УДК 658.012

ЯМЕН ХАЗИМ, асп. НТУ "ХПИ";
В. А. ГОЛОВКО, асп. НТУ "ХПИ";
М. Н. СТАРОВА, асп. НТУ "ХПИ"

РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ОБРАБОТКИ НЕЧЕТКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Проведен анализ традиционного подхода к задаче обработки временного ряда. Сформированы его недостатки, связанные с необходимостью хранения непрерывно пополняемого массива измерений и неучетом различной полезности «старых» и «свежих» измерений. Обосновано применение рекуррентного варианта метода наименьших квадратов. Предложена процедура реализации рекуррентной обработки измерений для случая, когда они заданы нечетко. Определена функция принадлежности нечеткого результата оценки параметров временного ряда.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, рекуррентная обработка, нечеткие измерения

Введение. При решении многочисленных задач статистической обработки измерений обычно исходят из того, что механизм возникновения ошибок измерений сводится к суммированию большого числа элементарных ошибок, зависящих от множества плохо контролируемых и приблизительно одинаково влияющих факторов, приводящему к допущении о нормальном законе распределения ошибок [1–3]. Применение метода максимума правдоподобия для решения задач оценивания параметров в этих условиях, в свою очередь, приводит к определенной вычислительной схеме-методу наименьших квадратов (МНК) [4, 5]. Эта схема определяет одну из самых простых процедур оценивания, которую можно применять и в тех случаях, когда ошибки измерений не обязательно распределены нормально. При этом стандартная технология МНК обычно предусматривает одновременную обработку всех полученных измерений, что делать не всегда удобно, а в некоторых случаях просто не целесообразно по следующим причинам.

1. 1. Обработка всех измерений одновременно требует хранения непрерывно пополняемого массива измерений, что приводит к увеличению объема обрабатываемых данных и усложнению процедуры обработки.
2. 2. При решении многих задач типичным является феномен «устаревания» ранних измерений (например, в задачах слежения), приводящий к увеличению полезности «свежих» измерений. Это обстоятельство проявляет себя в особенности демонстративно, когда результаты измерения наблюдаемого объекта появляются не все сразу, а постепенно, по мере проведения измерений.

По этим причинам возникает необходимость трансформировать стандартные соотношения МНК таким образом, чтобы они имели рекуррентный характер, то есть позволяли бы рассчитывать оценки параметров на очередном шаге (после очередного измерения) через оценки, полученные на предыдущем шаге, и измерение, сделанное на очередном шаге.

Пусть значение контролируемой переменной во времени описывается моделью

$$y(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_d t^d \ . \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_d \end{pmatrix}^T$ – вектор параметров модели (1);

y_{n+1} – измеренное значение контролируемой переменной в момент времени t_{n+1};

$\widetilde{y}_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i t_i^d$ – предсказываемое моделью (1) значение контролируемой переменной в тот же момент времени;

$\mathbf{h}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^d \end{pmatrix}$ – вектор пересчета значений параметров модели (1) в значение контролируемой переменной (оператор экстраполяции значения контролируемой переменной на момент t_{n+1});

$\mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ – вектор измерений, полученных в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$;

$\mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^d \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^d \end{pmatrix}$ – матрица линейного преобразования значений параметров модели в значения контролируемых переменных в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Тогда

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{d} a_i t_{n+1}^i = h_{n+1} A, \quad \mathbf{Y}_{n+1} = \begin{pmatrix} Y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Y}}_{n+1} = \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_n \\ \widetilde{y}_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n \\ h_{n+1} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с стандартным МНК оценка компонентов вектора $\hat{A}_{n+1}$ по результатам измерений, образующих вектор $\mathbf{Y}_{n+1}$, имеет вид [4, 5]

$$\hat{A}_{n+1} = \left(H_{n+1}^T H_{n+1}\right)^{-1} H_{n+1}^T Y_{n+1}\,. \qquad (2)$$

При этом $\left(H_{n+1}^T H_{n+1}\right)^{-1} = \left\{\begin{pmatrix} H_n^T & h_{n+1}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_n \\ h_{n+1} \end{pmatrix}\right\}^{1} = \left(H_n^T H_n + h_{n+1}^T h_{n+1}\right)^{-1}$.

Введем

$$P_n^{-1} = H_n^T H_n\,.$$

Тогда

$$P_{n+1}^{-1} = H_{n+1}^T H_{n+1} = H_n^T H_n + h_{n+1}^T h_{n+1} = P_n^{-1} + h_{n+1}^T h_{n+1}\,. \qquad (3)$$

Используем лемму об обращении матриц, в соответствии с которой [6, 7]

$$\left(B + CC^T\right)^{-1} = B^{-1} - B^{-1}C\left(C^T B^{-1} C + 1\right)^{-1} C^T B^{-1}\,.$$

Поэтому

$$P_{n+1} = \left(P_n^{-1} + h_{n+1}^T h_{n+1}\right)^{-1} = P_n - P_n h_{n+1}^T \left(h_{n+1} P_n h_{n+1}^T\right)^{-1} h_{n+1} P_n\,. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получим

$$\hat{A}_{n+1} = P_{n+1}\begin{pmatrix} H_n^T & h_{n+1}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = P_{n+1}\left(H_n^T Y_n + h_{n+1}^T y_{n+1}\right) =$$

$$= P_n H_n^T Y_n + P_n h_{n+1}^T y_{n+1} - P_n h_{n+1}^T \left(h_{n+1} P_n h_{n+1}^T + 1\right)^{-1} h_{n+1} P_n \times$$

$$\times \left(H_n^T Y_n + h_{n+1}^T y_{n+1}\right) = \hat{A}_n + P_n h_{n+1}^T \left(h_{n+1} P_n h_{n+1}^T + 1\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(y_{n+1} - h_{n+1}\hat{A}_n\right) = \hat{A}_n + B_n\left(y_{n+1} - y_{n+1}^{э}\right), \qquad (5)$$

где $B_n = \left(h_{n+1} P_n h_{n+1}^T + 1\right)^{-1} P_n h_{n+1}^T$ – вектор-столбец весовых коэффициентов, не зависящий от результатов измерений.

Рекуррентная процедура (2) – (5) работает, начиная с $\left(d+2\right)$-го измерения. Начальные матрицы $P_{d+1} = \left(H_{d+1}^T H_{d+1}\right)^{-1}$ и вектор $A_{d+1} = P_{d+1} H_{d+1}^T Y_{d+1}$ получают с использованием стандартных соотношений метода наименьших квадратов.

Постановка задачи. Ситуация усложняется, если измерения выполняются в условиях неопределенности, описываемой, например, в терминах нечеткой математики. Сформулируем задачу построения процедуры, реализующей рекуррентный МНК в условиях, когда измерения заданы нечетко.

Основные результаты. Пусть измерение y_j описывается нечетким числом $(L\text{-}R)$-типа с функцией принадлежности [8, 9]

$$\mu(y_j)=\begin{cases} L\left(\dfrac{y_j^0-y_j}{\alpha_j}\right), & y_j\le y_j^0,\\ R\left(\dfrac{y_j-y_j^0}{\beta_j}\right), & y_j> y_j^0,\end{cases}$$

где y_j^0 – мода нечеткого числа y_n, α_j и β_j – левый и правый коэффициенты нечеткости.

Тогда вектор нечетких начальных значений набора параметров уравнения регрессии (1) может быть описан соответствующей совокупностью функций принадлежности, получаемых следующим образом [10].

Так как $A_{d+1}=P_{d+1}H_{d+1}^TY_{d+1}=\left(H_{d+1}^TH_{d+1}\right)^{-1}H_{d+1}^TY_{d+1}=\left(g_{ij}\right)Y_{d+1}$, то

$$\begin{pmatrix}\mu(a_{0,d+1})\\ \cdots\\ \mu(a_{d,d+1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\left(\sum\limits_{j=1}^{d+1}g_{1,j}y_j\right)\\ \cdots\\ \mu\left(\sum\limits_{j=1}^{d+1}g_{d+1,j}y_j\right)\end{pmatrix}.$$

При этом

$$\mu(a_{i,d+1})=\mu\left(\sum_{j=1}^{d+1}g_{i,j}y_j\right)=\begin{cases} L\left(\dfrac{a_{i,d+1}^0-a_{i,d+1}}{\alpha_{i,d+1}}\right), & a_{i,d+1}\le a_{i,d+1}^0,\\ R\left(\dfrac{a_{i,d+1}-a_{i,d+1}^0}{\beta_{i,d+1}}\right), & a_{i,d+1}> a_{i,d+1}^0,\end{cases}$$

$$a_{i,d+1}^0=\sum_{j=1}^{d+1}g_{ij}y_j^0,\ \alpha_{i,d+1}=\sum_{j=1}^{d+1}g_{ij}\alpha_j,\ \beta_{i,d+1}=\sum_{j=1}^{d+1}g_{ij}\beta_j,\ i=0,1,\ldots,d.$$

Далее, пусть после проведения n измерений в результате использования рекуррентной процедуры (2)-(5) получен набор функций принадлежности нечетких параметров $\left(\hat{a}_{0,n}, \hat{a}_{1,n}, \ldots, \hat{a}_{d+1,n}\right)$ уравнения регрессии (1). Тогда, поскольку элементы вектора B в (5) не зависят от измерений и

$$\mu\left(\Delta_{n+1}\right) = \mu\left(y_{n+1} - y^{э}_{n+1}\right) = \mu\left(y_{n+1} - \sum_{i=0}^{d} \hat{a}_{i,n} t^{i}_{n+1}\right) =$$

$$= \begin{cases} L\left(\dfrac{\Delta^0_{n+1} - \Delta_{n+1}}{\alpha^{\Delta}_{n+1}}\right), & \Delta_{n+1} \le \Delta^0_{n+1}, \\ R\left(\dfrac{\Delta_{n+1} - \Delta^0_{n+1}}{\beta^{\Delta}_{n+1}}\right), & \Delta_{n+1} > \Delta^0_{n+1}, \end{cases}$$

$$\Delta^0_{n+1} = y^0_{n+1} - \sum_{i=0}^{d} \hat{a}_{i,n} t^{i}_{n+1}, \ \alpha^{\Delta}_{n+1} = \alpha_{n+1} + \sum_{i=0}^{d} \hat{\alpha}_{i,n} t^{i}_{n+1}, \ \beta^{\Delta}_{n+1} = \beta_{n+1} + \sum_{i=0}^{d} \hat{\beta}_{i,n} t^{i}_{n+1},$$

то функции принадлежности нечетких оценок параметров уравнения регрессии $\hat{A}_{n+1}$ после $(n+1)$-го измерения определяются соотношениями

$$\begin{pmatrix} \mu\left(\hat{a}_{0,n+1}\right) \\ \cdots \\ \mu\left(\hat{a}_{d,n+1}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\hat{a}_{0,n} + \Delta_{n+1} \sum_{i=0}^{d} b_{i,n}\right) \\ \cdots \\ \mu\left(\hat{a}_{d+1,n} + \Delta_{n+1} \sum_{i=0}^{d} b_{i,n}\right) \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\mu\left(\hat{a}_{i,n+1}\right) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a^0_{i,n+1} - \hat{a}_{i,n+1}}{\alpha_{i,n+1}}\right), & \hat{a}_{i,n+1} \le a^0_{i,n+1}, \\ R\left(\dfrac{\hat{a}_{i,n+1} - a^0_{i,n+1}}{\beta_{i,n+1}}\right), & \hat{a}_{i,n+1} > a^0_{i,n+1}, \end{cases}$$

$$a^0_{i,n+1} = a^0_{i,n} + \Delta_{n+1} \sum_{i=0}^{d} b_{i,n}, \ \alpha_{i,n+1} = \alpha_n + \alpha^{\Delta}_{n+1} \sum_{i=0}^{d} b_{i,n}, \ \beta_{i,n+1} = \beta_n + \beta^{\Delta}_{n+1} \sum_{i=0}^{d} b_{i,n}.$$

Определим теперь функцию принадлежности нечеткого значения переменной y на момент прогноза. Имеем

$$\mu\left(y_{пр}\right)=\mu\left(\sum_{i=0}^{d}\hat{a}_{i,n+1}t_{пр}^{i}\right)=\begin{cases} L\left(\dfrac{y_{пр}^{0}-y_{пр}}{\alpha_{пр}}\right), & y_{пр}\le y_{пр}^{0}, \\ R\left(\dfrac{y_{пр}-y_{пр}^{0}}{\beta_{пр}}\right), & y_{пр}>y_{пр}^{0}, \end{cases} \tag{6}$$

$$y_{пр}^{0}=\sum_{i=0}^{d}a_{i,n+1}^{0}t_{пр}^{i}\ ,\ \alpha_{пр}=\sum_{i=0}^{d}\alpha_{i,n+1}t_{пр}^{i}\ ,\beta_{пр}=\sum_{i=0}^{d}\beta_{i,n+1}t_{пр}^{i}\ .$$

Соотношение (6) позволяет для любого $t_{пр}$ рассчитать границы интервала, накрывающего истинное значение $y_{пр}$ с заданной степенью уверенности.

Выводы. Предложен метод прогнозирования значения переменной, уровень неопределенности которой задан функциями принадлежности набора нечетких измерений этой переменной. При этом обработка наблюдений осуществляется с использованием рекуррентного метода наименьших квадратов.

Список литературы: **1.** *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / *Е. С. Вентцель*. – М. : Наука, 1973. – 576 с. **2.** *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики / *Б. А. Севастьянов*. – М. : Наука, 1982. – 256 с. **3.** *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей / *Б. В. Гнеденко*. – М. : Наука, 1988. – 448 с. **4.** *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений / *Ю. В. Линник*. – М. : Физтамгиз, 1962. – 352 с. **5.** *Пустыльник Е. И.* Статистические методы анализа и обработки наблюдений / *Е. И. Пустыльник*. – М. : Наука, 1968. – 288 с. **6.** *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. / *С. Р. Рао* //: пер. с англ. под ред. *Линника Ю. В.* – М. : Наука, 1968. – 547 с. **7.** *Мудров В. И.* Методы обработки измерений / *В. И. Мудров, В. Л. Кушко*. – М. : Радио и связь, 1983. – 304 с. **8.** *Дюбуа Д.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / *Д. Дюбуа, А. Прад*: пер. с франц. – М. : Радио и связь, 1990. – 286 с. **9.** *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств / *А. Кофман* пер. с франц. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с. **10.** *Раскин Л. Г.* Нечеткая математика. Основы теории. Приложения / *Л. Г. Раскин, О. В. Серая*. – Х. : Парус, 2008. – 352 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Venttsel, E. S. *Teoriya veroyatnostey*. Moscow: Nauka, 1973. 576. Print. **2.** Sevastyanov, B. A. *Kurs teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki*. Moscow: Nauka, 1982. 256. Print. **3.** Gnedenko, B. V. *Kurs teorii veroyatnostey.* Moscow: Nauka, 1988. 448. Print **4.** Linnik, Yu. V. *Metod naimenshih kvadratov i osnovyi teorii obrabotki nablyudeniy*. Moscow: Fiztamgiz, 1962. 352. Print. **5.** Pustyilnik E. I. *Statisticheskie metodyi analiza i obrabotki nablyudeniy*. Moscow: Nauka, 1968. 288. Print. **6.** Rao, S. R. *Lineynyie statisticheskie metodyi i ih primeneniya*. Ed. Linnik Yu. V. Moscow: Nauka, 1968. 547.Print. **7.** Mudrov, V. I. *Metodyi obrabotki izmereniy*. Ed. V. I. Mudrov, V. L. Kushko. Moscow: Radio i svyaz, 1983. 304. Print. **8.** Dyubua, D. *Teoriya vozmozhnostey. Prilozheniya k predstavleniyu znaniy v informatike*. Ed. D. Dyubua, A. Prad. Moscow: Radio i svyaz, 1990. 286. Print. **9.** Kofman A. *Vvedenie v teoriyu nechetkih mnozhestv*. Moscow: Radio i svyaz, 1982. 432. Print. **10.** Raskin L. G. *Nechetkaya matematika. Osnovyi teorii. Prilozheniya.* Ed. L. G. Raskin, O. V. Seraya. Kharkiv: Parus, 2008. 352. Print.

Поступила (received) 01.04.2014