $k$  удельное скольжение уменьшается. Здесь  $k$  – коэффициент разности эвольвентной передачи, один из параметров исходного контура, следовательно, износостойкость рассматриваемых в данной работе эвольвентных передач по параметру удельного скольжения лучше, чем у аналогичной эвольвентной.

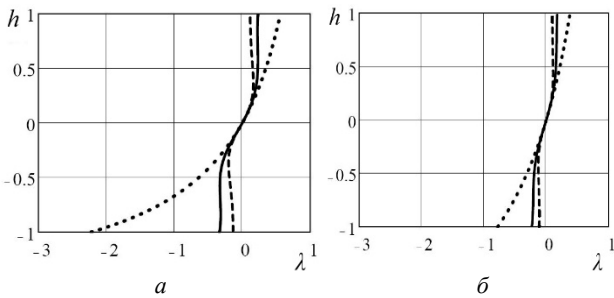


Рис. 9 – Удельная скорость скольжения:  
а –  $\alpha = 15^\circ$ , б –  $\alpha = 20^\circ$ ;

---  $k = 2$ , —  $k = 5$ , ..... – эвольвента

**5. Приведенный радиус кривизны.** Является основным геометрическим параметром, влияющим на контактные напряжения.

Для нахождения кривизны профилей использовалась известная формула дифференциальной геометрии (случай параметрического задания кривой):

$$\chi(x_0) = \frac{(y_2''(x_0) \cdot x_2'(x_0) - x_2''(x_0) \cdot y_2'(x_0))}{(x_2'^2(x_0) + y_2'^2(x_0))^{3/2}}. \quad (9)$$

На рис. 10 изображены кривизны профилей зубьев шестерни и колеса согласно тому, как они расположены при их контакте в полюсе (для внешнего зацепления).

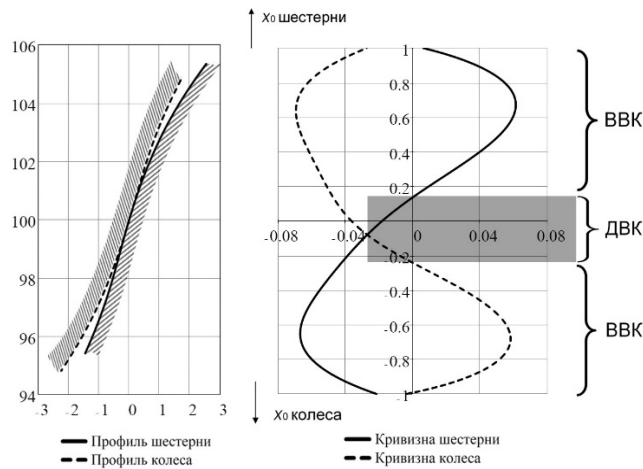


Рис. 10 – Рабочие профили шестерни и колеса двустороннего зацепления и их кривизны

В приплюсненной (рис. 10) и доплюсненной (рис. 12) зонах кривизны имеют одинаковый знак, что соответ-

ствует двояковыпуклому контакту (ДВК) с низкой контактной прочностью. Величина зоны ДВК по высоте зуба в двустороннем зацеплении зависит от числа зубьев  $z_1$  и передаточного числа  $u$  (рис. 13), а также от параметров исходного контура  $k$  и  $\alpha$  (рис. 14).

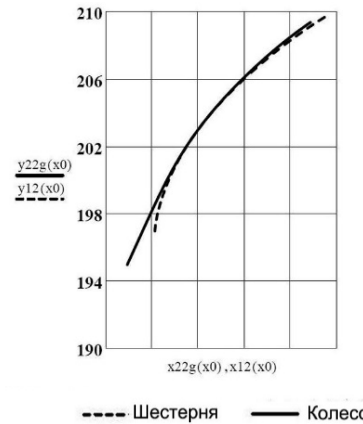


Рис. 11 – Рабочие профили шестерни и колеса одностороннего зацепления

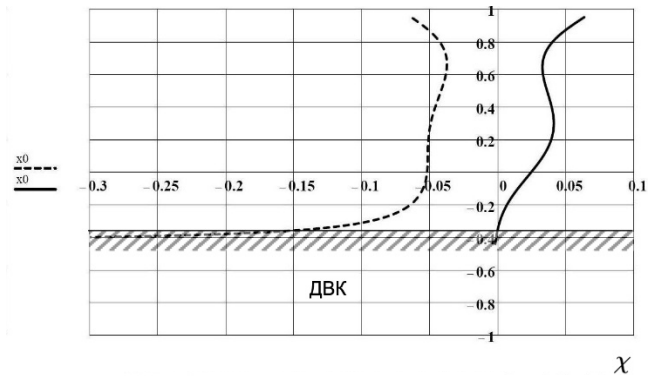


Рис. 12 – Кривизны рабочего профиля шестерни и колеса одностороннего зацепления

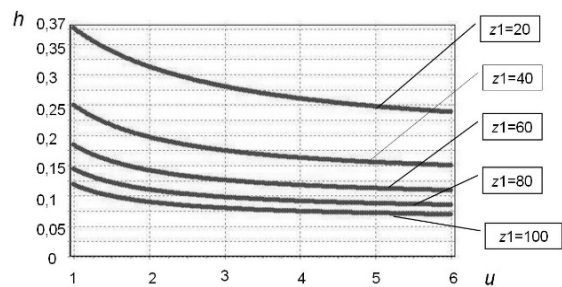


Рис. 13 – Высота зоны ДВК двустороннего зацепления относительно рабочей высоты зуба в зависимости от  $u$  и  $z_1$

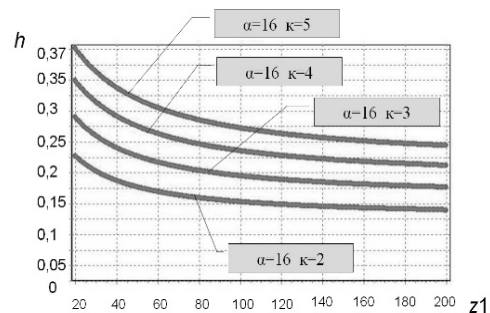


Рис. 14 – Высота зоны ДВК двустороннего зацепления относительно рабочей высоты зуба в зависимости от  $k$  и  $\alpha$

Расчет приведенного радиуса кривизны по всей высоте зуба выполнен по зависимости (10) [9, 10]. Знак "+" в знаменателе автоматически учитывает как ВВК так и ДВК,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  – радиусы кривизны зуба шестерни и колеса,  $\rho(x_0) = 1/\chi(x_0)$ ,

$$\rho_{пр}(x_0) = |\rho_1(x_0) \cdot \rho_2(x_0)| / |(\rho_1(x_0) + \rho_2(x_0))|. \quad (10)$$

На рис. 15 показаны графики приведенного радиуса кривизны для трех типов эволютных зацеплений со следующими геометрическими параметрами: коэффициент разновидности  $k = 5$ , делительный угол профиля исходного контура  $\alpha = 16^\circ$ , модуль  $m = 5$  мм, число зубьев шестерни  $z_1 = 40$ , передаточное число  $u = 2$ , а также для эвольвентной передачи с такими же параметрами.

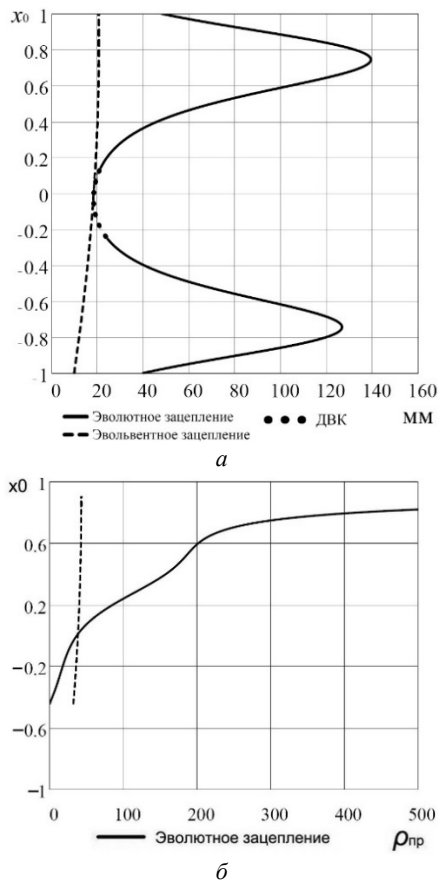


Рис. 15 – Приведенный радиус кривизны  $\rho_{пр}$ , мм: а – двустороннего зацепления; б – одностороннего зацепления

**6. Расчет контактных напряжений.** Был проведен расчет контактных напряжений  $\sigma_H$  по формуле Герца,

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{(F_n E) / (b_w \rho_{пр})}, \quad (11)$$

и проанализировано, как влияет на их величину изменение  $\rho_{пр}$ .

Исследовалась передача с теми же параметрами, что и при расчете  $\rho_{пр}$ . Дополнительно было принято: крутящий момент на шестерне  $T_1 = 1000$  Н·м, модуль упругости  $E = 2,12 \cdot 10^5$  МПа, ширина венца  $b_w = 100$  мм.

Также был проведен расчет  $\sigma_H$  для эвольвентной передачи с такими же исходными данными.

Графики изменения контактных напряжений при перемещении точки приложения нагрузки по высоте зуба в эволютном и эвольвентном зацеплениях приведены на рис. 16 (случай однопарного зацепления).

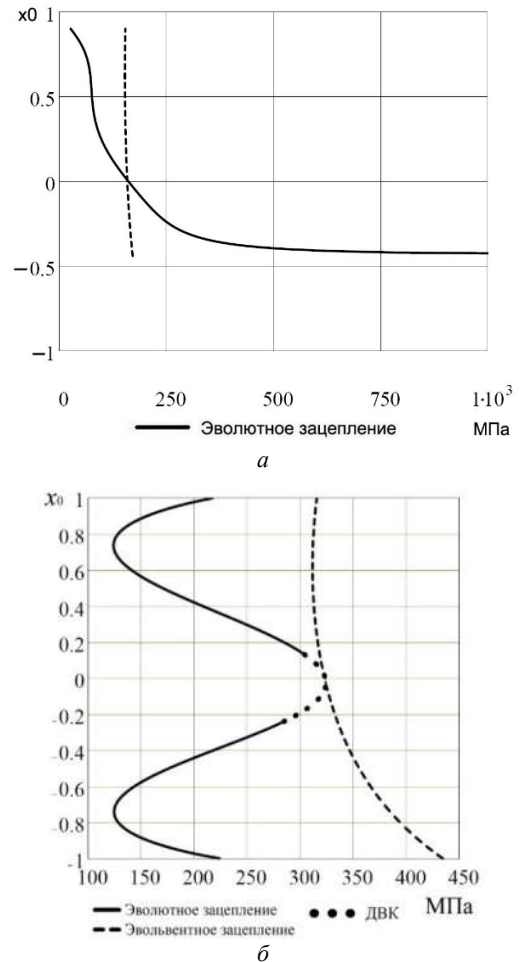


Рис. 16 – Контактные напряжения  $\sigma_H$ , МПа по высоте зуба: а – в односторонней передаче; б – в двусторонней передаче

Контактные напряжения в зацеплении также целесообразно исследовать методом конечных элементов (МКЭ), который позволяет анализировать напряженно-деформированное состояние (НДС) всего зуба, а именно, получить полную и достоверную картину распределения деформаций и напряжений по поверхности контакта и в глубине зуба. Для этого необходимо построить твердотельную модель в САД-системе Pro/ENGINEER, а на основании ее создать конечно-элементную модель и провести расчет НДС в САЕ-системе ANSYS Workbench.

Рабочий профиль и переходная кривая эволютной передачи были построены по 200 точкам в плоскости  $xu$ . Точки профиля были размещены в рабочей плоскости при помощи инструмента Datum Point. Затем по этим точкам был построен сплайн инструментом Curve. Для создания твердотельной модели использовались инструменты Extrude, Mirror, Pattern, Axis.

В качестве расчетной модели зубчатой пары использован сектор шестерни и колеса. Сектор шестерни и колеса состоит из трех зубьев и обода толщиной 3 модуля. Ширина сектора зубчатого венца равна половине заданной ширины. В САЕ-системе задается симметрия относительно срединной плоскости колеса. В зоне контакта зубьев зубчатой передачи создается отдельное тело в виде полуцилиндра. Это необходимо для задания размера конечных элементов (КЭ), сопоставимого с размером пятна контакта.

В результате создания КЭ модели было получено 247 тыс. узлов и 84 тыс. элементов. На рис. 17, а по-



казан общий вид КЭ модели, а на рис. 17, б – вставка в месте контакта зубьев с более мелкой сеткой.

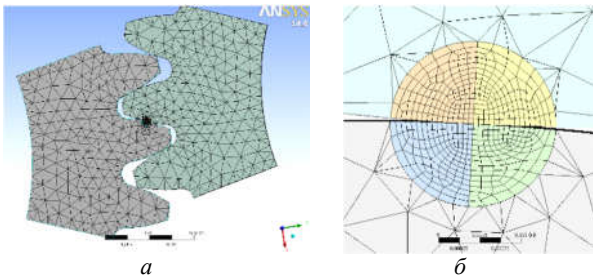


Рис. 17 – Конечно-элементная модель: а – общий вид; б – вставка в месте контакта

По результатам расчета было получено распределение контактных напряжений на компьютерной модели, которое показано на рис. 18.

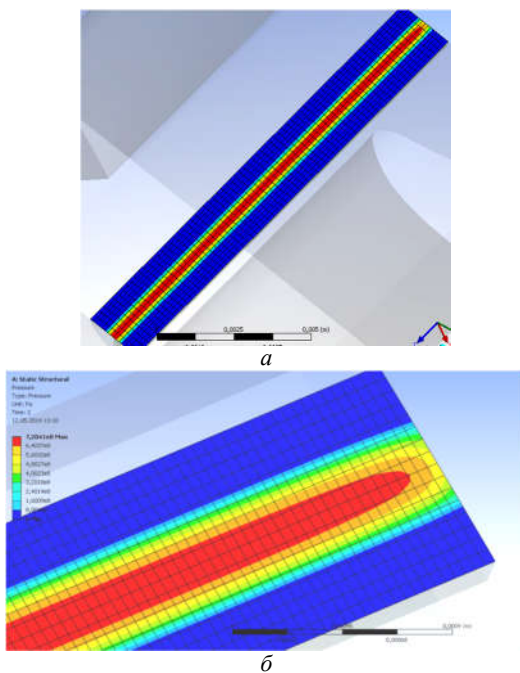


Рис. 18 – Контактные давления, МПа: а – пятно контакта по половине ширины зуба; б – краевой эффект

Расчет по формуле Герца дает одинаковые значения давлений по всей длине контактной линии. В свою очередь, расчет при помощи МКЭ учитывает краевые эффекты, поэтому в случае равной ширины зубчатых венцов шестерни и колеса контактные давления у торцов зубьев уменьшаются.

Как видно из рис. 18, б, размер КЭ в области контакта удовлетворяет условию – 4 элемента на ширину пятна контакта, что является достаточным при решении контактной задачи [11].

Был проведен повторный расчет с размером КЭ в зоне контакта – 0,05 мм с целью определения погрешности расчета МКЭ. Статистика КЭ моделей и результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Анализ результатов расчета с различными КЭ сетками

Размер элемента	Узлов, тыс.	Элементов, тыс.	Контактные давления по МКЭ, МПа	Контактные давления по Герцу, МПа
0,1 мм	247	84	310	330
0,05 мм	490	168	338	

Распределение эквивалентных напряжений по Мизесу показаны на рис. 19, а. Для большей наглядности и определения концентрации глубинных напряжений приведен рис. 19, б. Он отображает напряжения по Мизесу в сечении зуба (в данном случае – посередине венца); такая возможность является преимуществом в расчетах с помощью МКЭ.

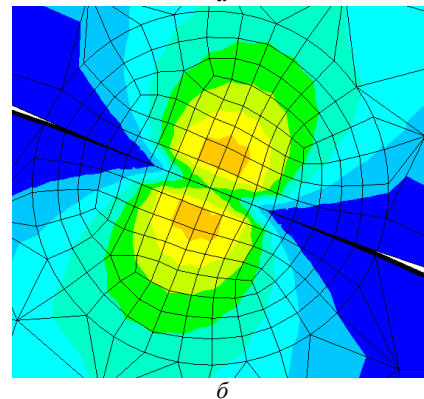
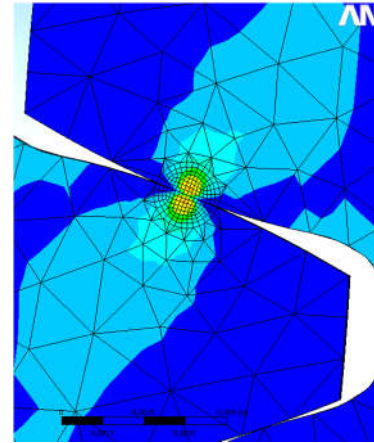


Рис. 19 – Эквивалентные напряжения, МПа: а – по Мизесу; б – по Мизесу в глубине зуба

Анализ рис. 19, а и 19, б показывает характерные концентраторы напряжений в теле зуба около пятна контакта.

### 7. Область существования эволютных передач.

При синтезе эволютной передачи для дифференциального уравнения исходного контура [1]

$$y_1'' = y_1'(1 + y_1'^2) / (-ky_1' + x_1) \quad (12)$$

необходимо задаться начальными условиями:

- коэффициент разновидности эволютной передачи  $k$ ;
- угол профиля исходного контура (угол зацепления) в полюсе  $a$ .

Варьируя эти параметры в широком диапазоне можно получить передачи с различными качественными показателями.

Рассмотренные выше рекомендации относительно области рационального существования эволютных передач очень часто является противоположными, т.к. различные варианты неравноценны по своим качественным показателям, в первую очередь – по геометрическим, что существенно затрудняет выбор проектировщиком нужных параметров исходного контура.

Зависимость геометрических параметров и качественных показателей передачи от параметров исходного

контура наиболее наглядно можно показать с помощью кривых, построенных для каждого конкретного сочетания чисел зубьев  $z_1$  и  $z_2$  в системе координат  $k$  и  $\alpha$ .

В этой системе координат каждая зубчатая пара с определенными параметрами исходного контура изображается единственной точкой.

Бесчисленное множество точек координатного поля соответствует множеству вариантов передач, которые можно принять при одном и том же значении чисел зубьев, варьируя только параметры исходного контура.

Основными геометрическими (кинематическими) требованиями, предъявляемыми к зубчатым передачам, являются:

- коэффициент перекрытия  $\varepsilon_\alpha$  больше 1 ( $\varepsilon_\alpha > 1$ );
- отсутствие интерференции зубьев, т.е. внедрение головки зуба одного колеса в переходную кривую второго;
- величина радиального зазора не менее предельного значения  $c^* = 0,2$ ;
- минимальная область двояковыпуклого контакта (ДВК) в околополусной зоне  $h$ .

Предельным значениям каждого из этих факторов в системе координат  $k$  и  $\alpha$  соответствует определенная линия, отделяющая зону допустимых значений  $k$  и  $\alpha$  от зоны недопустимых. Форма и расположение этих линий зависят от расположения основных параметров, определяющих основную геометрию зубчатой передачи.

Рассмотрим основные линии, ограничивающие выбор параметров исходного контура  $k$  и  $\alpha$  по геометрическим параметрам.

Для анализа воспользуемся уравнением исходного контура (1), подставив в него коэффициенты из работы [2] (табл. 2).

Таблица 2 – Коэффициенты уравнений исходных контуров эволютной передачи

$\alpha, \text{ }^\circ/k$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
15/2	0,259779	0,0134558	-0,0218818
15/3	0,184264	0,0129465	-0,0288067
15/4	0,141111	0,0101687	-0,0220939
15/5	0,114641	0,008447	-0,0179301
16/2	0,266753	0,0136584	-0,0222346
16/3	0,188454	0,0131191	-0,029323
16/4	0,144017	0,0102959	-0,0223966
16/5	0,116836	0,0085443	-0,0181617
18/2	0,281274	0,0140689	-0,0229508
18/3	0,197135	0,0134873	-0,030111
18/4	0,150039	0,0105609	-0,0230285
18/5	0,121391	0,0087487	-0,0186493
20/2	0,296802	0,0144931	-0,0236933
20/3	0,206366	0,0138768	-0,031043
20/4	0,156443	0,0108450	-0,0237076
20/5	0,126246	0,0089702	-0,0191787

Параметры зубчатой пары: число зубьев шестерни  $z_1 = 40$ , число зубьев колеса  $z_2 = 80$ , модуль передачи  $m = 10$  мм.

7.1. Линия, ограничивающая зону с коэффициентом перекрытия  $\varepsilon_\alpha > 1$ .

Непрерывность работы зубчатой передачи должна обеспечиваться перекрытием одной пары зубьев другой, т.е. последующая пара зубьев должна войти в зацепления до выхода из зацепления предыдущей пары зубьев. В этом случае в зацеплении будет находиться не менее одной пары зубьев.

Для рассматриваемых исходных контуров были рассчитаны коэффициенты перекрытия (табл. 3).

На основании таблицы 3 построим график, ограничивающий выбор параметров исходного контура эволютной передачи по коэффициенту перекрытия (рис. 20).

Таблица 3 – Коэффициенты перекрытия  $\varepsilon_\alpha$ .

$\alpha, \text{ }^\circ \backslash k$	2	3	4	5
15	0,97	1,14	1,24	1,33
16	0,85	0,89	0,99	1,07
18	0,85	0,89	0,97	1,04
20	0,86	0,89	0,95	1,02

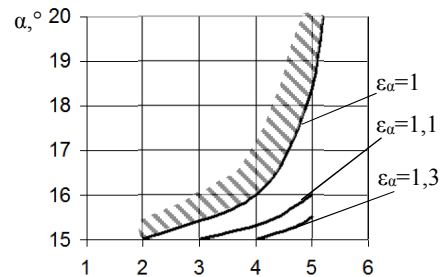


Рис. 20 – Блокирующий контур по коэффициенту перекрытия  $\varepsilon_\alpha$

7.2. Линия, ограничивающая зону с коэффициентом радиального зазора  $c^* > 0,2$ .

Для всех исследуемых контуров коэффициенты  $c^*$  составят (табл. 4):

Таблица 4 – Коэффициенты радиального зазора  $c^*$

$\alpha, \text{ }^\circ \backslash k$	2	3	4	5
15	0,113	0,184	0,222	0,248
16	0,1	0,168	0,205	0,231
18	0,074	0,137	0,173	0,197
20	0,05	0,109	0,142	0,165

На рисунке 21 показан график, ограничивающий выбор параметров исходного контура эволютной передачи по коэффициенту радиального зазора  $c^*$ .

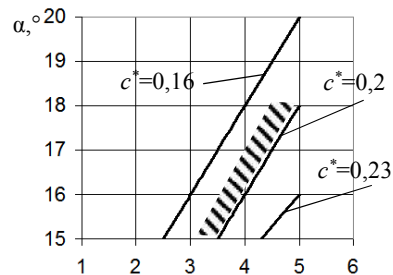


Рис. 21 – Блокирующий контур по коэффициенту радиального зазора  $c^*$

7.3. Линия, ограничивающая зону с областью ДВК  $h$ . Как было сказано выше, двояковыпуклый контакт приводит к низкой контактной прочности. Однако, рабочий профиль зубчатой передачи можно модифицировать, исключив зону ДВК [7].

Определим величину зоны ДВК по высоте зуба в долях модуля для всех рассматриваемых исходных контуров (табл. 5).

Таблица 5 – Высота зоны ДВК  $h$

$\alpha, \circ$ \ $k$	2	3	4	5
15	0,19	0,26	0,33	0,4
16	0,18	0,25	0,31	0,38
18	0,17	0,23	0,29	0,35
20	0,15	0,21	0,26	0,32

Представим данные из табл. 5 в виде графиков (рис. 22). Это позволит определить тенденции к изменению высоты зоны ДВК в зависимости от параметров  $k$  и  $\alpha$ .

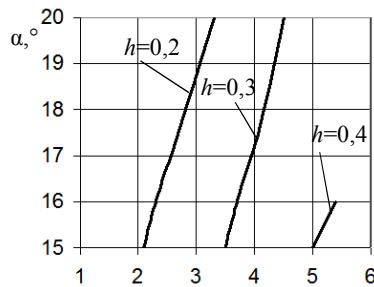


Рис. 22 – Блокирующий контур по высоте зоны ДВК  $h$ .

Собрав воедино рассмотренные выше ограничения и тенденции к изменениям свойств эволютного зацепления в зависимости от  $k$  и  $\alpha$ , построим блокирующий контур, который будет отражать область рационального существования эволютного зацепления для конкретных значений чисел зубьев  $z_1$  и  $z_2$ . На рисунке 23 представлен график зависимости между начальными условиями для синтеза исходного контура ( $k$  и  $\alpha$ ) и коэффициентами: перекрытия  $\varepsilon_\alpha$ , радиального зазора  $c^*$ , величины зоны ДВК  $h^*_{ДВК}$ . На графике отсутствуют линии, ограничивающие выбор  $k$  и  $\alpha$  по условиям отсутствия интерференции зубьев, так как на данном этапе этот вопрос находится в стадии изучения. Что касается заострения зубьев, то соответствующая линия для рассмотренных исходных контуров лежит вне области рационального существования.

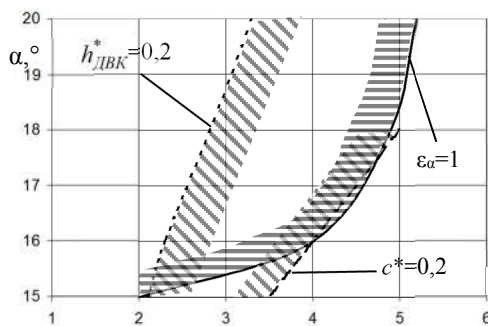


Рис. 23 – Область рационального существования эволютной передачи с параметрами  $z_1 = 40, z_2 = 80, m = 10$  мм

**Выводы:**

1. Разработка и исследование эволютных зубчатых передач является перспективной научно-практической задачей, так как позволяет улучшить массогабаритные характеристики зубчатых приводов.
2. Получены в общем виде уравнения и построены рабочие профили и переходные кривые эволютных зубьев. Они служат основой для построения геометрических и конечно-элементных моделей с целью исследования прочностных показателей зацепления.

3. Разработана методика определения коэффициента перекрытия в эволютном зацеплении. Анализ результатов расчета показал неприменимость некоторых типов исходных контуров и параметров передач, а также невозможность провести модификацию исходного контура для двусторонних передач с целью полного избавления от ДВК в приполюсной зоне.

4. Анализ графиков удельного скольжения показал, что этот параметр у эволютной передачи меньше, чем у аналогичной эвольвентной. Это объясняется меньшей абсолютной скоростью скольжения у эволютной передачи.

5. Определена зависимость между коэффициентом разновидности  $k$  и скоростью скольжения в зацеплении. Анализ графиков показал, что с уменьшением  $k$  увеличивается касательная и нормальная составляющие, но абсолютная и удельная скорости скольжения уменьшается.

6. По имеющимся уравнениям активного профиля зуба эволютной передачи была определена кривизна зубьев шестерни и колеса.

7. Анализ совместного графика кривизн зубьев шестерни и колеса показывает ДВК в приполюсной зоне, наличие которого предусматривала теория эволютного зацепления. Дальнейшие исследования выявили параметры, влияющие на величину этой зоны.

8. Рассчитаны контактные напряжения при перемещении точки приложения нагрузки по высоте зуба и проведен сравнительный анализ эволютного зацепления и аналогичного эвольвентного.

9. Построена твердотельная параметрическая модель эволютной зубчатой пары, а на основании упрощенной геометрии построена КЭ модель.

10. Был проведен расчет НДС эволютного зуба, определены контактное давление и эквивалентные напряжения по Мизесу.

11. Анализ данных, полученных при помощи МКЭ и на основе решения контактной задачи теории упругости (формула Герца) показал схожие результаты – при расчете с размером КЭ в зоне контакта, равным 0,1 мм погрешность составила 7 %, а при размере КЭ 0,05 мм – 4 %, что является вполне приемлемым.

12. По полученным данным были построены графики блокирующих контуров в системе координат  $k$  и  $\alpha$ , отображающие область допустимых параметров эволютной передачи, а также характер изменения качественных показателей.

13. Анализ блокирующего контура позволяет как выбирать из существующих профилей работоспособный, так и очерчивать тенденции к назначению параметров исходного контура при синтезе новых рациональных эволютных передач.

**Список литературы**

1. Павлов А. И. Современная теория зубчатых зацеплений. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100 с.
2. Павлов А. И. Эволютное зацепление и его характеристики // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. – Харьков, 2003. – Вып. 5. – С. 103–106.
3. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. М. : Наука. – 1968. – 584 с.
4. Протасов Р. В., Устиненко А. В. Построение рабочих профилей зубьев эволютных передач // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Машиноведение и САПР". – Харьков, 2010. – № 19. – С. 124–128.
5. Гавриленко В. А. Зубчатые передачи в машиностроении. – М. : Машгиз. – 1962. – 530 с.
6. Протасов Р. В., Устиненко А. В. Построение переходной кривой зубьев эволютных передач // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Проблемы механического привода". – Харьков, 2010. – № 27. – С. 148–153.



7. Протасов Р. В., Устиненко А. В. Исследование коэффициента перекрытия эволютных передач // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Проблемы механического привода". – Харьков, 2011. – № 29. – С. 154–164.
8. Протасов Р. В., Устиненко А. В., Кротенко Г. А., Сериков В. И. Исследование скорости скольжения профилей зубьев в эволютных передачах // Вісник НТУ "ХПІ": Зб. наук. праць. Сер. "Проблеми механічного приводу". – Харків, 2012. – № 36. – С. 127–131.
9. Протасов Р. В. Исследование приведенного радиуса кривизны в эволютных передачах // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Машиноведение и САПР". – Харьков, 2010. – № 1. – С. 37–43.
10. Протасов Р. В., Устиненко А. В. Исследование приведенного радиуса кривизны и контактных напряжений в односторонних непарных эволютных передачах // Вестник СевНТУ: Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Механика, энергетика, экология". – Севастополь, 2011. – № 120. – С. 64–69.
11. Бруяка В. А. Инженерный анализ в ANSYS Workbench. Учебное пособие / Самара : Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 271 с.
6. Protasov R. V., Ustinenko A. V. Postroenie perekhodnoi krivoi zub'ev evolunikh peredach [Construction of transition curve evolute gear teeth] Vestnik NTU KhPI, Sb. nauchn. trudov. Vyp "Problemi mekhanicheskogo privoda" [Bulletin of the NTU KhPI, Coll. of scientific papers "Mechanical Drive Problems"] – Kharkov, 2010. – No. 27 – P. 148–153.
7. Protasov R. V., Ustinenko A. V. Issledovanie koeffitsienta perekrytiya evolunikh peredach [Research coefficient overlapping evolute gear] Vestnik NTU KhPI, Sb. nauchn. trudov. Vyp "Problemi mekhanicheskogo privoda" [Bulletin of the NTU KhPI, Coll. of scientific papers "Mechanical Drive Problems"] – Kharkov, 2011. – No. 29 – P. 151–164.
8. Protasov R. V., Ustinenko A. V., Krotenko G. A., Serikov V. I. Issledovanie skorosti skolzheniya profilej zub'ev v evolunikh peredachakh [Research profiles of teeth sliding speed evolute gears] Vestnik NTU KhPI, Sb. nauchn. trudov. Vyp "Problemi mekhanicheskogo privoda" [Bulletin of the NTU KhPI, Coll. of scientific papers "Mechanical Drive Problems"] – Kharkov, 2012. – No. 36 – P. 127–131.
9. Protasov R. V. Issledovanie privedennogo radiusa krivizni v evolunikh peredachakh [The study reduced radius of curvature in the evolute gears] Vestnik NTU KhPI, Sb. nauchn. trudov. Vyp "Mashinovedenie i SAPR" [Bulletin of the NTU KhPI, Coll. of scientific papers. Knowledge about machines and CAD], Kharkov, 2010. – No. 1 – P. 37–43.
10. Protasov R. V., Ustinenko A. V. Issledovanie privedennogo radiusa krivizni i kontaktikh napryazhenij v odnostoronnikh neparnikh evolunikh peredachakh [The study reduced radius of curvature and contact stresses in one-sided unpaired evolute gears] Vestnik SevNTU, Sb. nauchn. trudov. Vyp "Mekhanika, energetika, ekologiya" [Bulletin of the SevNTU, Coll. of scientific papers. Mechanics, energy, ecology], Sevastopol, 2011. – No. 120 – P. 64–69.
11. Bruyaka V. A. Inzhenernij analiz v ANSYS Workbench. Uchebnoe posobie. [Engineering analysis in the ANSYS Workbench. Tutorial]. Samara, Samar. gos. tekhn. universitet, – 2010. – 271 p.

## References (transliterated)

1. Pavlov A. I. Sovremennaya teoriya zubchatikh zaceplenij [The modern theory of gearing]. Kharkov : KhNADU, 2005. – 100 p.
2. Pavlov A. I. Evolutnoe zaceplenie i ego kharakteristiki [Evolute gearing and its characteristics] Vestnik NTU KhPI, Sb. nauchn. trudov. [Bulletin of the NTU KhPI, Coll. of scientific papers] – Kharkov, 2003. – No. 5 – P. 103–106.
3. Litvin F. L. Teoriya zubchatikh zaceplenij. [Theory of gearing] Moscow : Nauka. – 1968. – 584 p.
4. Protasov R. V., Ustinenko A. V. Postroenie rabochikh profilej zub'ev evolunikh peredach [Construction work profile evolute gear teeth] Vestnik NTU KhPI, Sb. nauchn. trudov. Vyp "Mashinovedenie i SAPR" [Bulletin of the NTU KhPI, Coll. of scientific papers. Knowledge about machines and CAD], Kharkov, 2010. – No. 10 – P. 124–128.
5. Gavrilenko V. A. Zubcatie peredachi v mashinostroenii [Gears in engineering industry]. – Moscow : Mashgiz. – 1962. – 530 p.

Поступила (received) 22.04.2016

## Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Синтез еволютного зацеплення та аналіз його якісних показників / Р. В. Протасов, О. В. Устиненко // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х. : НТУ "ХПІ", 2016. – № 23 (1195). – С. 125–133. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2079-0791.**

**Синтез еволютного зацеплення и анализ его качественных показателей / Р. В. Протасов, А. В. Устиненко // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х. : НТУ "ХПІ", 2016. – № 23 (1195). – С. 125–133. – Библиогр.: 11 назв. – ISSN 2079-0791.**

**Synthesis evolute gearing and analysis of its qualitative indicators / R. V. Protasov, A. V. Ustinenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Problem of mechanical drive. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2016. – No. 23 (1195). – P. 125–133. – Bibliogr.: 11. – ISSN 2079-0791.**

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Протасов Роман Васильович** – Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", старший викладач кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; тел.: (057) 707-64-78; e-mail: protasov@tmm-sapr.org.

**Протасов Роман Васильевич** – Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", старший преподаватель кафедры теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин; тел.: (057) 707-64-78; e-mail: protasov@tmm-sapr.org.

**Protasov Roman Vasylovich** National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Senior Lecturer at the Department of theory and computer-aided design of mechanisms and machines; tel.: (057) 707-64-78; e-mail: protasov@tmm-sapr.org.

**Устиненко Олександр Віталійович** – кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", професор кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; тел.: (057) 707-64-78; e-mail: ustin1964@tmm-sapr.org.

**Устиненко Александр Витальевич** – кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", профессор кафедры теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин"; тел.: (057) 707-64-78; e-mail: ustin1964@tmm-sapr.org.

**Ustinenko Aleksandr Vital'evich** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, SRF, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Professor at the Department of theory and computer-aided design of mechanisms and machines; tel.: (057) 707-64-78; e-mail: ustin1964@tmm-sapr.org.