

УДК 550.388.2

С. В. ГРИНЧЕНКО

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ КВАЗИРАВНОВЕСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИОНОВ АТОМАРНОГО КИСЛОРОДА ПРИ ТЕОРЕТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ F2-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ

Представлено результати теоретичного моделювання висотного профілю електронної концентрації області F2 середньширокої магнітоспокоїної іоносфери у полуденний і опівнічний час. Розв'язок лінійного диференціального рівняння неперервності іонів атомарного кисню шукається у вигляді добутку двох функцій. Скориговано швидкості іонно-молекулярних реакцій. Обґрунтовано наближення дивергенції вектора потоку іоносферної плазми у вигляді частинної похідної по висоті. Дано оцінку вкладу радіальної складової електричного дрейфу до сумарної величини швидкості руху плазми.

Ключові слова: теоретичне моделювання іоносфери, рівняння неперервності, амбіполярна дифузія, нейтральний вітер, електричний дрейф.

Представлены результаты теоретического моделирования высотного профиля электронной концентрации области F2 среднеширотной магнитоспокойной ионосферы в полуденное и полночное время. Решение линейного дифференциального уравнения непрерывности ионов атомарного кислорода ищется в виде произведения двух функций. Скорректированы скорости ионно-молекулярных реакций. Обосновано приближение дивергенции вектора потока ионосферной плазмы в виде частной производной по высоте. Дана оценка вклада радиальной составляющей электрического дрейфа в суммарную величину скорости движения плазмы.

Ключевые слова: теоретическое моделирование ионосферы, уравнение непрерывности, амбиополярная диффузия, нейтральный ветер, электрический дрейф.

The results of theoretical simulation of the electron density altitude profile of the mid-latitude magnetically quiet F2 region at midday and midnight are presented. The solution of the linear differential equation of atomic oxygen ions continuity is searched in the form of product of two functions. The rates of ion-molecular reactions are corrected. The approximation of divergence of the ionospheric plasma flux in the form of a partial derivative with respect to altitude is substantiated. The contribution of the radial component of the electric drift to the total velocity of the plasma motion is estimated.

Keywords: theoretical simulation of ionosphere, continuity equation, ambipolar diffusion, neutral wind, electric drift.

Введение. Теоретическое моделирование предполагает расчёт физических параметров ионосферы (концентрации электронов, скорости движения плазмы, температур ионов и электронов, ионного состава) на основе решения соответствующих уравнений ионосферной теории. Только с появлением эмпирических моделей состава, температуры и ветров нейтральной атмосферы, данных о константах реакций, ионизационных свойствах молекул атмосферы стало возможным с 70-х годов расчёты на вычислительных средствах параметров ионосферы.

Новизна работы. Несмотря на множество печатных работ, посвящённых теоретическому моделированию параметров F2-области (например, [1 – 13, 16 – 17]), в них опускаются математические и численные методы решения ионосферных уравнений. Новизна предлагаемой работы как раз и заключается в описании процедуры решения уравнения непрерывности ионосферной плазмы на основе известных методов теории дифференциальных уравнений и численных методов.

Пороговые значения энергии ионизации нейтральных компонент области F2. Днём основным источником ионообразования служит солнечное экстремальное ультрафиолетовое излучение (extreme ultraviolet, EUV, XUV) [4]. Длина волны излучения в диапазоне EUV изменяется от 121 до 10 нм. Энергия фотона $\varepsilon = h\nu = \frac{h}{T} = \frac{hc}{\lambda}$. Здесь

$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Если значение длины волны λ подставлять в формулу в нанометрах, то формула для расчёта энергии фотона ε в электрон-

вольтах имеет вид: $\varepsilon = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3,00 \cdot 10^8}{\lambda \cdot 10^{-8} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}} = \frac{1243}{\lambda}$.

Диапазон значений энергии фотонов в диапазоне EUV составляет 10,3–124 эВ.

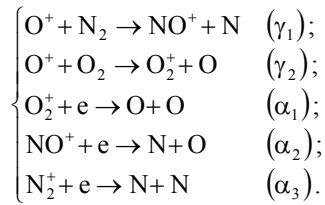
Ионизация происходит по схеме: $X + h\nu \rightarrow X^+ + e$. Основными нейтральными компонентами в интервале высот F2-области являются O, O₂, N₂ [4, 5, 6]. Наименьшую энергию ионизации имеет молекулярный кислород: $\varepsilon(\text{O}_2) = 12,08$ эВ. Это значение энергии кванта определяет верхнюю границу длины волны ионизирующего излучения, равную $\lambda(\text{O}_2) = 102,7$ нм. Энергия ионизации атомарного кислорода $\varepsilon(\text{O}) = 13,6$ эВ, а соответствующее значение ионизирующего излучения $\lambda(\text{O}) = 91,1$ нм. Для молекулярного азота – $\varepsilon(\text{N}_2) = 15,6$ эВ, $\lambda(\text{N}_2) = 79,6$ нм.

Процессы ионизации и рекомбинации в области F2. Ионно-молекулярные реакции. Уравнения баланса реакций. При ионизации нейтральных составляющих O, O₂, N₂ образуются первичные ионы O⁺, O₂⁺, N₂⁺:

$$\begin{cases} \text{O} + h\nu \rightarrow \text{O}^+ + e; \\ \text{O}_2 + h\nu \rightarrow \text{O}_2^+ + e; \\ \text{N}_2 + h\nu \rightarrow \text{N}_2^+ + e. \end{cases}$$

Эти ионы вступают в ионно-молекулярные реакции с нейтральными составляющими, а также в реакции прямой рекомбинации. Основными реакциями считаются следующие [5, 6, 7]:

© С. В. Гринченко, 2017



В приведенных реакциях участвуют ионы O^+ , O_2^+ , N_2^+ и NO^+ . Для ионов O_2^+ , N_2^+ , NO^+ , восстанавливающихся прямой рекомбинацией, считается выполненным условие фотохимического равновесия, когда скорость ионообразования под действием EUV уравновешена скоростью рекомбинации, имеющей химическую природу:

$$\begin{cases} q(O_2^+) = L(O_2^+); \\ q(N_2^+) = L(N_2^+); \\ q(NO^+) = L(NO^+). \end{cases}$$

Скорости ионообразования и рекомбинации измеряются в $\frac{1}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}$. Для ионов O^+ , восстанавливающихся через превращение в другие ионы, $q(O^+) \neq L(O^+)$. Из баланса приведенных реакций получаем:

$$\begin{cases} L(O_2^+) = \alpha_1[e][O_2^+] - \gamma_2[O^+][O_2] = q(O_2^+); \\ L(N_2^+) = \alpha_3[e][N_2^+] = q(N_2^+); \\ L(NO^+) = \alpha_2[e][NO^+] - \gamma_1[O^+][N_2] = q(NO^+) = 0. \end{cases}$$

Из условия квазинейтральности ионосферной плазмы имеем: $[e] = [O^+] + [O_2^+] + [N_2^+] + [NO^+]$.

Имеем четыре уравнения с пятью неизвестными $[e]$, $[O^+]$, $[O_2^+]$, $[N_2^+]$, $[NO^+]$. Выразим $[e]$ через $[O^+]$.

Из уравнений баланса ионов $[O_2^+]$, $[N_2^+]$, $[NO^+]$ следует, что:

$$[O_2^+] = \frac{q(O_2^+) + \gamma_2[O^+][O_2]}{\alpha_1[e]},$$

$$[N_2^+] = \frac{q(N_2^+)}{\alpha_3[e]},$$

$$[NO^+] = \frac{\gamma_1[O^+][N_2]}{\alpha_2[e]}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } [e] &= [O^+] + [O_2^+] + [N_2^+] + [NO^+] = \\ &= [O^+] + \frac{q(O_2^+) + \gamma_2[O^+][O_2]}{\alpha_1[e]} + \frac{q(N_2^+)}{\alpha_3[e]} + \frac{\gamma_1[O^+][N_2]}{\alpha_2[e]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e]^2 - [O^+][e] - \frac{q(O_2^+) + \gamma_2[O^+][O_2]}{\alpha_1} - \frac{q(N_2^+)}{\alpha_3} - \\ - \frac{\gamma_1[O^+][N_2]}{\alpha_2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e]^2 - [O^+][e] - \frac{1}{\alpha_1}(q(O_2^+) + \gamma_2[O^+][O_2]) - \\ - \frac{1}{\alpha_3}\left(q(N_2^+) + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\gamma_1[O^+][N_2]\right) = 0. \end{aligned}$$

Решение полученного квадратного уравнения относительно $[e]$ выражается формулой:

$$\begin{aligned} [e] = \frac{[O^+]}{2} + \left(\frac{[O^+]^2}{4} + \frac{1}{\alpha_1}(q(O_2^+) + \gamma_2[O^+][O_2]) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_3}(q(N_2^+) + \gamma_2[O^+][O_2]) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Скорость рекомбинации ионов O^+ выражается формулой:

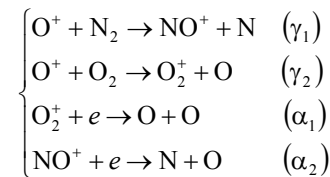
$$\begin{aligned} L(O^+) &= \gamma_1[O^+][N_2] + \gamma_2[O^+][O_2] = \\ &= (\gamma_1[N_2] + \gamma_2[O_2])[O^+] = \beta[O^+], \end{aligned}$$

где $\beta = \gamma_1[N_2] + \gamma_2[O_2]$ – линейный коэффициент рекомбинации ионов O^+ .

В максимуме слоя F2, где $[e] \cong [O^+]$, скорость рекомбинации $L(O^+) \cong \beta[e]$. Размерность $[\beta] = \frac{1}{\text{с}}$.

Уравнения баланса реакций области F2 в полуночное время. В полуночное время процессов прямой ионизации нейтральных составляющих O , O_2 , N_2 с образованием соответствующих первичных ионов O^+ , O_2^+ , N_2^+ нет. Однако в силу наличия потока ионов O^+ из внешней ионосферы последний присутствует.

Ион O^+ вступает в ионно-молекулярные реакции с нейтральными составляющими, а образовавшиеся ионы восстанавливаются в реакциях прямой рекомбинации:



В приведенных реакциях участвуют ионы O^+ , O_2^+ и NO^+ . Для ионов O_2^+ , NO^+ , восстанавливающихся прямой рекомбинацией, условие фотохимического равновесия в полуночное время сводится к уравнениям:

$$\begin{cases} L(O_2^+) = q(O_2^+) = 0; \\ L(NO^+) = q(NO^+) = 0. \end{cases}$$

Для ионов O^+ $q(O^+) \neq L(O^+)$.

Из баланса приведенных реакций получаем:

$$\begin{cases} L(O_2^+) = \alpha_1[e][O_2^+] - \gamma_2[O^+][O_2] = 0; \\ L(NO^+) = \alpha_2[e][NO^+] - \gamma_1[O^+][N_2] = 0. \end{cases}$$

Условие квазинейтральности плазмы для полуночной ионосферы: $[e] = [O^+] + [O_2^+] + [NO^+]$.

Таким образом, получено три уравнения с четырьмя неизвестными $[e]$, $[O^+]$, $[O_2^+]$, $[NO^+]$. Снова выразим $[e]$ через $[O^+]$. Из уравнений баланса ионов $[O_2^+]$, $[NO^+]$ получаем:

$$[O_2^+] = \frac{\gamma_2 [O^+] [O_2]}{\alpha_1 [e]},$$

$$[NO^+] = \frac{\gamma_1 [O^+] [N_2]}{\alpha_2 [e]}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } [e] &= [O^+] + [O_2^+] + [NO^+] = \\ &= [O^+] + \frac{\gamma_2 [O^+] [O_2]}{\alpha_1 [e]} + \frac{\gamma_1 [O^+] [N_2]}{\alpha_2 [e]}, \end{aligned}$$

$$[e]^2 - [O^+] [e] - \frac{1}{\alpha_1} \gamma_2 [O^+] [O_2] - \frac{1}{\alpha_2} \gamma_1 [O^+] [N_2] = 0.$$

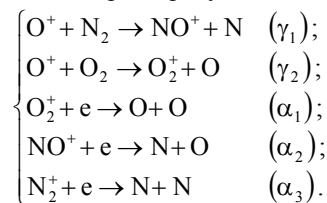
Отсюда

$$[e] = \frac{[O^+]}{2} + \sqrt{\frac{[O^+]^2}{4} + \frac{1}{\alpha_1} \gamma_2 [O^+] [O_2] + \frac{1}{\alpha_2} \gamma_1 [O^+] [N_2]}.$$

В полуночное время скорость рекомбинации ионов O^+ также выражается формулой:

$$\begin{aligned} L(O^+) &= \gamma_1 [O^+] [N_2] + \gamma_2 [O^+] [O_2] = \\ &= (\gamma_1 [N_2] + \gamma_2 [O_2]) [O^+] = \beta [O^+]. \end{aligned}$$

Скорости ионно-молекулярных реакций и реакций рекомбинации. Реакции с участием ионов области F2 характеризуются следующим набором:



Скорости реакций γ_1 , γ_2 , α_1 , α_2 , α_3 имеют размерность $\frac{\text{см}^3}{\text{с}}$.

Согласно работе [8], скорости реакций

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{cases} (1,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{300}{T_r}\right)^{(1,0 \pm 0,4)} & (T_r < 750 \text{ К}); \\ (8,0 \pm 2,0) \cdot 10^{-14} \cdot \left(\frac{T_r}{300}\right)^{(2,0 \pm 0,2)} & (T_r \geq 750 \text{ К}); \end{cases} \\ \gamma_2 &= \begin{cases} (2,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{300}{T_r}\right)^{(0,4 \pm 0,14)} & (T_r < 1800 \text{ К}); \\ (1,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{T_r}{300}\right)^{(1,2 \pm 0,13)} & (T_r \geq 1800 \text{ К}). \end{cases} \end{aligned}$$

В детерминированном случае формулы принимают вид:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{cases} 1,2 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{300}{T_r}\right)^{1,0} & (T_r < 750 \text{ К}); \\ 8,0 \cdot 10^{-14} \cdot \left(\frac{T_r}{300}\right)^{2,0} & (T_r \geq 750 \text{ К}); \end{cases} \\ \gamma_2 &= \begin{cases} 2,0 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{300}{T_r}\right)^{0,4} & (T_r < 1800 \text{ К}); \\ 1,3 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{T_r}{300}\right)^{1,2} & (T_r \geq 1800 \text{ К}). \end{cases} \end{aligned}$$

Аналитические выражения, определяющие значения соответствующей скорости реакции на заданных полуинтервалах значений температуры, в точке соединения этих полуинтервалов должны принимать одинаковые значения. Из уравнения

$$1,2 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{300}{T_r}\right)^{1,0} = 8,0 \cdot 10^{-14} \cdot \left(\frac{T_r}{300}\right)^{2,0} \quad \text{получаем}$$

значение температуры, разделяющий интервал значений аргумента при вычислении значения

$$\text{скорости } \gamma_1: \quad T_r = 300 \cdot \left(\frac{120}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \cong 739,86 \text{ К.} \quad \text{Из}$$

$$\text{уравнения} \quad 2,0 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{300}{T_r}\right)^{0,4} = 1,3 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{T_r}{300}\right)^{1,2}$$

получаем соответствующее значение температуры для

$$\text{скорости } \gamma_2: \quad T_r = 300 \cdot \left(\frac{20}{1,3}\right)^{\frac{1}{1,6}} \cong 1655,96 \text{ К.} \quad \text{С учётом}$$

выявленных необходимых изменений получаем скорректированные формулы скоростей γ_1 , γ_2 для компьютерных вычислений:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{cases} 1,2 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{300}{T_r}\right)^{1,0} & (T_r < 739,86 \text{ К}); \\ 8,0 \cdot 10^{-14} \cdot \left(\frac{T_r}{300}\right)^{2,0} & (T_r \geq 739,86 \text{ К}); \end{cases} \\ \gamma_2 &= \begin{cases} 2,0 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{300}{T_r}\right)^{0,4} & (T_r < 1655,96 \text{ К}); \\ 1,3 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{T_r}{300}\right)^{1,2} & (T_r \geq 1655,96 \text{ К}). \end{cases} \end{aligned}$$

Согласно работе [9], скорости реакций

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2,2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{300}{T_e}\right)^{0,65}; & \alpha_2 &= 6,3 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{300}{T_e}\right)^{1,0}; \\ \alpha_3 &= 2,9 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{300}{T_e}\right)^{0,33}. \end{aligned}$$

На рис. 1 изображена зависимости скоростей γ_1 , γ_2 от приведенной температуры T_r ионов и нейтралов. Рис. 2 иллюстрирует зависимость скоростей α_1 , α_2 , α_3 от температуры электронов T_e .

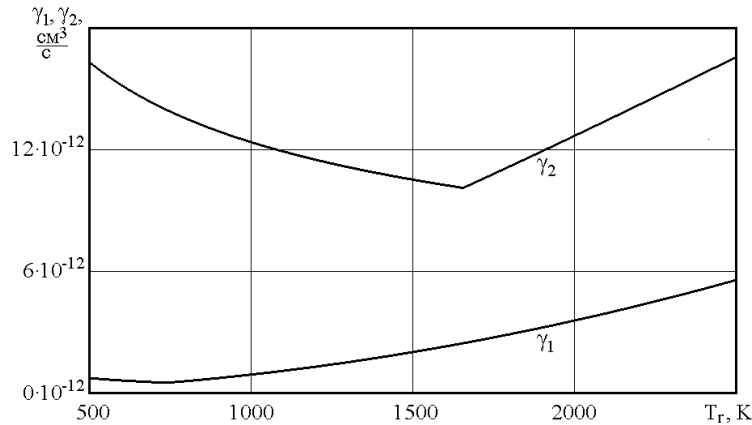


Рис. 1 – Зависимости скоростей γ_1, γ_2 от приведенной температуры T_r ионов и нейтралов

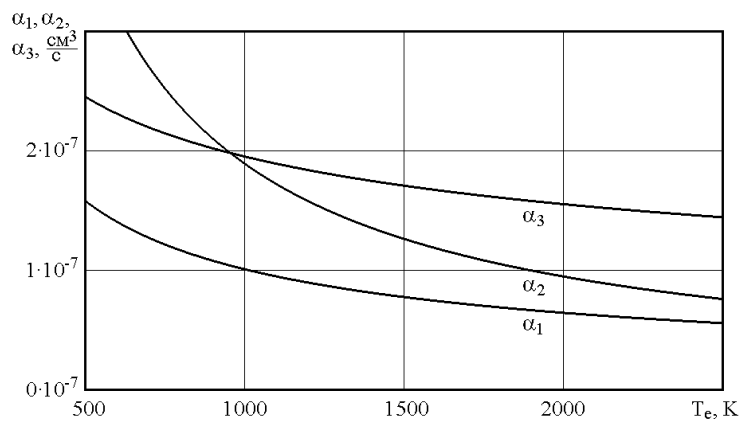


Рис. 2 – Зависимости скоростей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ от температуры электронов T_e

Приведенная температура ион - нейтральных химических реакций.

Приведенная температура $T_r = \frac{m_n T_i + m_i T_n}{m_i + m_n} = \frac{m_i m_n}{m_i + m_n} \left(\frac{T_i}{m_i} + \frac{T_n}{m_n} \right) = m_{in} \left(\frac{T_i}{m_i} + \frac{T_n}{m_n} \right)$,

где $m_n = m_{O_2}$ – приведенная ион - нейтральная масса (приведенная масса ионов и нейтралов).

Найдём выражения для приведенной температуры для конкретных реакций.

Рассмотрим реакцию $O^+ + N_2 \rightarrow NO^+ + N$. Масса иона $m_i = m_{O^+} = 16$ а.е.м., масса нейтрала $m_n = m_{N_2} = 28$ а.е.м. Приведенная температура

$$T_r = \frac{m_n T_i + m_i T_n}{m_i + m_n} = \frac{28 \cdot T_i + 16 \cdot T_n}{44}$$

Рассмотрим реакцию $O^+ + O_2 \rightarrow O_2^+ + O$. Масса нейтрала $m_n = m_{O_2} = 32$ а.е.м. Приведенная температура

$$T_r = \frac{m_n T_i + m_i T_n}{m_i + m_n} = \frac{32 \cdot T_i + 16 \cdot T_n}{48}$$

Уравнение непрерывности. При теоретическом моделировании параметров ионосферы используют уравнения непрерывности (уравнения баланса), члены которого описывают влияние каждого из процессов, изменяющих ионосферные параметры. Уравнения

непрерывности можно записать для любого иона, концентрация которого подвержена изменениям в результате процессов ионизации, рекомбинации, переноса.

Уравнение непрерывности (уравнения баланса) имеет вид [10, 11]: $\frac{dn_j}{dt} = q_j - L_j - n_j \operatorname{div} \vec{v}$, где q_j – скорость ионообразования; L_j – скорость рекомбинации; \vec{v} – скорость переноса.

Величины n_j, q_j, L_j, \vec{v} зависят от времени и координат пространства. В геофизике в качестве координат пространства принято использовать переменные x, y, z , отсчитываемые на осях, направленных от точки наблюдения соответственно к географическому полюсу, на географический восток и к центру Земли.

В ионосферной науке обычно используют высоту h над поверхностью Земли или расстояние r от центра Земли.

Точку наблюдения (начало отсчёта координаты z) можно задать значением H высоты над поверхностью Земли. В этом случае величины z и r связаны соотношением: $z = R_3 + H - r$. В центре Земли $r = 0$, $z = R_3 + H$, $h = -R_3$. На поверхности Земли $r = R_3$,

$z = H$, $h = 0$. В точке наблюдения $r = R_3 + H$, $z = 0$, $h = H$.

Для описания пространственного распределения ионосферных физических величин будем использовать координаты y , x , h , составляющие правую тройку векторов.

Слагаемые уравнения баланса могут иметь разный порядок величины в зависимости от вида ионов, высоты, времени суток, солнечной и магнитной активности. Если при некоторых условиях ионизация и рекомбинация пренебрежимо мала, то уравнение непрерывности принимает вид: $\frac{dn_j}{dt} = -n_j \operatorname{div} \vec{v}$, т.е.

$\frac{1}{n_j} \frac{dn_j}{dt} = -\operatorname{div} \vec{v}$, $\frac{d \ln n_j}{dt} = -\operatorname{div} \vec{v}$. При $\operatorname{div} \vec{v} > 0$ из объёма $dV = dydx dh$ частицы вытекают. В этом случае концентрация n_j уменьшается. При $\operatorname{div} \vec{v} < 0$ частицы втекают в объём dV – концентрация n_j увеличивается.

$$\begin{aligned} \text{Так как } \frac{dn_j}{dt} &= \frac{d}{dt} n_j(\vec{r}, t) = \frac{1}{dt} \left(\frac{\partial n_j}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial n_j}{\partial t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{dt} \left(\overrightarrow{\operatorname{grad} n_j} \cdot d\vec{r} + \frac{\partial n_j}{\partial t} dt \right) = \\ &= \operatorname{grad} n_j \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial n_j}{\partial t} = \operatorname{grad} n_j \cdot \vec{v} + \frac{\partial n_j}{\partial t}, \end{aligned}$$

то уравнение непрерывности принимает вид:

$$\operatorname{grad} n_j \cdot \vec{v} + \frac{\partial n_j}{\partial t} = q_j - L_j - n_j \operatorname{div} \vec{v},$$

$$\operatorname{grad} n_j \cdot \vec{v} + n_j \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial n_j}{\partial t} = q_j - L_j,$$

$$\operatorname{div}(n_j \vec{v}) + \frac{\partial n_j}{\partial t} = q_j - L_j,$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_j - L_j - \operatorname{div}(n_j \vec{v}).$$

Составляющая $\frac{\partial n_j}{\partial t}$ характеризует скорость

изменения концентрации иона сорта j в исследуемом элементарном объёме пространства. Величина q_j описывает увеличение концентрации за счёт процессов ионообразования. Величина L_j характеризует уменьшение ионов при их рекомбинации. Составляющая $\operatorname{div}(n_j \vec{v})$ характеризует скорость пространственного изменения потока ионов сорта j . Исходя из структуры уравнения, можно сказать, что величина $\operatorname{div}(n_j \vec{v})$ равна количеству ионов, покидающих единичный объём за единичное время за счёт переноса.

Дивергенция

$$\operatorname{div}(n_j \vec{v}) = \frac{\partial(n_j v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(n_j v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(n_j v_h)}{\partial h}.$$

Физика ионосферы такова, что скорости высотных изменений ионосферных параметров намного больше скорости их изменений в горизонтальных направлениях. Отчасти это связано с соотношением линейных расстояний. Так, длина окружности вокруг земного шара, проходящей на ионосферных широтах, намного больше радиальной толщины самой ионосферы.

Таким образом, скорость изменения ионосферных параметров вдоль широтных и долготных направлений намного меньше скорости изменения вдоль высоты. Учитывая, что $\frac{\partial(n_j v_h)}{\partial h} \gg \frac{\partial(n_j v_y)}{\partial y}$, $\frac{\partial(n_j v_h)}{\partial h} \gg \frac{\partial(n_j v_x)}{\partial x}$, получаем следующее выражение для дивергенции потока: $\operatorname{div}(n_j \vec{v}) \cong \frac{\partial(n_j v_h)}{\partial h}$.

Уравнение непрерывности переходит к виду:

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_j - L_j - \frac{\partial}{\partial h}(n_j v_h).$$

Величина v_h – это радиальная проекция вектора скорости движения плазмы, поэтому будем её обозначать как v_r . Тогда

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_j - L_j - \frac{\partial}{\partial h}(n_j v_r),$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_j - L_j - \left(n_j \frac{\partial v_r}{\partial h} + \frac{\partial n_j}{\partial h} v_r \right),$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_j - L_j - n_j \frac{\partial v_r}{\partial h} - \frac{\partial n_j}{\partial h} v_r.$$

Если $\Phi_j = n_j v_r$ – поток ионов сорта j , то

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_j - L_j - \frac{\partial}{\partial h} \Phi_j,$$

$$\int_h^{+\infty} \frac{\partial n_j}{\partial t} dh = \int_h^{+\infty} q_j dh - \int_h^{+\infty} L_j dh - \int_h^{+\infty} \frac{\partial}{\partial h} \Phi_j dh,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_h^{+\infty} n_j dh = \int_h^{+\infty} q_j dh - \int_h^{+\infty} L_j dh - \Phi_j \Big|_h^{+\infty},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N_j = \int_h^{+\infty} q_j dh - \int_h^{+\infty} L_j dh + \Phi_j,$$

где $N_j = \int_h^{+\infty} n_j dh$ – количество ионов j -компоненты в столбце выше уровня h .

В околополуденные и околополуночные часы можно считать член $\frac{\partial n_j}{\partial t}$ пренебрежительно малым по сравнению с остаточными членами уравнения. В этом случае уравнение непрерывности принимает вид: $q_j - L_j - \operatorname{div}(n_j \vec{v}) = 0$ – уравнение непрерывности квазиравновесного распределения.

Диффузия ионов O^+ в области F2. Для ионов O^+ , доминирующих в F2-области, уравнение диффузии имеет вид [11]:

$$v_{\text{диф}r} = -D_a \cdot \sin^2 I \cdot \left(\frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dh} + \frac{1}{T_i+T_e} \frac{d(T_i+T_e)}{dh} + \frac{m_i g}{k(T_i+T_e)} \right),$$

где $v_{\text{диф}r}$ – радиальная составляющая скорости амбиполярной диффузии; I – наклонение магнитного поля); $D_a = \frac{\kappa(T_i+T_e)}{m_i v_i}$ – коэффициент амбиполярной диффузии;

$$v_i = v_{O^+} = v(O^+, O) + v(O^+, O_2) + v(O^+, N_2).$$

Если $\frac{dn_i}{dh} < 0$ настолько, что

$$\frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dh} + \frac{1}{T_i+T_e} \frac{d(T_i+T_e)}{dh} + \frac{m_i g}{k(T_i+T_e)} < 0, \text{ то } v_{\text{диф}r} > 0.$$

Выражения для частот ион-нейтральных соударений $v(O^+, O)$, $v(O^+, O_2)$, $v(O^+, N_2)$ возьмём из работ [12, 13]:

$$v(O^+, O) = 1.86 \cdot 10^{-9} \left(\frac{T_r}{1000} \right)^{0.37} \cdot n(O);$$

$$v(O^+, O_2) = 1.00 \cdot 10^{-9} \cdot n(O_2);$$

$$v(O^+, N_2) = 1.08 \cdot 10^{-9} \cdot n(N_2).$$

Концентрация нейтральных газов в данных формулах подставляется в см⁻³, частоты соударений вычисляются в с⁻¹.

Здесь $T_r = \frac{m_n T_i + m_i T_n}{m_i + m_n}$ – приведенная

температура; m_i – масса иона (в данном случае $m_i = m_{O^+}$); m_n – масса иона (в данном случае $m_n = m_O$). Пренебрегая различием масс иона и нейтрала атомарного кислорода, получаем формулу для $v(O^+, O)$:

$$v(O^+, O) = 1.86 \cdot 10^{-9} \left(\frac{T_i + T_n}{2000} \right)^{0.37} \cdot n(O).$$

Уравнение непрерывности ионов O⁺ для F2-области ионосферы. Уравнение непрерывности ионов O⁺ имеет вид: $\frac{\partial n}{\partial t} = q - L - \text{div}(n\vec{v})$, где n – концентрация ионов O⁺; q – скорость ионообразования; L – скорость рекомбинации; \vec{v} – скорость переноса ионов O⁺.

Скорость изменения ионосферных параметров вдоль широтных и долготных направлений намного меньше скорости изменения вдоль высоты, поэтому

дивергенция $\text{div}(n\vec{v}) \cong \frac{\partial(nv_r)}{\partial h}$ и уравнение непрерывности переходит к виду:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = q - L - \frac{\partial}{\partial h}(nv_r).$$

Скорость движения ионов $\vec{v} = \vec{v}_{\text{диф}} + \vec{\omega} + \vec{v}_E$, где $\vec{v}_{\text{диф}}$ – скорость амбиполярной диффузии ионов O⁺; $\vec{\omega}$ – скорость движения ионов (в частности, ионов O⁺) вдоль линий магнитного поля Земли, обусловленного ветром нейтральной среды; \vec{v}_E – вектор скорости электрического дрейфа (т. е. дрейфа ларморовской траектории заряженных частиц в магнитном и электрическом полях).

Радиальная составляющая скорости движения ионов $v_r = v_{\text{диф}r} + \omega_r + v_{Er}$, где $v_{\text{диф}r}$, ω_r , v_{Er} – вертикальные составляющие соответствующих векторов. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= q - L - \frac{\partial}{\partial h}(nv_r) = \\ &= q - L - \frac{\partial}{\partial h}(n(v_{\text{диф}r} + \omega_r + v_{Er})) = \\ &= q - L - \frac{\partial}{\partial h}(nv_{\text{диф}r}) - \frac{\partial}{\partial h}(n\omega_r) - \frac{\partial}{\partial h}(nv_{Er}). \end{aligned}$$

Радиальная проекция вектора скорости движения ионов вдоль магнитной силовой линии, индуцированного нейтральными ветрами,

$$\omega_r = -(v_{\text{нф}} \cos D + v_{\text{нл}} \sin D) \cdot \cos I \cdot \sin I.$$

Радиальная составляющая скорости электрического дрейфа

$$v_{Er} = \frac{1}{B} (-E_x \cos I \cdot \sin D + E_y \cos I \cdot \cos D).$$

Подставим выражения для радиальных составляющих скорости движения в уравнение непрерывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= q - L - \frac{\partial}{\partial h} \left(n \left(-D_a \cdot \sin^2 I \cdot \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dh} + \frac{1}{T_i+T_e} \frac{d(T_i+T_e)}{dh} + \frac{m_i g}{k(T_i+T_e)} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial h} (n(-(v_{\text{нф}} \cos D + v_{\text{нл}} \sin D) \cdot \cos I \cdot \sin I)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial h} \left(n \left(\frac{1}{B} (-E_x \cos I \cdot \sin D + E_y \cos I \cdot \cos D) \right) \right) \right), \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= q - L + \frac{\partial}{\partial h} \left(D_a \cdot \sin^2 I \cdot \left(\frac{dn}{dh} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n \left(\frac{1}{T_i+T_e} \frac{d(T_i+T_e)}{dh} + \frac{m_i g}{k(T_i+T_e)} \right) \right) \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial h} (n(v_{\text{нф}} \cos D \cdot \cos I \cdot \sin I + v_{\text{нл}} \sin D \cdot \cos I \cdot \sin I)) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial h} \left(n \left(\frac{E_x}{B} \cos I \cdot \sin D - \frac{E_y}{B} \cos I \cdot \cos D \right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Обозначим } A_1 = \frac{1}{T_i+T_e} \frac{d(T_i+T_e)}{dr} + \frac{m_i g}{k(T_i+T_e)};$$

$$A_2 = v_{\text{нф}} \cos D \cdot \cos I \cdot \sin I + v_{\text{нл}} \sin D \cdot \cos I \cdot \sin I;$$

$$A_3 = \frac{E_x}{B} \cos I \cdot \sin D - \frac{E_y}{B} \cos I \cdot \cos D.$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial n}{\partial t} = q - L +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial h} \left(D_a \cdot \sin^2 I \cdot \left(\frac{dn}{dh} + A_1 n \right) \right) + \frac{\partial}{\partial h} (A_2 n) + \frac{\partial}{\partial h} (A_3 n),$$

$$q - L + \frac{\partial}{\partial h} \left(D_a \cdot \sin^2 I \cdot \left(\frac{dn}{dh} + A_1 n \right) \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial h} (A_2 n) + \frac{\partial}{\partial h} (A_3 n) - \frac{\partial n}{\partial t} = 0.$$

В околополуденное время можно считать член $\frac{\partial n}{\partial t}$ пренебрежительно малым. Тогда уравнение непрерывности существенно упрощается: из дифференциального уравнения в частных производных по двум переменным h и t с неизвестной функцией $n(h, t)$ оно превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение с неизвестной функцией $n(h)$:

$$q - L + \frac{d}{dh} \left(D_a \cdot \sin^2 I \cdot \left(\frac{dn}{dh} + A_1 n \right) \right) +$$

$$+ \frac{d}{dh} (A_2 n) + \frac{d}{dh} (A_3 n) = 0,$$

$$q - L + \frac{d}{dh} \left(D_a \cdot \sin^2 I \cdot \left(\frac{dn}{dh} + A_1 n \right) + A_2 n + A_3 n \right) = 0.$$

$$\text{Обозначим } D_1 = D_a \cdot \sin^2 I.$$

$$\text{Тогда } q - L + \frac{d}{dh} \left(D_1 \cdot \left(\frac{dn}{dh} + A_1 n \right) + A_2 n + A_3 n \right) = 0.$$

Для нахождения решения $n(h)$ полученного дифференциального уравнения второго порядка нужно задаться двумя граничными условиями. Учитывая, что в модели области F2 (210–500 км) используются описания, характерные только для данной области, зададим на высоте $h_{\text{нижн}} = 120$ км граничное условие $n(h_{\text{нижн}}) = 0$. Для высоты 600 км зададим вертикальную плотность потока ионов. Для околополуденного времени принято считать, что значение вертикальной плотности потока $\Phi_r(h) = n(h)v_r(h)$ на высоте $h_{\text{верх}} = 600$ км равно $\Phi_{\text{гверх}} = 10^8 \frac{1}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}$. В полуночное

время поток равен $-10^8 \frac{1}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}$.

Запишем аналитическое выражение $\Phi_r = nv_r = n(v_{\text{оуфр}} + \omega_r + v_{Er})$ для вертикальной плотности потока с помощью введённых выше обозначений.

Радиальные составляющие скорости движения ионов:

$$v_{\text{оуфр}} = -D_1 \cdot \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dh} + \frac{1}{T_i + T_e} \frac{d(T_i + T_e)}{dh} + \frac{m_i g}{k(T_i + T_e)} \right) =$$

$$= -D_1 \cdot \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dh} + A_1 \right);$$

$$\omega_r = -(v_{\text{нф}} \cos D + v_{\text{нл}} \sin D) \cdot \cos I \cdot \sin I = -A_2;$$

$$v_{Er} = \frac{1}{B} (-E_x \cos I \cdot \sin D + E_y \cos I \cdot \cos D) = -A_3.$$

Вертикальная плотность потока

$$\Phi_r = nv_r = n(v_{\text{оуфр}} + \omega_r + v_{Er}) =$$

$$= n \left(-D_1 \cdot \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dh} + A_1 \right) - A_2 - A_3 \right) =$$

$$= -D_1 \cdot \left(\frac{dn}{dh} + A_1 n \right) - A_2 n - A_3 n.$$

Упрощение дифференциального уравнения непрерывности путём замены неизвестной переменной. Полученное уравнение непрерывности ионов O^+ имеет вид:

$$\frac{d}{dh} \left[D_1 \left(\frac{dn}{dh} + A_1 n \right) + A_2 n + A_3 n \right] - \beta n + q = 0,$$

где $n = n(h)$ – концентрация ионов O^+ ; $q = q(h)$;

$$\beta = \beta(h); D_1 = D_a \cdot \sin^2 I = D_1(h);$$

$$A_1 = \frac{1}{T_i + T_e} \frac{d(T_i + T_e)}{dr} + \frac{m_i g}{k(T_i + T_e)} = A_1(h);$$

$$A_2 = v_{\text{нф}} \cos D \cdot \cos I \cdot \sin I + v_{\text{нл}} \sin D \cdot \cos I \cdot \sin I = A_2(h);$$

$$A_3 = \frac{E_x}{B} \cos I \cdot \sin D - \frac{E_y}{B} \cos I \cdot \cos D = A_3(h).$$

Уравнение непрерывности ионов O^+ представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с общим видом: $n'' + P(h)n' + Q(h)n = R(h)$. Стандартный подход к нахождению решения таких уравнений заключается в том, что искомое решение представляется в виде произведения двух некоторых функций: $n(h) = w(h) \cdot u(h)$. В качестве функции $w(h)$ берут частное решение некоторого дифференциального уравнения с тем расчётом, чтобы получаемое дифференциальное уравнение для нахождения общего решения $u(h)$ имело бы упрощённый вид по сравнению с исходным дифференциальным уравнением.

$$\text{Подставим выражения } n = wu, \frac{dn}{dh} = \frac{dw}{dh}u + w \frac{du}{dh}$$

в дифференциальное уравнение непрерывности:

$$\frac{d}{dh} \left[D_1 \left(\frac{dw}{dh}u + w \frac{du}{dh} + A_1 wu \right) + A_2 wu + A_3 wu \right] -$$

$$- \beta wu + q = 0,$$

$$\frac{d}{dh} \left[D_1 \left(\frac{dw}{dh}u + A_1 wu + \frac{A_2 wu}{D_1} + \frac{A_3 wu}{D_1} \right) + D_1 w \frac{du}{dh} \right] -$$

$$- \beta wu + q = 0,$$

$$\frac{d}{dh} \left[D_1 \left(\frac{dw}{dh} + \left(A_1 + \frac{A_2 + A_3}{D_1} \right) w \right) u + D_1 w \frac{du}{dh} \right] - \beta w u + q = 0.$$

Решим уравнение $\frac{dw}{dh} + \left(A_1 + \frac{A_2 + A_3}{D_1} \right) w = 0$. Это

обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dw}{w} = - \left(A_1 + \frac{A_2 + A_3}{D_1} \right) w,$$

$$\int \frac{dw}{w} = - \int \left(A_1 + \frac{A_2 + A_3}{D_1} \right) dh,$$

$$\ln|w| = - \int \left(A_1 + \frac{A_2 + A_3}{D_1} \right) dh + \ln|C|.$$

Общее решение $w = C \exp \left[- \int \left(A_1 + \frac{A_2 + A_3}{D_1} \right) dh \right]$.

В качестве частного решения, удовлетворяющего дифференциальному уравнению

$$\frac{dw}{dh} + \left(A_1 + \frac{A_2 + A_3}{D_1} \right) w = 0, \quad \text{возьмём функцию}$$

$$w(h) = \exp \left[- \int_{h_{\text{нижн}}}^h \left(A_1 + \frac{A_2 + A_3}{D_1} \right) dh \right].$$

Тогда для нахождения общего вида функции $u(h)$ получаем уравнение:

$$\frac{d}{dh} \left[D_1 w(h) \frac{du}{dh} \right] - \beta w(h) u + q = 0.$$

Это уравнение имеет более простую структуру, чем исходное уравнение

$$\frac{d}{dh} \left[D_1 \left(\frac{dn}{dh} + A_1 n \right) + A_2 n + A_3 n \right] - \beta n + q = 0.$$

Для нового уравнения найдём граничные условия.

Граничное условие $n(h_{\text{нижн}}) = 0$ трансформируется в условие $w(h_{\text{нижн}}) u(h_{\text{нижн}}) = 0$. Учитывая, что $w(h_{\text{нижн}}) = 1$, получаем нижнее граничное условие $u(h_{\text{нижн}}) = 0$.

Вертикальная плотность потока

$$\Phi_r = -D_1 \left(\frac{dn}{dh} + A_1 n \right) - A_2 n - A_3 n =$$

$$= -D_1 \left(\frac{d(wu)}{dh} + A_1 wu \right) - A_2 wu - A_3 wu =$$

$$= -D_1 \left(\frac{dw}{dh} u + w \frac{du}{dh} + A_1 wu \right) - A_2 wu - A_3 wu =$$

$$= -D_1 \left(\frac{dw}{dh} u + A_1 wu + \frac{A_2 wu}{D_1} + \frac{A_3 wu}{D_1} \right) - D_1 w \frac{du}{dh} =$$

$$= -D_1 \left(\frac{dw}{dh} + \left(A_1 + \frac{A_2 + A_3}{D_1} \right) w \right) u - D_1 w \frac{du}{dh} =$$

$$= -D_1 w \frac{du}{dh}.$$

Граничное условие $\Phi_r(h_{\text{верхн}}) = \Phi_{\text{Г верх}}$

трансформируется в условие $-D_1 w \frac{du}{dh} \Big|_{h=h_{\text{верх}}} = \Phi_{\text{Г верх}}$,

т. е. $D_1 w(h) \frac{du}{dh} \Big|_{h=h_{\text{верх}}} = -\Phi_{\text{Г верх}}$

Численное решение уравнения непрерывности методом прогонки. Для неизвестной переменной $u(h)$ уравнение и граничные условия имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dh} \left(D_1 w \frac{du}{dh} \right) - \beta w u + q &= 0; \\ u(h_{\text{нижн}}) &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_1 w \frac{du}{dh} \Big|_{h=h_{\text{верх}}} &= -\Phi_{\text{Г верх}}. \end{aligned} \right.$$

Обозначим $D_1 w = \lambda$. Величину $\Phi_{\text{Г верх}}$ переобозначим буквой Φ . Теперь уравнение и граничные условия выглядят следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dh} \left(\lambda \frac{du}{dh} \right) - \beta w u + q &= 0; \\ u(h_{\text{нижн}}) &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda \frac{du}{dh} \Big|_{h=h_{\text{верх}}} &= -\Phi. \end{aligned} \right.$$

Заметим, что граничные условия заданы в разных точках переменной h . Поэтому поставленная задача решения дифференциального уравнения с дополнительными условиями является краевой.

Численное решение краевой задачи предполагает переход к системе линейных алгебраических уравнений (разностных уравнений).

Разобьём отрезок $[h_{\text{нижн}}, h_{\text{верх}}]$ на $(n-1)$ равных частей длины Δh . Узлы разбиения обозначим как $h_1 = h_{\text{нижн}}, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n = h_{\text{верх}}$. Множество точек h_i ($i = \overline{1, n}$) образует так называемую сетку. Значения функции $u(h)$ в узлах разбиения определяют сеточную функцию $u(h_i) = u_i$.

Представляя производные в виде конечных разностей, получаем:

$$\frac{d}{dh} \left(\lambda \frac{du}{dh} \right) \Big|_{h \in [h_i, h_{i+1}]} \cong \frac{1}{\Delta h} \left(\bar{\lambda}_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta h} - \bar{\lambda}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta h} \right) \quad i = \overline{2, n-1},$$

где $\bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_{i-1} + \lambda_i}{2}$, $\bar{\lambda}_{i+1} = \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{2}$.

Разностные уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta h} \left(\bar{\lambda}_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta h} - \bar{\lambda}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta h} \right) - \beta_i w_i u_i + q_i &= 0, \\ \frac{\bar{\lambda}_{i+1} u_{i+1}}{(\Delta h)^2} - \frac{\bar{\lambda}_{i+1} u_i}{(\Delta h)^2} - \frac{\bar{\lambda}_i u_i}{(\Delta h)^2} + \frac{\bar{\lambda}_i u_{i-1}}{(\Delta h)^2} - \beta_i w_i u_i + q_i &= 0, \\ \frac{\bar{\lambda}_i u_{i-1}}{(\Delta h)^2} + \left(-\frac{\bar{\lambda}_{i+1} u_i}{(\Delta h)^2} - \frac{\bar{\lambda}_i u_i}{(\Delta h)^2} - \beta_i w_i u_i \right) + \frac{\bar{\lambda}_{i+1} u_{i+1}}{(\Delta h)^2} + q_i &= 0, \\ \frac{\bar{\lambda}_i}{(\Delta h)^2} u_{i-1} - \left(\frac{\bar{\lambda}_{i+1}}{(\Delta h)^2} + \frac{\bar{\lambda}_i}{(\Delta h)^2} + \beta_i w_i \right) u_i + \frac{\bar{\lambda}_{i+1}}{(\Delta h)^2} u_{i+1} + q_i &= 0, \end{aligned}$$

где $\beta_i = \beta(h_i)$, $w_i = w(h_i)$, $u_i = u(h_i)$.

Обозначим: $A_i = \frac{\bar{\lambda}_i}{(\Delta h)^2}$; $B_i = \frac{\bar{\lambda}_{i+1}}{(\Delta h)^2} + \frac{\bar{\lambda}_i}{(\Delta h)^2} + \beta_i w_i$;

$$C_i = \frac{\bar{\lambda}_{i+1}}{(\Delta h)^2}.$$

Рассматриваемое численное уравнение принимает вид:

$$A_i u_{i-1} - B_i u_i + C_i u_{i+1} + F_i = 0, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Запишем граничные условия для полученного численного уравнения. Граничное условие $u(h_{\text{нижн}}) = 0$ непрерывной функции $u(h)$ переходит в равенство $u_1 = 0$. Граничное условие $\lambda \left. \frac{du}{dh} \right|_{h=h_{\text{верх}}} = -\Phi$

переходит в равенство:

$$\frac{\lambda_{n-1} + \lambda_n}{2} \cdot \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta h} = -\Phi,$$

т.е. $u_n - u_{n-1} = \frac{-2\Delta h \cdot \Phi}{\lambda_{n-1} + \lambda_n}$, $u_n = u_{n-1} - \frac{2\Delta h \cdot \Phi}{\lambda_{n-1} + \lambda_n}$.

Таким образом, поставленная краевая задача в конечно-разностном виде записывается в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$A_i u_{i-1} - B_i u_i + C_i u_{i+1} + F_i = 0 \quad (i = \overline{2, n-1})$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} u_1 = 0; \\ u_n = u_{n-1} - \frac{2\Delta h \cdot \Phi}{\lambda_{n-1} + \lambda_n}. \end{cases}$$

Одним из наиболее употребительных способов решения разностных уравнений является метод прогонки. Алгоритм решения разностного уравнения:

$$A_i u_{i-1} - C_i u_i + B_i u_{i+1} + F_i = 0 \quad (i = \overline{2, n-1})$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} u_1 = p_1 u_2 + q_1; \\ u_n = p_2 u_{n-1} + q_2 \end{cases}$$

методом правой прогонки состоит из рекуррентных формул вычисления коэффициентов a_i, b_i и значений u_i искомой функции $u(h)$ в узлах h_i разбиения отрезка изменения аргумента [14, 15]:

$$\begin{cases} a_2 = p_1; \\ b_2 = q_1; \\ a_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i a_i} \quad (i = \overline{2, n-1}); \\ b_{i+1} = \frac{A_i b_i + F_i}{C_i - A_i a_i} \quad (i = \overline{2, n-1}); \\ u_n = \frac{p_2 b_n + q_2}{1 - p_2 a_n}; \\ u_i = a_{i+1} u_{i+1} + b_{i+1} \quad (i = \overline{n-1, 1}). \end{cases}$$

Первая система равенств предназначена для вычисления $a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_n, b_n$. Вторая система равенств, используя предварительно вычисленные коэффициенты a_i, b_i , позволяет вычислить решение u_n, u_{n-1}, \dots, u_1 .

Для рассматриваемой задачи коэффициенты граничных условий $p_1 = 0, q_1 = 0, p_2 = 0,$

$$q_2 = -\frac{2\Delta h \cdot \Phi}{\lambda_{n-1} + \lambda_n}.$$

Поэтому алгоритм решения разностного уравнения непрерывности представляет совокупность следующих действий:

$$\begin{cases} a_2 = 0; \\ b_2 = 0; \\ a_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i a_i} \quad (i = \overline{2, n-1}); \\ b_{i+1} = \frac{A_i b_i + F_i}{C_i - A_i a_i} \quad (i = \overline{2, n-1}); \\ u_n = \frac{b_n - \frac{2\Delta h \cdot \Phi}{\lambda_{n-1} + \lambda_n} q_2}{1 - a_n} = \frac{b_n (\lambda_{n-1} + \lambda_n) - 2\Delta h \cdot \Phi}{(\lambda_{n-1} + \lambda_n)(1 - a_n)}; \\ u_i = a_{i+1} u_{i+1} + b_{i+1} \quad (i = \overline{n-1, 1}). \end{cases}$$

Оценка вклада радиальной составляющей электрического дрейфа в суммарную величину скорости движения плазмы. Для вычисления составляющих вектора напряжённости электрического поля ионосферы воспользуемся моделью HMR-1990 (Heppner-Maynard-Rich Electric Field Model 1990) электрического поля ионосферы [16, 17]. Согласно модели HMR-1990 величина электрического поля зависит от геомагнитной широты подсолнечной точки, геомагнитной широты и геомагнитного местного времени точки наблюдения, уровня солнечной активности, определяемого индексом $F_{10.7}$, и уровня возмущения магнитного поля, определяемого индексом K_p .

Произведём оценку величины электрического дрейфа на геомагнитной широте $\theta = 50^\circ$ в околополуденное время равноденствия на высоте 300 км, индексе $F_{10.7} = 100$ при различных значениях индекса K_p .

При $K_p = 1$ величина E_x меридиональной составляющей и величина E_y зональной

меридиональної складової напруженості електричного поля змінюються в межах від $-0,3$ до $+0,3$ мВ/м. При $K_p = 3$ величини E_x і E_y змінюються в межах від $-1,0$ до $+1,0$ мВ/м. При $K_p = 5$ величини E_x і E_y змінюються в межах від $-2,0$ до $+2,0$ мВ/м.

Планетарний індекс K_p має діапазон значень від 0 до 9. Індекс K_p визначається з точністю до $1/3$. Індeksi K_p і A_p пов'язані таблицею значень. Так значенню $K_p = 0$ відповідає $A_p = 0$. Для $K_p = 1 - A_p = 4$; для $K_p = 9 - A_p > 400$.

Якщо K -індекс – це квазілогарифмічний індекс (збільшується приблизно на одиницю при збільшенні возмущеності приблизно в два рази), то індекс A_p є лінійним індексом (збільшення возмущення в декілька раз дає таке ж збільшення індекса).

Магнітне поле Землі вважається спокійним при $K_p < 2$ або $A_p < 6$.

В окологоденне час при $K_p = 1$ складові вектора напруженості електричного поля $E_x = -0,1$ мВ/м і $E_y = -0,025$ мВ/м. Висчислюється для цього випадку

радіальна складові швидкості електричного дрейфу дорівнює приблизно $-0,1$ м/с.

Таким чином, при теоретичному моделюванні спокійної середньширотної іоносфери внесок електричного дрейфу в рух іоносферної плазми на висотах області F2 нехвилюєтно малий. При возмущених же умовах внесок електричного дрейфу буде значимим. Тому при теоретичному розрахунок висотної профілю електронної концентрації магнітоспокоїної середньширотної іоносфери впливом іоносферного електричного поля можна нехвилюєтно.

Результати теоретичного моделювання висотної профілю електронної концентрації в повночасне і окологоденне час. На рис. 3 представлені результати теоретичного розрахунок висотної профілю електронної концентрації в денний і літній сонячний час в географічній точці Радара некогерентного розсіяння Інституту іоносфери. Магнітна активність характеризується індексом $A_p = 2$. Сонячна активність описується індексом $F_{10.7} = 100$.

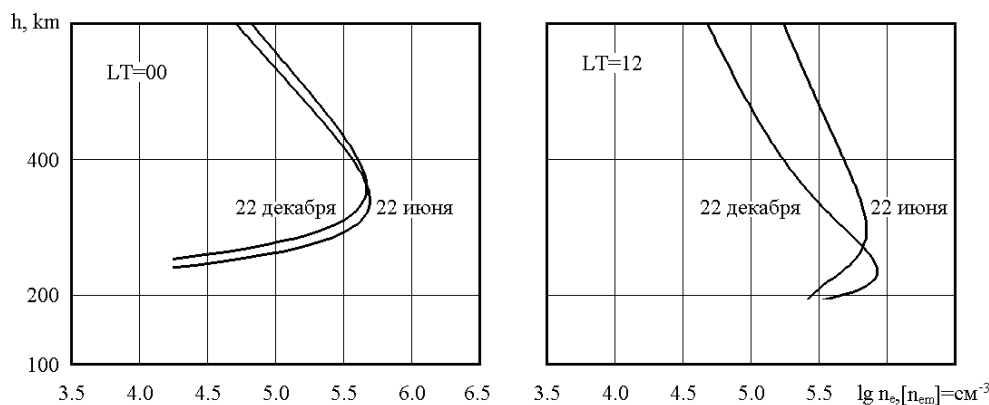


Рис. 3 – Теоретично висчислені висотні профілі електронної концентрації в повночасне і окологоденне час

Теоретичні розрахунок збігаються з ефектом сезонної аномалії F2-шару, який заключається в перевищенні зимніх денних значень електронної концентрації $n_{e,max}F2$ в максимумі шару над літніми. Відомо, що явище сезонної аномалії спостерігається тільки в північній півкулі на середніх широтах. При інших умовах спостерігається перевищення літніх значень електронної концентрації і висоти шару F2 над зимніми. Винятком можуть бути деякі екваторіальні області.

В повночасне час зимні значення електронної концентрації менше літніх значень.

В окологоденне час розрахункові значення висоти шару F2 літом більше, ніж зимою. В повночасне час літні значення висоти менше зимніх значень.

Висновки. Виконані теоретичні розрахунок дають результати, що збігаються з загальноприйнятими поглядами на добові варіації висоти і електронної концентрації шару F2 в

магнітоспокоїних умовах. Це свідчить про правильність формул, що описують алгоритм рішення рівняння неперервності, так і о правильності роботи комп'ютерної програми.

Список літератури

1. Kohl H. Some effects of neutral air winds on the ionospheric F-layer / H. Kohl, J.W. King, D. Eccles // J. of Atm. and Ter. Physics. – 1968. – Vol. 30 – P. 1733–1744.
2. Schunk R. W. A mathematical Model of the Middle and High Latitude Ionosphere / R. W. Schunk // Pure Appl. Geophys. – 1988. – Vol. 127, Issue 2–3. – P. 255–303.
3. Mikhailov A. Self-consistent modeling of the daytime electron density profile in the ionospheric F region / A. Mikhailov, K. Schlegel // Ann. Geophysicae. – 1997. – Vol. 15, Issue 3. – P. 314–326.
4. Huffman R. E. Atmospheric Ultraviolet Remote Sensing / R. E. Huffman – San Diego: Academic Press, Inc, 1992. – 317 p.
5. Hargreaves J. K. The Solar-Terrestrial Environment / J. K. Hargreaves – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. – 420 p.
6. Иванов-Холодный Г. С. Прогнозирование состояния ионосферы (детерминированный подход) / Г. С. Иванов-Холодный, А. В. Михайлов – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1980. – 192 с.

- Gombosi T. I. Physics of the Space Environment / T. I. Gombosi – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 339 p.
- McFarland M. Flow-drift technique for ion mobility and ion-molecule reaction rate constant measurements. II. Positive ion reaction of N^+ , O^+ , and N_2^+ with O_2 and O^+ with N_2 from thermal to ~ 2 eV / M. McFarland, D. L. Albritton, F. C. Fehsenfeld, E. E. Ferguson, and A. L. Schmeltekopf // J. Chem. Phys. – 1973. – Vol. 59, N. 12. – P. 6620–6628.
- Pharo M. W. An experimental study of the ion chemistry and thermal balance in the E- and F-regions above Wallops Island / M. W. Pharo, L. R. Scott, H. G. Mayr, L. H. Brace, and H. A. Taylor // Planet. Space Sci. – 1971. – Vol. 19. – P. 15–15.
- Pross G. W. Physics of the Earth's Space Environment. An Introduction / G. W. Pross – Berlin: Springer, 2004. – 513 p.
- Kelley M. The Earth's Ionosphere. Plasma Physics and Electrodynamics. 2nd Edition / M. Kelley – San Diego: Academic Press, Inc, 2009. – 576 p.
- Stubbe P. Frictional forces and collision frequencies between moving ion and neutral gases. Technical Report / P. Stubbe – Greenbelt, Maryland: Goddard Space Flight Center, 1967. – 41 p.
- Stubbe P. Frictional forces and collision frequencies between moving ion and neutral gases / P. Stubbe // J. of Atm. and Ter. Physics. – 1968. – Vol. 30, N. 12. – P. 1965–1985.
- Godunov S. K. Difference Schemes. An Introduction to the Underlying Theory / S. K. Godunov, V. S. Ryabenkii – Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1987. – 488 p.
- Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes / A. A. Samarskii – New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. – 786 p.
- Heppner J. P. Empirical High-Latitude Electric Field Model / J. P. Heppner, N. C. Maynard // J. of Geoph. Res. – 1987. – Vol. 92, N. A5. – P. 4467–4489.
- Rich F. J. Consequences of Using Simple Analytical Functions for the High-Latitude Convection Electric Field / F. J. Rich, N. C. Maynard // J. of Geoph. Res. – 1989. – Vol. 94, N. A4. – P. 3687–3701.
- Mikhailov A., Schlegel K. Self-consistent modeling of the daytime electron density profile in the ionospheric F region. Ann. Geophysicae. 1997. Vol. 15, Issue 3. P. 314–326. Print.
- Huffman R. E. Atmospheric Ultraviolet Remote Sensing. San Diego: Academic Press, Inc, 1992. 317 p. Print.
- Hargreaves J. K. The Solar-Terrestrial Environment. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 420 p. Print.
- Ivanov-Holodnyj G.S., Mihajlov A.V. Prognozirovanie sostojanija ionosfery (determinirovannyj podhod) [Forecasting the state of ionosphere (determined approach)]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1980. 192 p.
- Gombosi T. I. Physics of the Space Environment. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 339 p. Print.
- McFarland M, Albritton D. L., Fehsenfeld F. C., Ferguson E. E., and Schmeltekopf A. L. Flow-drift technique for ion mobility and ion-molecule reaction rate constant measurements. II. Positive ion reaction of N^+ , O^+ , and N_2^+ with O_2 and O^+ with N_2 from thermal to ~ 2 eV. J. Chem. Phys. 1973. Vol. 59, N. 12. P. 6620–6628. Print.
- Pharo M. W., Scott L. R., Mayr H. G., Brace L. H., and Taylor H. A.. An experimental study of the ion chemistry and thermal balance in the E- and F-regions above Wallops Island. Planet. Space Sci. 1971. Vol. 19. P. 15–15. Print.
- Pross G. W. Physics of the Earth's Space Environment. An Introduction. Berlin: Springer, 2004. 513 p. Print.
- Kelley M. The Earth's Ionosphere. Plasma Physics and Electrodynamics. 2nd Edition. San Diego: Academic Press, Inc, 2009. 576 p. Print.
- Stubbe P. Frictional forces and collision frequencies between moving ion and neutral gases. Technical Report. Greenbelt, Maryland: Goddard Space Flight Center, 1967. 41 p. Print.
- Stubbe P. Frictional forces and collision frequencies between moving ion and neutral gases. J. of Atm. and Ter. Physics. 1968. Vol. 30, N. 12. P. 1965–1985. Print.
- Godunov S. K., Ryabenkii V.S. Difference Schemes. An Introduction to the Underlying Theory. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1987. 488 p. Print.
- Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. 786 p. Print.
- Heppner J. P., Maynard N.C. Empirical High-Latitude Electric Field Model. J. of Geoph. Res. 1987. Vol. 92, N. A5. P. 4467–4489. Print.
- Rich F. J., Maynard N.C. Consequences of Using Simple Analytical Functions for the High-Latitude Convection Electric Field. J. of Geoph. Res. 1989. Vol. 94, N. A4. P. 3687–3701. Print.

References (transliterated)

- Kohl H, King J.W., Eccles D. Some effects of neutral air winds on the ionospheric F-layer. J. of Atm. and Ter. Physics. 1968. Vol. 30 P. 1733–1744. Print.
- Schunk R. W. A mathematical Model of the Middle and High Latitude Ionosphere. Pure Appl. Geophys. 1988. Vol. 127, Issue 2–3. P. 255–303. Print.

- Kohl H, King J.W., Eccles D. Some effects of neutral air winds on the ionospheric F-layer. J. of Atm. and Ter. Physics. 1968. Vol. 30 P. 1733–1744. Print.
- Schunk R. W. A mathematical Model of the Middle and High Latitude Ionosphere. Pure Appl. Geophys. 1988. Vol. 127, Issue 2–3. P. 255–303. Print.

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Розв'язок рівняння неперервності квазірівноважного розподілу іонів атомарного кисню при теоретичному моделюванні електронної концентрації F2-області іоносфери / С. В. Грінченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Радіофізика та іоносфера. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 47 (1268). – С. 33 – 43. – Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2078-9998.

Решение уравнения непрерывности квазиравновесного распределения ионов атомарного кислорода при теоретическом моделировании электронной концентрации F2-области ионосферы / С. В. Гринченко // Вестник НТУ «ХПИ». Серія: Радіофізика та іоносфера. – Х.: НТУ «ХПИ», 2017. – № 47 (1268). – С. 33 – 43. – Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2078-9998.

The solution of the continuity equation of the quasi-equilibrium atomic oxygen ions distribution for the theoretical simulation of the F2 region electron density / S. V. Grinchenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Radiophysics and ionosphere. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – No. 47 (1268). – P. 33 – 43. – Bibliogr.: 17. – ISSN 2078-9998.

Відомості про автора / Сведения об авторе / About the Author

Грінченко Сергій Володимирович – Інститут іоносфери НАН та МОН України, м. Харків, науковий співробітник; тел.: (066) 963-18-85; e-mail: svgrinchenko@gmail.com.

Гринченко Сергей Владимирович – Інститут іоносфери НАН та МОН України, г. Харків, науковий співробітник; тел.: (066) 963-18-85; e-mail: svgrinchenko@gmail.com.

Grinchenko Sergii Volodymyrovych – Institute of ionosphere of NAS and MES of Ukraine, Kharkiv, researcher; tel.: (066) 963-18-85; e-mail: svgrinchenko@gmail.com.