УДК 519.863:303.725.35

С. А. ЦЫБУЛЬНИК, канд. техн. наук, вед. науч. сотр.,
НИУ «УКРНИИЭП», Харьков

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ОДНОРОДНОГО ПОТОКА НА ВЗВЕШЕННОМ ГРАФЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОПУСКНУЮ СПОСОБНОСТЬ ВЕРШИН

Предложен итеративный алгоритм выбора оптимальных интенсивностей источников однородного потока на слабо-связном взвешенном графе, любая пара вершин которого соединена не более чем одним путем, при ограничениях на пропускную способность вершин и фиксированных коэффициентах передачи (трансформации) потока по дугам. Алгоритм разработан для решения задач оптимизации водоохранных мероприятий для речной сети.

Ключевые слова: водный объект, водоохранные мероприятия, математическая модель, взвешенный граф, однородный поток, оптимизация.

Введение. Задачи о потоках на ориентированных графах (сетях) занимают важное место в теории исследования операций. Как правило, в них указывается пропускная способность ребер взвешенного графа, и при фиксированных весах вершин определяются оптимальные веса на ребрах графа, реализующие или максимизирующие поток между истоком и стоком графа [1–3]. Такой подход к взвешиванию пути на графе широко используется при решении разнообразных транспортных задач. Однако он не позволяет учесть структурные свойства таких естественных транспортных потоков, как водные системы, используемые для транспортировки удаляемых с возвратными водами отходов производства и жизнедеятельности человека.

В отличие от обычных транспортных задач, у графа речной сети пропускная способность устанавливается не для ребер, а для вершин. При этом оптимизируемыми переменными являются интенсивности источников потока в вершинах, а в качестве веса ребер фиксируются коэффициенты передачи (трансформации) потока между вершинами.

Оптимизация потока вещества через речную сеть заключается в нахождении таких коэффициентов уменьшения исходных интенсивностей источников потока в вершинах графа, при которых удовлетворяются ограничения на пропускную способность вершин (створов контроля качества воды), и достигается экстремум выбранного критерия оптимальности, например, суммарных затрат на необходимое снижение исходных интенсивностей источников потока. В общем случае такая задача может быть решена только с использованием достаточно сложных методов нелинейного математического программирования. В связи с этим актуальна разработка более простых и эффективных частных алгоритмов решения, учитывающих специфические особенности конкретной задачи.

Цель исследования: разработка алгоритма выбора оптимальных значений коэффициентов регулирования интенсивностей источников однородного потока в вершинах ориентированного слабо-связного взвешенного графа, любая пара вершин которого соединена не более, чем одним путем, при ограничениях на пропускную способность вершин и фиксированном весе направленных ребер (дуг) графа.

Постановка задачи. Пусть G=(V,A) – ориентированный слабо-связный взвешенный граф, где $V=\{v_k\}$, $k\in K$ – множество вершин графа, $A=\{a_r\}$, $r\in R$ – множество дуг графа и пусть каждой вершине графа смежно не более одной его вершины.

Зададим на графе G однородный поток C, с источниками c_k в вершинах v_k. Без ограничения общности будем полагать, что граф содержит только один сток v_m со степенью выхода равной нулю. В противном случае добавим к графу новую вершину в качестве единственного стока, соединенного со старыми стоками дугами с нулевой пропускной способностью.

Определим интенсивности источников потока в вершинах как

$$\bar{c}_k = \sum_{i\in I_k} \bar{a}_{ki}\bar{c}_{ki}(1-u_i) \;, \tag{1}$$

где $\bar{c}_{ki}$ – исходная интенсивность источника потока i в вершине k;

I_k – множество индексов источников потока в вершине k;

$\bar{a}_{ki}$ – коэффициент передачи потока от источника i к вершине k ($0\le\bar{a}_{ki}\le 1$);

u_i – коэффициент регулирования интенсивности источника i ($0\le u_i\le 1$).

Тогда задача оптимизации интенсивности потока может быть записана в виде задачи математического программирования с критерием вида

$$\left\{ F(u) = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} f_i(u_i) \right\} \to \min_u \,. \tag{2}$$

и системой ограничений вида

$$c_k \le b_k, \;\; k\in K \,, \tag{3}$$

где $f_i(u_i)$ – затраты на регулирование интенсивности источника потока $i\in I_k$ в вершине k;

c_k – суммарный поток через вершину k

$$c_k = \bar{c}_k + \sum_{j\in J_k} a_{kj}c_j, \;\; k\in K \;; \tag{4}$$

a_{kj} – коэффициент передачи потока от вершины j к вершине k ($0\le a_{kj}\le 1$);

J_k – множество индексов вершин, которым смежна вершина k;

b_k – ограничение на суммарный поток через вершину k.

Результаты исследования. Пронумеруем вершины покрывающего дерева графа начиная от конца каждой ветви к ее корню, нумеруя вершины ветвления после нумерации всех вышележащих вершин. Соответственно порядку вершин, последовательно пронумеруем источники потока в них.

Преобразуем (4) к не рекуррентной форме, развернем относительно u_i и подставим в (3). Умножим обе части каждого ограничения k на общий коэффициент передачи потока от вершины k к стоку графа. Тогда в каждом ограничении перед каждой переменной u_i будет стоять один и тот же коэффициент α_i ($0 \le \alpha_i \le 1$) и ограничения задачи примут вид

$$\sum_{i \in \Theta_k} \alpha_i u_i \ge \beta_k, \ k \in [1, m], \tag{5}$$

$$u_i^{min} \le u_i \le u_i^{max}, \ i \in [1, n], \tag{6}$$

где m – мощность множества K;

n – мощность множества источников потока по всем вершинам графа;

Θ_k – множество индексов источников, влияющих на поток в вершине k;

$u_i^{\min}$ и $u_i^{\max}$ – ограничения на допустимые значения переменной u_i.

Ограничения (5) назовем вложенными, т.к. при выбранном способе нумерации вершин графа для любой пары вершин (k,p) справедливо условие

$$\left(\Theta_k \bigcap \Theta_p \ne \varnothing\right) \Rightarrow (k < p) \wedge \left(\Theta_k \subset \Theta_p\right) \vee (p < k) \wedge \left(\Theta_p \subset \Theta_k\right). \tag{7}$$

Будем далее полагать, что $f_i(u_i)$ – выпуклые (вниз) монотонно возрастающие функции на R^n. Теоретически это сужает область возможного применения алгоритма, но на практике в транспортных задачах рассматриваемого вида критериальные функции именно таковы.

Монотонность и выпуклость функций $f_i(u_i)$, неотрицательность коэффициентов α_i и вложенность ограничений (5) позволяют построить итеративную пошаговую процедуру решения задачи (2), (5), (6), основанную на идеях методов максимального элемента и последовательных приращений и кусочно-линейной аппроксимации функций $f_i(u_i)$ [4]. Необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} &\text{I. } \forall i \in I_k, \ k \in K^{\text{н}} : \ u_i = u_i^{min}, \\ &\text{II. } \forall (i, p) \in \Theta_k, \ k \in K^{\text{а}} \ : \ \frac{c_i^+}{\alpha_i} \ge \frac{c_p^-}{\alpha_p}, \end{aligned} \tag{8}$$

где c_i^- и c_i^+ – угловые коэффициенты кусочно-линейной аппроксимации функций $f_i(u_i)$ с шагом h_i влево и вправо от текущего значения переменной u_i;

$K^{\text{а}}$ – множество активных ограничений системы (5);

$K^{\text{н}}$ – множество пассивных ограничений системы (5), не вложенных ни в одно из активных ограничений (если множество не пусто, оно по определению включает последнее ограничение задачи для вершины m).

Первое условие означает, что переменные, не входящие в активные ограничения, принимают минимальные значения. Второе – что решение нельзя улучшить ни по какой паре входящих в активные ограничения переменных при противоположном приращении последних.

Пусть M – достаточно большое число. Определим границы интервалов и угловые коэффициенты кусочно-линейной аппроксимации $f_i(u_i)$, $i \in [1,n]$ как

$$u_i^- = \max\left(u_i^{min}, u_i - h_i\right),$$

$$u_i^+ = \min\left(u_i^{max}, u_i + h_i\right),$$

$$c_i^- = \begin{cases} \left(f_i(u_i) - f_i(u_i^-)\right)/\left(u_i - u_i^-\right), & \text{если } u_i > u_i^{\min}, \\ 0, & \text{если } u_i = u_i^{\min}, \end{cases} \tag{9}$$

$$c_i^+ = \begin{cases} \left(f_i(u_i^+) - f_i(u_i)\right)/\left(u_i^+ - u_i\right), & \text{если } u_i < u_i^{max}, \\ M, & \text{если } u_i = u_i^{max}. \end{cases}$$

Определим для переменной u_p минимальную невязку пассивных ограничений задачи, вложенных в ограничение с номером s как

$$\gamma_p(s) = \min_{k \notin K^{\text{а}}} \left(\sum_{j \in \Theta_k} \alpha_j u_j - \beta_k \;/\; p \in \Theta_k,\, k < s \right). \tag{10}$$

Пусть K_γ – множество k, доставляющих минимум $\gamma_p(s)$, $\omega(i) = \min\left\{ j \;/\; j \in K^{\text{а}},\, p \in \Theta_j \right\}$ – номер первого активного ограничения, содержащего u_i и ε – достаточно малая величина. Тогда алгоритм определения оптимальных значений коэффициентов регулирования интенсивностей источников потока u_i можно представить в следующем виде:

1. Положить h_i=0,5·($u_i^{\max}$–$u_i^{\min}$) для $i \in [1,n]$.
2. Положить u_i=$u_i^{\max}$ для $i \in [1,n]$; если система (5) несовместна, остановиться, так как задача не имеет решения.
3. Определить множества $K^{\text{а}}$, $K^{\text{н}}$.
4. Определить u_i^-, u_i^+, c_i^- и c_i^+ для $i \in [1,n]$.
5. Если выполняется условие оптимальности I, то если $K^{\text{а}} = \varnothing$ перейти к шагу 21, иначе перейти к шагу 10.
6. Определить $p = \arg\max\limits_{j \in I_m}\left(c_j^- / \alpha_j\right)$.
7. Вычислить $\gamma_p(m+1)$ и $\delta_p = \min\left(\gamma_p(m+1)/\alpha_p,\, u_p - u_p^-\right)$.
8. Если δ_p= $\gamma_p(m$+1) /α_p, то переместить из множества $K^{\text{н}}$ в множество $K^{\text{а}}$ все ограничения с номером $k \in K_\gamma$.
9. Положить u_p = u_p – δ_p, определить u_p^-, u_p^+, c_p^-, c_p^+ и перейти к шагу 5.

10. Определить $t = \max\left\{ j \,/\, j \in K^{\text{a}} \right\}$ и $p = \arg\max\limits_{j \in \Theta_t}\left(c_j^- / \alpha_j \right)$.
11. Положить $s = \omega\left(p \right)$ и определить $i = \arg\min\limits_{j \in \Theta_s}\left(c_j^+ / \alpha_j \right)$.
12. Если $i=p$, условие оптимальности II выполнено, перейти к шагу 20.
13. Если $\omega(i) \neq \omega(p)$, исключить из множества K^{a} ограничения k такие, что $i \in \Theta_k$ и $p \notin \Theta_k$.
14. Вычислить $\mu_{ip} = \min(\alpha_p(u_p - u_p^-), \alpha_i(u_i^+ - u_i))$.
15. Определить $s = \min\left\{ j \,/\, j \notin K, (i, p) \in \Theta_j \right\}$.
16. Вычислить $\gamma_p(s)$ и $\delta_p = \min\left(\gamma_p(s), \mu_{ip} \right)$.
17. Положить $u_p = u_p - \delta_p/\alpha_p$ и $u_i = u_i + \delta_p/\alpha_i$.
18. Если $\delta_p = \gamma_p(s)$, то включить в множество K^{a} все ограничения с номером $k \in K_\gamma$.
19. Определить u_p^-, u_p^+, c_p^-, c_p^+ и u_i^-, u_i^+, c_i^-, c_i^+ и перейти к шагу 10.
20. Если $\max h_i > \varepsilon$, положить $h_i = h_i / 2$, $\forall h_i > \varepsilon$ и перейти к шагу 4.
21. Записать оптимальное решение.

Определенные с помощью данного алгоритма значения u_i определяют поток (3), удовлетворяющий наложенным ограничениям (4) и критерию оптимальности (2) и, следовательно, являются решением задачи (2)–(4).

Выводы. Разработанный алгоритм позволяет определить оптимальные водоохранные мероприятия, обеспечивающие нормативное качество поверхностных вод в бассейне реки по доминирующему либо интегральному показателю состава возвратных вод. Для расчета более сложных сетей, узлы которых соединены более чем одним путем, может быть использован разработанный автором универсальный алгоритм [5], позволяющий определить поток на графе произвольной конфигурации.

Список литературы: **1.** Исследование операций : В 2-х т. Т. 1 / ред. *Дж. Моудер, С. Элмаграби*. – М. : Мир, 1981. – 712 с. **2.** *Басакер Р.* Конечные графы и сети / *Р. Басакер, Т. Саати.* – М. : Наука, 1973. – 368 с. **3.** *Форд Л.* Потоки в сетях / *Л. Форд, Д. Фалкерсон.* – М. : Мир, 1966. – 276 с. **4.** *Берзин Е. А.* Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / *Е. А. Берзин.* – М. : Сов. радио, 1974. – 304 с. **5.** *Цыбульник С. А.* Применение итеративных алгоритмов расчета качества вод при выборе водоохранных мероприятий / *С. А. Цыбульник* // В кн..: Комплексные водоохранные мероприятия. – Харьков : ВНИИВО. – 1981. – С. 118–124.

Bibliography (transliterated): **1.** Mouder, Dzh., and S. Jelmagrabi, ed. *Issledovanie operacij.* Vol. 1. Moscow: Mir, 1981. 2 vols. **2.** Basaker, R., and T. Saati. *Konechnye grafy i seti*. Moscow: Nauka, 1973. Print. **3.** Ford L., and Falkerson D. *Potoki v setjah*. Moscow: Mir, 1966. Print. **4.** Berzin, E. A. *Optimal'noe raspredelenie resursov i jelementy sinteza sistem*. Moscow: Sov. radio, 1974. Print. **5.** Tsybulnik, S. A. "Primenenie iterativnyh algoritmov rascheta kachestva vod pri vybore vodoohrannyh meroprijatij." Kompleksnye vodoohrannye meroprijatija. Kharkiv: VNIIVO, 1981. 118–124. Print.

Поступила (received) 11.12.2014