

С. В. ГРИНЧЕНКО

РАСЧЁТ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ ВОСХОДА И ЗАХОДА СОЛНЦА ПУТЁМ ЗАДАНИЯ ДАННЫХ ЧЕТЫРЁХЛЕТНЕГО ЦИКЛА ИЗМЕНЕНИЙ СОЛНЕЧНОГО СКЛОНЕНИЯ И МЕСТНОГО ВРЕМЕНИ ВЕРХНЕЙ КУЛЬМИНАЦИИ

Проведен математический анализ существования решения уравнения для вычисления моментов времени и азимутов восхода и захода светил. Для компьютерного вычисления моментов времени и азимутов восхода и захода Солнца предложено использовать файлы данных четырёхлетнего цикла изменения склонения и местного времени верхней кульминации Солнца. Это позволяет избежать использования эмпирических формул вычисления склонения и местного времени верхней кульминации Солнца, вносящих дополнительные погрешности в вычисление координат Солнца. Числовые данные файлов задаются с точностью до угловых и временных минут. Проиллюстрированы годовые вариации склонения и местного времени верхней кульминации Солнца. Показано, что учёт вариаций местного времени верхней кульминации Солнца может привести к погрешностям вычисления моментов времени восхода и захода, достигающим значений около 15-ти минут. Указаны корректирующие поправки в вычислении моментов времени восхода и захода при использовании геоцентрических координат. По представленным формулам расчёта моментов восхода и захода Солнца с помощью написанной на *Visual Fortran* программы представлены результаты расчётов в течение года с учётом рефракции света и углового размера солнечного диска. Вычисляемые значения зенитного расстояния Солнца, а также моменты времени восхода и захода Солнца имеют погрешность до 1-ой минуты (угла и времени соответственно). Показано, что даты, имеющие самый ранний восход, сдвинуты на несколько суток от дат, характеризующихся самым поздним в году заходом. Аналогично, сутки с самым поздним восходом отличаются от суток с самым ранним заходом. Показаны области применения астрономических расчётов координат движения Солнца по небесной сфере в задачах теоретического моделирования ионосферных параметров. Указаны особенности проведения астрономических расчётов зенитного угла Солнца с целью последующего вычисления скорости ионизации, вызванные отличием длин волн видимого диапазона и экстремального ультрафиолета, ионизирующего нейтральные газы атмосферы.

Ключевые слова: движение Солнца по небесной сфере, местное время, поясное время, всемирное время, время восхода и захода, склонение Солнца, время верхней кульминации Солнца.

С. В. ГРИНЧЕНКО

РОЗРАХУНОК МОМЕНТІВ ЧАСУ СХОДУ ТА ЗАХОДУ СОНЦЯ ШЛЯХОМ ЗАДАННЯ ЧОТИРИРІЧНОГО ЦИКЛУ ЗМІН СОНЯЧНОГО СХИЛЕННЯ ТА МІСЦЕВОГО ЧАСУ ВЕРХНЬОЇ КУЛЬМІНАЦІЇ

Проведено математичний аналіз існування рішення рівняння для обчислення моментів часу та азимутів сходу і заходу світил. Для комп'ютерного обчислення моментів часу та азимутів сходу і заходу Сонця запропоновано використовувати файли даних чотирирічного циклу зміни схилення і місцевого часу верхньої кульмінації Сонця. Це дозволяє уникати використання емпіричних формул обчислення схилення і місцевого часу верхньої кульмінації Сонця, що вносять додаткові похибки в обчислення координат Сонця. Числові дані файлів задаються з точністю до кутових і часових хвилин. Проілюстровано річні варіації схилення і місцевого часу верхньої кульмінації Сонця. Показано, що неврахування варіацій місцевого часу верхньої кульмінації Сонця може привести до похибок обчислення моментів часу сходу і заходу, які досягають значень близько 15-ти хвилин. Вказані коригувальні поправки для обчислення моментів часу сходу і заходу при використанні геоцентричних координат. За представленими формулами розрахунку моментів сходу і заходу Сонця за допомогою написаної на *Visual Fortran* програми представлені результати розрахунків протягом року з урахуванням рефракції світла та кутового розміру сонячного диску. Обчислювані значення зенітної відстані Сонця, а також моменти часу сходу і заходу Сонця мають похибку до 1-єї хвилини (кута і часу відповідно). Показано, що дати, які мають найбільш ранній схід, є зсунутими на кілька діб від дат, що характеризуються самим пізнім у році заходом. Аналогічно, доба з самим пізнім сходом відрізняється від доби з найбільш раннім заходом. Показано сфери застосування астрономічних розрахунків координат руху Сонця по небесній сфері у задачах теоретичного моделювання іоносферних параметрів. Вказано особливості проведення астрономічних розрахунків зенітного кута Сонця з метою подальшого обчислення швидкості іонізації, викликані відмінністю довжин хвиль видимого діапазону і екстремального ультрафіолету, що іонізують нейтральні гази атмосфери.

Ключові слова: рух Сонця по небесній сфері, місцевий час, поясний час, всесвітній час, час сходу та заходу, схилення Сонця, час верхньої кульмінації Сонця.

S. V. GRINCHENKO

CALCULATION OF THE RISING AND SETTING TIMES OF THE SUN BY SETTING THE DATA OF THE FOUR-YEAR CYCLE OF SOLAR DECLINATION AND LOCAL TIME OF THE UPPER CULMINATION

A mathematical analysis of the existence of a solution of equation for calculating times and azimuths of rising and setting of stars is carried out. For computer calculation of the rising and setting time and azimuths it is offered to use the data files of the four-year cycle of change of declination and local time of the upper culmination of the Sun. It allows avoiding the empirical formulas of calculation of declination and local time of the upper culmination, which introduce additional errors in the calculation of the coordinates of the Sun. Numeric data of files are set to within angular and time minutes. The annual variations of the declination and local time of the upper culmination of the Sun are illustrated. It is shown that the neglect of variations of the local time of the upper culmination of the Sun can result in the errors of calculation of rising and setting times, reaching values about 15 minutes. The corrections are specified in the formula for calculation of the rising and setting times at the use of geocentric coordinates. According to the presented formulas for calculating the sunrise and sunset times by means of the program written in *Visual Fortran*, the results of calculations within a year are presented, taking into account the refraction of light and the angular size of the solar disk. The calculated values of the zenith distance of the Sun and rising and setting times have errors to 1 minute (angle and time, respectively). It is shown, that the dates having the earliest rising, are shifted for some days from the dates characterized by latest setting in year. Similarly, days with the latest rising differ from days with the earliest setting. The applications of astronomical calculations of the Sun coordinates in the problems of theoretical ionosphere simulation are shown. The

features of realization of the astronomic calculations of zenith angle of a Sun with the purpose of subsequent calculation of the ionization rate, caused by the difference in the wavelengths of the visible range and the extreme ultraviolet ionizing the neutral gases of the atmosphere, are indicated.

Keywords: motion of the Sun on the celestial sphere, local time, standard time, universal time, rising and setting times, declination of the Sun, time of the upper culmination of the Sun.

Введение. Особенности вычисления зенитного угла Солнца и моментов восхода и захода в задачах ионосферного моделирования. Астрономическая задача вычисления координат Солнца актуальна, в частности, при решении задач эмпирического и теоретического моделирования ионосферы. Блок астрономических расчётов координат движения Солнца по небесной сфере необходим для любой программы теоретического моделирования ионосферных параметров. Значения зенитного угла Солнца требуются, например, при теоретическом расчёте скорости ионообразования [1–3].

Вычисление зенитного угла Солнца с целью последующего вычисления скорости ионообразования имеет некоторые особенности. Так как в дневное время лучи света, ионизирующие нейтральные газы атмосферы, не проходят приземные слои, то учёт рефракции при расчёте зенитного угла Солнца не требуется. При расчёте ионообразования, когда Солнце находится ниже математического горизонта ионосферных высот, и солнечные лучи проходят через приземную атмосферу, рефракцией света также можно пренебречь, учитывая то, что волны экстремального ультрафиолета (10–120 нм) существенно короче волн видимого света (380–780 нм).

При рассмотрении в ионосферных исследованиях моментов времени восхода и захода Солнца следует иметь в виду, что на ионизацию оказывают влияние восход и заход на уровне горизонта ионосферных высот (совпадающие по времени с восходом и заходом на уровне поверхности Земли), а не появление и исчезновение Солнца на ионосферных высотах, когда солнечные лучи теряют свою ионизирующую способность при прохождении через приземные слои атмосферы.

Новизна работы. Сама по себе задача вычисления времени восхода и захода Солнца является классической. Однако, несмотря на множество книг по астрономии [5–13], в которых рассматривается задача вычисления моментов времени восхода и захода светил (в частности, и Солнца), в них опускаются некоторые математические выкладки, связанные с этой задачей. Новизна предлагаемой работы, в частности, как раз и заключается в математическом анализе наличия решения уравнения для вычисления моментов времени восхода и захода светил.

Другая новизна состоит в использовании файлов данных четырёхлетнего цикла изменения склонения и местного времени верхней кульминации Солнца. Вместо вычислений этих параметров компьютерная программа считывает эти данные из файлов. Это позволяет избавиться от погрешностей вычисления склонения и местного времени верхней кульминации Солнца по эмпирическим формулам. Числовые

данные файлов задаются с точностью до угловых и временных минут. Поэтому и вычисляемые значения зенитного расстояния Солнца, а также моменты времени восхода и захода Солнца имеют погрешность до 1 мин (угла и времени соответственно).

Вычисление зенитного угла светил в топоцентрических координатах. В астрономической справочной литературе даются геоцентрические координаты светил, т. е. координаты для воображаемого наблюдателя, находящегося в центре Земли. Согласно формулам перехода от координат первой экваториальной системы (склонения δ и часового угла t) к координатам горизонтальной системы координат (зенитного расстояния z и азимута A) зенитное расстояние какого-либо светила [4–6]:

$$\cos z = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos t,$$

где φ – широта точки наблюдения.

Координаты светил, используемые в этой формуле, являются топоцентрическими координатами, т. е. координатами для наблюдателя, находящегося на поверхности Земли. Топоцентрический и геоцентрический зенитные расстояния светила отличаются друг от друга (рис. 1).

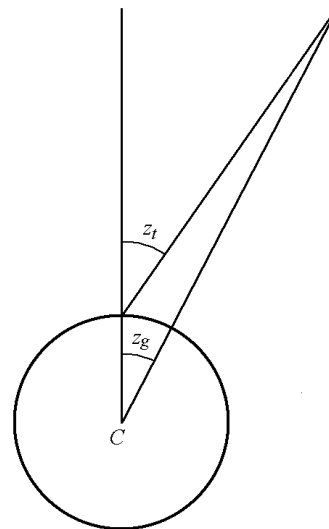


Рис. 1. Топоцентрическое и геоцентрическое зенитные расстояния светила

Вычисление зенитного угла Солнца. Зенитный угол Солнца:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos t = \\ &= \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos(T_m - T_{up.cul.}), \end{aligned}$$

где T_m – местное время данного меридиана в угловой мере; $T_{up.cul.}$ – местное время верхней кульминации Солнца.

Тогда

$$\cos z = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos 15^\circ(T_m - T_{up.cul.}),$$

где T_m и $T_{m\text{up.cul.}}$ измеряются в часах.

Местное время данного меридиана T_m и местное время верхней кульминации Солнца $T_{m\text{up.cul.}}$ переобозначим с целью упрощения записи формул: $T_m = LT$ и $T_{m\text{up.cul.}} = LT_0$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \cos z &= \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos t = \\ &= \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos 15^\circ (LT - LT_0). \end{aligned}$$

Условие наличия восхода и захода светила.

Направление оси мира в системе небесных координат при любом положении наблюдателя на земной поверхности не меняется. При перемещении наблюдателя по земной поверхности направление отвесной линии меняется и составляет различные углы с осью вращения. Взаимное расположение кругов и точек небесной сферы, связанных с осью мира и с отвесной линией, зависит, следовательно, от направления отвесной линии, т.е. от положения наблюдателя на поверхности Земли. При этом справедливо следующее утверждение: высота h_p полюса мира всегда равна астрономической широте φ места наблюдения [7, 8]. Справедливость этого утверждения непосредственно следует из рисунка 2, на котором $\angle PON = h_p$ и $\angle OCq = \varphi$ – углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

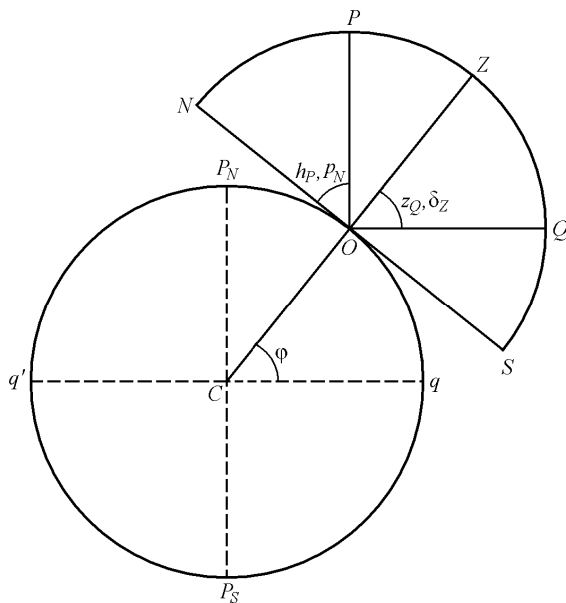


Рис. 2. Сечение небесной сферы и поверхности Земли в плоскости небесного меридиана

Так как высота h_p полюса мира (точки P) равна астрономической широте φ места наблюдения: $h_p = \varphi$, то зенитное расстояние z_Q верхней точки экватора (точки Q) также равно астрономической широте φ места наблюдения: $z_Q = \varphi$. Высота h_p полюса мира и зенитное расстояние z_Q верхней точки экватора являются элементами горизонтальной системы небесных координат.

Полярное расстояние p_N точки севера (точки N) в первой экваториальной системе координат есть высота h_p полюса мира (точки P) в горизонтальной системе небесных координат. Поэтому $p_N = \varphi$.

Склонение δ_z зенита (точки Z) в первой экваториальной системе координат есть зенитное расстояние z_Q верхней точки экватора (точки Q) в горизонтальной системе небесных координат. Поэтому $\delta_z = \varphi$.

Таким образом, в горизонтальной системе координат небесной сферы: $h_p = \varphi$, $z_Q = \varphi$. А в первой экваториальной системе координат: $p_N = \varphi$, $\delta_z = \varphi$. Тогда в горизонтальной системе координат: $z_p = 90^\circ - \varphi$, $h_Q = 90^\circ - \varphi$. А в первой экваториальной системе координат: $\delta_N = 90^\circ - \varphi$, $p_Z = 90^\circ - \varphi$.

Суточные параллели светил, движущихся по небесной сфере, либо пересекают математический горизонт в двух точках, либо целиком располагаются над ним, либо находятся под ним. Это явление зависит от положения суточной параллели вдоль оси мира небесной сферы, задаваемого величиной склонения δ , и степени наклона оси мира к математическому горизонту, определяемой величиной высоты $h_p = \varphi$ северного полюса мира, т.е. географической широтой φ места наблюдения. Точка пересечения светилом восточной части истинного горизонта является точкой восхода светила, точка пересечения западной части истинного горизонта – точкой захода светила.

Если склонение светила равно нулю ($\delta = 0$), т.е. его суточная плоскость совпадает с небесным экватором, то оно восходит точно в точке востока и заходит точно в точке запада. Для положительных значений географической широты, светила со значениями склонения $\delta > 0$ восходят на северо-востоке и заходят на северо-западе, а светила со значениями склонения $\delta < 0$ восходят на юго-востоке и заходят на юго-западе.

На рисунке 3 изображено сечение небесной сферы в плоскости небесного меридиана. Пусть точка наблюдения (центр небесной сферы) характеризуется положительным значением географической широты φ . Для данного значения широты $\varphi > 0$ светила, чье склонение удовлетворяет неравенству $|\delta| < 90^\circ - \varphi$, имеют точки восхода и захода. Светила со склонениями $\delta = \pm(90^\circ - \varphi)$ при движении по суточным параллелям касаются горизонта. Для данного положительного значения географической широты φ суточные параллели светил с положительными склонениями $\delta > 90^\circ - \varphi$ располагается над горизонтом, а суточные параллели светил со склонениями $\delta < -(90^\circ - \varphi)$ располагаются под горизонтом.

Для общего случая любого знака широты условие того, что суточная параллель светила имеет

точки восхода и захода (светило восходит и заходит), имеет вид: $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$. Если $|\delta| > 90^\circ - |\varphi|$, то суточная параллель светила не пересекает математический горизонт и светило является либо незаходящим (суточная параллель располагается целиком над горизонтом) либо невосходящим (суточная параллель располагается целиком под горизонтом).

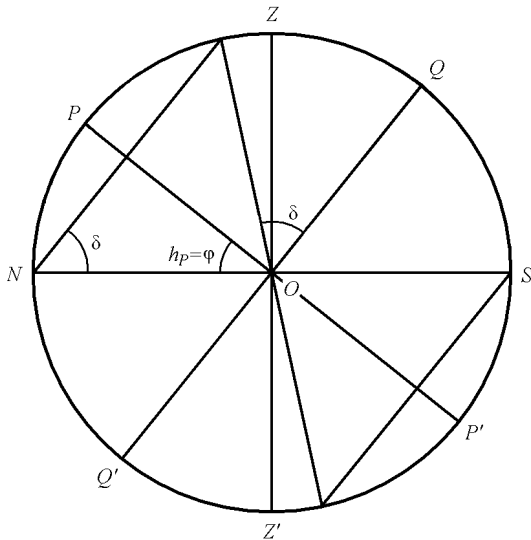


Рис. 3. Касание суточной параллели математического горизонта

Анализ наличия решения уравнения для вычисление моментов времени восхода и захода светила. В моменты времени восхода и захода светила:

$$\cos(90^\circ) = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos t = 0.$$

Отсюда получаем формулу для вычисления часового угла светила в момент его восхода и захода:

$$\cos t = -\frac{\sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi}.$$

Условие того, что суточная параллель светила имеет точки восхода и захода (светило восходит и заходит): $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$.

Исследуем наличие решения у формулы

$$\cos t = -\frac{\sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi} = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{ctg} \varphi} = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)}, \quad \text{т. е.}$$

выполнение неравенства $|\cos t| < 1$ при выполнении условия $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$.

Рассмотрим различные комбинации знаков у величин δ и φ .

1) Пусть $\delta > 0$, $\varphi > 0$. Условие $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$ принимает вид: $\delta < 90^\circ - \varphi$.

Исследуемая формула: $\cos t = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)}$.

Учитывая, что $0^\circ < \delta < 90^\circ$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ (т. е.

$0^\circ < 90^\circ - \varphi < 90^\circ$), получаем, что $\operatorname{tg} \delta > 0$, $\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) > 0$. Поэтому $\cos t = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)} < 0$.

Функция $\operatorname{tg} x$ – монотонно возрастающая на интервале $(-90^\circ, +90^\circ)$. Так как $\delta < 90^\circ - \varphi$, то $\operatorname{tg} \delta < \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)$. Учитывая положительность тангенса

$\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)$, получаем, что $\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)} < 1$, $-\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)} > -1$.

Таким образом, $-1 < \cos t = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)} < 0$.

Тогда $|\cos t| < 1$.

2) Рассмотрим случай $\delta > 0$, $\varphi < 0$. Условие $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$ принимает вид: $\delta < 90^\circ + \varphi$.

Преобразуем исследуемую формулу:

$$\cos t = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(\varphi + 90^\circ)}.$$

Учитывая, что $0^\circ < \delta < 90^\circ$, $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$ (т. е. $0^\circ < \varphi + 90^\circ < 90^\circ$), получаем, что $\operatorname{tg} \delta > 0$, $\operatorname{tg}(\varphi + 90^\circ) > 0$. Тогда $\cos t = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(\varphi + 90^\circ)} > 0$.

Функция $\operatorname{tg} x$ монотонно возрастает на интервале $(-90^\circ, +90^\circ)$, при этом $\delta < 90^\circ + \varphi$. Следовательно, $\operatorname{tg} \delta < \operatorname{tg}(\varphi + 90^\circ)$. Учитывая положительность тангенса $\operatorname{tg}(\varphi + 90^\circ)$, получаем, что $\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(\varphi + 90^\circ)} < 1$.

Тогда $0 < \cos t = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(\varphi + 90^\circ)} < 1$. Неравенство $|\cos t| < 1$ справедливо.

3) Рассмотрим случай, когда $\delta < 0$, $\varphi > 0$. Условие $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$ принимает вид: $-\delta < 90^\circ - \varphi$, т. е. $\delta > \varphi - 90^\circ$.

Косинус часового угла $\cos t = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(\varphi - 90^\circ)}$.

Так как $-90^\circ < \delta < 0^\circ$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ (т. е. $-90^\circ < \varphi - 90^\circ < 0^\circ$), то $\operatorname{tg} \delta < 0$, $\operatorname{tg}(\varphi - 90^\circ) < 0$.

Косинус $\cos t = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(\varphi - 90^\circ)} > 0$.

Так как $\delta > \varphi - 90^\circ$, то $\operatorname{tg} \delta > \operatorname{tg}(\varphi - 90^\circ)$. Учитывая, что $\operatorname{tg}(\varphi - 90^\circ) < 0$, получаем, что $\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(\varphi - 90^\circ)} < 1$.

Итак, $0 < \cos t = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(\varphi - 90^\circ)} < 1$, $|\cos t| < 1$.

4) Рассмотрим случай, когда $\delta < 0$, $\varphi < 0$. Условие $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$ принимает вид: $-\delta < 90^\circ + \varphi$, т. е. $\delta > -(90^\circ + \varphi)$.

$$\text{Косинус часового угла } \cos t = -\frac{\text{tg } \delta}{\text{tg}(90^\circ - \varphi)} = \\ = \frac{\text{tg } \delta}{\text{tg}(\varphi + 90^\circ)}.$$

Так как $-90^\circ < \delta < 0^\circ$, $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$ (т. е. $0^\circ < \varphi + 90^\circ < 90^\circ$), то $\text{tg } \delta < 0$, $\text{tg}(\varphi + 90^\circ) > 0$.

$$\text{Поэтому } \cos t = \frac{\text{tg } \delta}{\text{tg}(\varphi + 90^\circ)} < 0.$$

Из неравенства $-\delta < \varphi + 90^\circ$ следует, что $\text{tg}(-\delta) < \text{tg}(\varphi + 90^\circ)$. Учитывая положительность

второго тангенса, получаем, что $\frac{\text{tg}(-\delta)}{\text{tg}(\varphi + 90^\circ)} < 1$,

$$\frac{\text{tg } \delta}{\text{tg}(\varphi + 90^\circ)} > -1.$$

Таким образом, $-1 < \cos t = \frac{\text{tg } \delta}{\text{tg}(\varphi + 90^\circ)} < 0$, $|\cos t| < 1$.

Анализ наличия решения уравнения для вычисление азимутов восхода и захода светил. Согласно одной из формул перехода от координат (z, A) горизонтальной системы координат к координатам (δ, t) первой экваториальной системы: $\sin \delta = \cos z \cdot \sin \varphi - \sin z \cdot \cos \varphi \cdot \cos A$.

В моменты восхода и захода светил топоцентрический зенитный угол $z = 90^\circ$, поэтому:

$$\sin \delta = \cos(90^\circ) \cdot \sin \varphi - \sin(90^\circ) \cdot \cos \varphi \cdot \cos A, \\ \sin \delta = -\cos \varphi \cdot \cos A,$$

$$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} = -\frac{\sin \delta}{\sin(90^\circ - \varphi)}.$$

Исследуем наличие решения A полученного уравнения для вычисления азимутов восхода и захода светила при выполнении условия $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$.

Рассмотрим различные случаи знаков величин δ и φ .

1) Пусть $\delta > 0$, $\varphi > 0$. Условие $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$ принимает вид: $\delta < 90^\circ - \varphi$.

$$\text{Исследуемая формула: } \cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin(90^\circ - \varphi)}.$$

Учитывая, что $0^\circ < \delta < 90^\circ$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ (т. е. $0^\circ < 90^\circ - \varphi < 90^\circ$), получаем, что $\sin \delta > 0$, $\sin(90^\circ - \varphi) > 0$. Следовательно,

$$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin(90^\circ - \varphi)} < 0.$$

Функция $\sin x$ – монотонно возрастающая на интервале $(-90^\circ, +90^\circ)$. Так как $\delta < 90^\circ - \varphi$, то

$\sin \delta < \sin(90^\circ - \varphi)$. Учитывая положительность синуса $\sin(90^\circ - \varphi)$, получаем, что $\frac{\sin \delta}{\sin(90^\circ - \varphi)} < 1$, $-\frac{\sin \delta}{\sin(90^\circ - \varphi)} > -1$.

Таким образом, $-1 < \cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin(90^\circ - \varphi)} < 0$.

Тогда $|\cos A| < 1$.

2) Рассмотрим случай $\delta > 0$, $\varphi < 0$. Условие $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$ принимает вид: $\delta < 90^\circ + \varphi$.

Преобразуем исследуемую формулу: $\cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin(90^\circ - \varphi)} = -\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi + 90^\circ)}$.

Учитывая, что $0^\circ < \delta < 90^\circ$, $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$ (т. е. $0^\circ < \varphi + 90^\circ < 90^\circ$), получаем, что $\sin \delta > 0$, $\sin(\varphi + 90^\circ) > 0$. Поэтому $\cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi + 90^\circ)} < 0$.

Функция $\sin x$ монотонно возрастает на интервале $(-90^\circ, +90^\circ)$, при этом $\delta < 90^\circ + \varphi$. Следовательно, $\sin \delta < \sin(\varphi + 90^\circ)$. Учитывая положительность синуса $\sin(\varphi + 90^\circ)$, получаем, что

$$\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi + 90^\circ)} < 1, \quad -\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi + 90^\circ)} > -1.$$

Тогда $-1 < \cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi + 90^\circ)} < 0$. Неравенство $|\cos A| < 1$ выполняется.

3) Рассмотрим случай, когда $\delta < 0$, $\varphi > 0$. Условие $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$ принимает вид: $-\delta < 90^\circ - \varphi$, т. е. $\delta > \varphi - 90^\circ$.

$$\text{Косинус азимута } \cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \\ = \frac{\sin \delta}{\sin(\varphi - 90^\circ)}.$$

Так как $-90^\circ < \delta < 0^\circ$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ (т. е. $-90^\circ < \varphi - 90^\circ < 0^\circ$), то $\text{tg } \delta < 0$, $\text{tg}(\varphi - 90^\circ) < 0$.

$$\text{Косинус } \cos A = \frac{\sin \delta}{\sin(\varphi - 90^\circ)} > 0.$$

Так как $\delta > \varphi - 90^\circ$, то $\sin \delta > \sin(\varphi - 90^\circ)$. Учитывая, что $\sin(\varphi - 90^\circ) < 0$, получаем, что

$$\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi - 90^\circ)} < 1.$$

Итак, $0 < \cos A = \frac{\sin \delta}{\sin(\varphi - 90^\circ)} < 1$, $|\cos A| < 1$.

4) Рассмотрим случай, когда $\delta < 0$, $\varphi < 0$. Условие $|\delta| < 90^\circ - |\varphi|$ принимает вид: $-\delta < 90^\circ + \varphi$, т. е. $\delta > -(90^\circ + \varphi)$.

$$\text{Косинус азимута } \cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin(90^\circ - \varphi)} = -\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi + 90^\circ)}.$$

Так как $-90^\circ < \delta < 0^\circ$, $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$ (т. е. $0^\circ < \varphi + 90^\circ < 90^\circ$), то $\sin \delta < 0$, $\sin(\varphi + 90^\circ) > 0$.

$$\text{Поэтому } \cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi + 90^\circ)} > 0.$$

Из неравенства $-\delta < \varphi + 90^\circ$ следует, что $\sin(-\delta) < \sin(\varphi + 90^\circ)$. Учитывая положительность второго косинуса, получаем, что $\frac{\sin(-\delta)}{\sin(\varphi + 90^\circ)} < 1$,

$$-\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi + 90^\circ)} < 1.$$

Таким образом, $0 < \cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin(\varphi + 90^\circ)} < 1$, $|\cos A| < 1$.

Корректирующие поправки в вычислении моментов времени восхода и захода при использовании геоцентрических координат. Если какая-нибудь точка небесного свода восходит или заходит, то её видимое зенитное расстояние $z' = 90^\circ$. Её истинное зенитное расстояние z в этот момент вследствие рефракции больше видимого на величину $\rho = 35'$. Скорректированное с учётом рефракции зенитное расстояние точки в момент её восхода или захода равно: $z = z' + \rho = 90^\circ + \rho$.

Кроме того, для Солнца и Луны, имеющих заметные размеры, координаты относятся к центру их видимого диска, а восходом (или заходом) этих светил считается момент появления (или исчезновения) на горизонте верхней точки края диска. Скорректированное с учётом углового размера светила зенитное расстояние центра диска этих светил в момент восхода или захода будет больше зенитного расстояния верхней точки края диска на величину видимого углового радиуса R диска: $z = z' + \rho + R = 90^\circ + \rho + R$. У Солнца и Луны их видимые угловые радиусы приблизительно одинаковы и в среднем равны $16'$.

Скорректированное с учётом параллакса зенитное расстояние точки в момент её восхода или захода равно: $z = z' + \rho + R - p_{hor} = 90^\circ + \rho + R - p_{hor}$.

Таким образом, в общем случае формула для вычисления часового угла светила в момент его восхода и захода имеет следующий вид [9–11]:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{\cos z - \sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi} = \\ &= \frac{\cos(90^\circ + \rho + R - p_{hor}) - \sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Для вычисления часового угла момент восхода или захода Луны задают следующие данные: $\rho = 35'$, $R = 16'$, $p_{hor} \approx p_0 = 57'$. Тогда

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{\cos(90^\circ + 35' + 16' - 57') - \sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi} = \\ &= \frac{\cos(89^\circ 54') - \sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Экваториальный горизонтальный параллакс Солнца $p_0 = 8.79''$, угловой радиус $R = 16'$. Пренебрегая значением параллакса Солнца, получаем следующую формулу для вычисления часового угла момент восхода или захода:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{\cos(90^\circ + 35' + 16') - \sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi} = \\ &= \frac{\cos(90^\circ 51') - \sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Годичные вариации склонения и местного времени верхней кульминации Солнца. При расчёте моментов времени восхода и захода Солнца в течение определённого года из файла данных о склонении и времени верхней кульминации извлекаются данные, соответствующие рассчитываемому году. Рисунок 4 иллюстрирует годичные вариации склонения Солнца, соответствующие 2018 году:

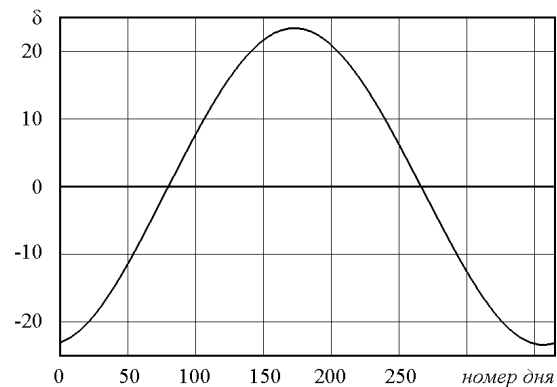


Рис. 4. Изменение склонение Солнца в течение 2018 года

Когда Солнце находится в точке весеннего равноденствия, являющейся одной из двух точек пересечения эклиптики и небесного меридиана, его склонение $\delta = 0^\circ$. Суточное движение Солнца в день весеннего равноденствия проходит приблизительно по небесному экватору. Употребление слова «приблизительно» вызывается тем, что в течение указанных суток склонение отличается от точного нулевого значения. Склонение принимает точное нулевое значение лишь в какой-то один момент суток весеннего равноденствия.

В день весеннего равноденствия (21 марта, годичный номер дня равен 80) Солнце на всех географических широтах земной поверхности восходит (почти) в точке востока и заходит (почти) в точке запада. Половина (с некоторой незначительной погрешностью) его суточного пути находится над горизонтом, половина под горизонтом. На всём земном шаре, кроме полюсов, в этот день продолжительность дня равна продолжительности ночи.

День весеннего равноденствия считается началом весны в северном полушарии Земли. В южном полушарии этот момент соответствует началу осени.

Когда Солнце находится в точке летнего солнцестояния (склонение $\delta = +23^\circ 26'$), то оно восходит на данной северной широте φ на северо-востоке, а заходит на северо-западе. Большая часть его суточного пути находится над горизонтом. Продолжительность дня в северном полушарии Земли максимальная, а ночи – минимальная; в южном полушарии – наоборот. День летнего солнцестояния (около 22 июня, номер дня $n = 73$) считается началом лета в северном полушарии Земли (в южном полушарии этот момент соответствует началу зимы).

Когда Солнце находится в точке осеннего равноденствия ($\delta = 0^\circ$), то оно снова на всей Земле восходит в точке востока и заходит в точке запада, и снова на всех широтах, кроме полюсов, продолжительность дня равна продолжительности ночи. Этот день называется днем осеннего равноденствия (22 сентября, $n = 265$), и считается началом осени в северном полушарии Земли (началом весны – в южном полушарии).

Наконец, когда Солнце находится в точке зимнего солнцестояния (склонение $\delta = -23^\circ 26'$), то оно восходит на юго-востоке, а заходит на юго-западе. Большая часть его суточного пути находится под горизонтом. На данной северной географической широте φ продолжительность дня минимальна, в ночи – максимальна (в южных широтах, наоборот, продолжительность дня максимальна, ночи – минимальна). День зимнего солнцестояния (около 22 декабря, $n = 356$) считается началом зимы в северном полушарии Земли (началом лета – в южном полушарии).

На рис. 5 представлены годовые вариации местного времени верхней кульминации Солнца. Местное время верхней кульминации Солнца изменяется в пределах от $11^h 44^m$ среднего солнечного времени до $12^h 14^m$. Неучёт вариаций местного времени верхней кульминации Солнца может привести к погрешностям вычисления моментов времени восхода и захода, достигающими значений около 15 мин.

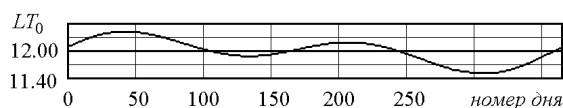


Рис. 5. Изменение местного времени верхней кульминации Солнца в течение 2018 года

Результаты расчёты моментов времени захода и захода Солнца в течение года. На рис. 6 представлены результаты расчётов местного времени моментов восхода и захода Солнца по краю диска с учётом рефракции видимого диапазона света. Широта места наблюдения определялась местоположением радара некогерентного рассеяния (НР) Института ионосферы ($\varphi = 49^\circ 40'$ с.ш. = $2980'$ с.ш.; $\lambda = 36^\circ 18'$

в.д. = $2178'$ в.д.). Самый ранний восход наблюдается 17 июня ($n = 168$), местное время $LT = 3^h 51^m$. Самый поздний заход – 25 июня ($n = 176$), $LT = 20^h 12^m$.

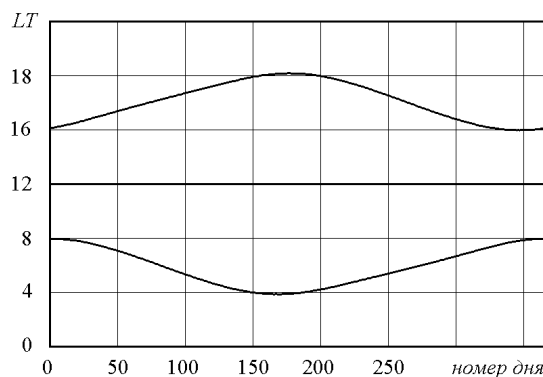


Рис. 6. Ход местного времени моментов восхода и захода Солнца в течение 2018 года

Всемирное время восхода 17 июня

$$UT = LT - \lambda = LT - \left(\frac{2178}{15}\right)^m = LT - 145^m = \\ = LT - 2^h 25^m = 1^h 26^m.$$

Поясное время восхода

$$T_n = UT + n = UT + 2^h = 3^h 26^m.$$

Здесь долгота λ и номер пояса n измеряются во временной мере.

Всемирное время захода 25 июня

$$UT = LT - 2^h 25^m = 17^h 47^m.$$

Соответствующее поясное время $T_n = UT + 2^h = 19^h 47^m$.

Выводы. Проведен математический анализ наличия решения уравнения для вычисления моментов времени восхода и захода светил. Точность расчётов определяется точностью эмпирических данных и равна 1 мин.

По представленным формулам расчёта моментов восхода и захода Солнца с помощью программы, написанной на *Visual Fortran*, проведены расчёты моментов времени восхода и захода Солнца в точке местоположения радара НР Института ионосферы и построены соответствующие графические изображения.

Представлены некоторые численные данные для возможности сравнить их с другими программами расчёта моментов времени восхода и захода Солнца.

Коды расчётов зенитного угла Солнца и моментов времени восхода и захода Солнца используются автором статьи в программах теоретического моделирования ионосферы.

Список литературы

1. Grinchenko S. V., Dziubanov D. A., Ziuzgina Iu. E. Simulation of ionospheric plasma velocity along the geomagnetic field lines due to the horizontal neutral winds. *Вісник Нац. техн. ун-ту «Харк. політехн. ін.-т»: зб. наук. пр.* Харків: НТУ «ХПИ», 2014. № 47 (1089): *Радіофізика та іоносфера*. С. 99–103.
2. Grinchenko S. V. Influence of neutral winds on the formation of the F2-region of the middle-latitude magnetically quiet ionosphere. *Proceedings of the 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter*

- Waves*. Kharkiv, Ukraine, June 20–24, 2016. United States. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., pp. 1–4. / IEEE Catalog Number CFP16780–CDR. ISBN 978–1–5090–2266–3. INSPEC Accession Number: 16215104. doi: 10.1109/MSMW.2016.7538023.
- Гринченко С. В. Решение уравнения непрерывности квазиравновесного распределения ионов атомарного кислорода при теоретическом моделировании электронной концентрации F2-области ионосферы. *Вісник Нац. техн. ун-ту «Харк. політехн. ін.-т»: зб. наук. пр. Харків: НТУ «ХПІ», 2017. № 47 (1268):* Радиофізика та іоносфера. С. 33–43.
 - Александров Ю. В. *Небесная механика*. Харьков. Харьк. нац. ун-т им. В. Н. Каразина. 2006. 256 с.
 - Karttunen H., Kroger P., Oja H., Poutanen M., Donner K. J. *Fundamental Astronomy*. 5th Ed. Berlin: Springer. 2007. 510 p.
 - Smart W. M., Green R. M. *Textbook on Spherical Astronomy*. 6th Ed. Glasgow: University of Glasgow. 1976. 443 p.
 - Бакулин П. И., Кононович Э. В., Мороз В. И. *Курс общей астрономии*. Изд. 4–е. М.: Наука. 1977. 544 с.
 - Кононович Э. В., Мороз В. И. *Общий курс астрономии*. Изд. 2–е. М.: Едиториал URSS. 2004. 544 с.
 - Даффет-Смит П. *Практическая астрономия с калькулятором*. М.: Мир. 1982. 176 с.
 - Клищенко А. П., Шупляк В. И. *Астрономия*. М.: Новое знание. 2004. 224 с.
 - Шупляк В. И., Шундалов М. Б., Клищенко А. П., Малышиц В. В. *Астрономия*. Минск: Вышэйшая школа. 2016. 310 с.
 - Dandy J. M. A. *Fundamental of Celestial Mechanics*. Richmond: Willmann–Bell, Inc. 1992. 483 p.
 - Roy A. E., Clarke D. *Astronomy: Principles and Practice*. 4th Ed. Bristol and Philadelphia: Taylor & Francis Group. 2003. 475 p.
- References (transliterated)**
- Grinchenko S. V., Dziubanov D. A., Ziuzgina Iu. E. Simulation of ionospheric plasma velocity along the geomagnetic field lines due to the horizontal neutral winds. *Vestnik Natsionalnogo tekhnichnogo universitetu "Kharkivskii politekhnichnyi instytut": zbirnyk naukovykh prats*. [Bulletin of National technical university "Kharkiv polytechnical institute: a collection of scientific papers]. Kharkiv: NTU "KhPI", 2014, no. 47 (1089): Radiophysyka ta ionosfera [Radiophysics and ionosphere], pp. 99–103.
 - Grinchenko S. V. Influence of neutral winds on the formation of the F2-region of the middle-latitude magnetically quiet ionosphere. *Proceedings of the 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves*. Kharkiv, Ukraine, June 20–24, 2016. United States. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., pp. 1–4. / IEEE Catalog Number CFP16780–CDR. ISBN 978–1–5090–2266–3. INSPEC Accession Number: 16215104. doi: 10.1109/MSMW.2016.7538023.
 - Grinchenko S. V. Reshenie uravneniia nepreryvnosti kvaziravnovesnogo raspredeleniia ionov kisloroda pri teoreticheskom modelirovanii jelektronnoj kontsentratsii F2-oblasti ionosfery [The solution of the continuity equation of the quasi-equilibrium atomic oxygen ions distribution for the theoretical simulation of the F2 region electron density]. *Vestnik Natsionalnogo tekhnichnogo universitetu "Kharkivskii politekhnichnyi instytut": zbirnyk naukovykh prats*. [Bulletin of National technical university "Kharkiv polytechnical institute: a collection of scientific papers]. Kharkiv: NTU "KhPI", 2017, no. 47 (1268): Radiophysyka ta ionosfera [Radiophysics and ionosphere], pp. 33–43.
 - Aleksandrov Ju. V. *Nebesnaya mekhanika* [Celestial mechanics]. Kharkov, Kharkovskij natsionalnyj universitet imeni V. N. Karazina. 2006. 256 p.
 - Karttunen H., Kroger P., Oja H., Poutanen M., Donner K. J. *Fundamental Astronomy*. 5th Ed. Berlin, Springer, 2007. 510 p.
 - Smart W. M., Green R. M. *Textbook on Spherical Astronomy*. 6th Ed. Glasgow, University of Glasgow, 1976. 443 p.
 - Bakulin P. I., Kononovich Je. V. *Kurs obshchej astronomii* [Course of general astronomy]. Izdanie 4. Moskva, Nauka, 1977. 544 p.
 - Kononovich Je. V., Moroz V. I. *Obshchij kurs astronomii* [General course of astronomy]. Izdanie 2. Moskva, Editorial URSS, 2004. 544 p.
 - Daffet-Smit P. *Prakticheskaya astronomiia s kalkulyatorom* [Practical astronomy with calculator]. Moskva, Mir, 1982. 176 p.
 - Klishchenko A. P., Shchupliak V. I. *Astronomiia* [Astronomy]. Moskva, Novoe znanie, 2004. 224 p.
 - Shchupliak V. I., Shundalov M. B., Klishchenko A. P., Malyshevs V. V. *Astronomiia* [Astronomy]. Minsk, Vyshhejskaia shkola, 2016. 310 p.
 - Dandy J. M. A. *Fundamental of Celestial Mechanics*. Richmond, Willmann–Bell, Inc, 1992. 483 p.
 - Roy A. E., Clarke D. *Astronomy: Principles and Practice*. 4th Ed. Bristol and Philadelphia, Taylor & Francis Group, 2003. 475 p.

Поступила (received) 31.10.2018

Відомості про автора / Сведения об авторе / About the Author

Грінченко Сергій Володимирович (Grinchenko Sergii Vladimirovich, Grinchenko Sergii Volodymyrovych) – Інститут іоносфери НАН та МОН України, науковий співробітник; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2433-4235>; e-mail: svgrinchenko@gmail.com.