УДК 681.5

А.С. КУЦЕНКО, В. И. ТОВАЖНЯНСКИЙ, Н. А. ОДАРЧЕНКО

ОБРАЩЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Предложен метод и алгоритм решения задачи обращения линейных динамических систем в среде полиномиальных сигналов. Решение задачи получено на основе матричных представлений полиномиальных вектор - функций входа, выхода и состояния и статических матричных преобразований, что позволило свести поставленную задачу к решению линейной системы алгебраических уравнений. Предложен метод анализа робастности полученных результатов. Разработано соответствующее программное обеспечение.
Ключевые слова: обращение динамических систем, линейная система, полиномиальный сигнал, матричное уравнение, число обусловленности, программное обеспечение.

Запропоновано метод і алгоритм розв'язання задачі обернення лінійних динамічних систем в середовищі поліноміальних сигналів. Рішення задачі отримано на основі матричних уявлень поліноміальних вектор - функцій входу, виходу і стану і статичних матричних перетворень, що дозволило звести поставлену задачу до вирішення лінійної системи алгебраїчних рівнянь. Запропоновано метод аналізу робастності отриманих результатів. Розроблене відповідне програмне забезпечення.
Ключові слова: обернення динамічних систем, лінійна система, поліноміальний сигнал, матричне рівняння, число обумовленості, програмне забезпечення.

There has been proposed a method, algorithm and software solving the problem of inversion of linear dynamical systems in the polynomial signal environment. The solution of the problem was obtained on the basis of matrix representations of polynomial input, output, and state vector functions and static matrix transformations, which made it possible to reduce the problem posed to the solution of a linear system of algebraic equations. Also, there has been proposed a method for analyzing the robustness of the results obtained. There has been developed the software for implementing the proposed methods. The software includes the approximation of the initial information by polynomials of a given degree by the method of least squares, the formation of matrix analogs of the polynomial task by the output of the system, the formation of a matrix of a system of linear algebraic equations, and its solution. The maximum degree of approximating polynomials is corrected on the basis of estimation of the number of conditionality. The software contains a block for estimating the accuracy of the result of the call.
Keywords: inversion of dynamical systems, linear system, polynomial signal, matrix equation, condition number, software.

Введение. Одним из эффективных методов теории управления, играющим одну из ключевых ролей при синтезе комбинированных регуляторов, является метод обратных операторов, детально исследованный в работах [1–5]. По существу решение задачи программного управления динамической системой эквивалентно решению обратной задачи: нахождения управляющего воздействия, обеспечивающего заданную цель управления. Таким образом, метод обратных операторов является одной из форм постановки и решения основной задачи управления. Принципиальной особенностью метода является поиск решения на основе построения оператора, на вход которого подается требуемая функция выхода объекта управления, а на выходе формируется соответствующая управляющая функция времени. Как известно из [2, 6, 7] при реализации метода обратных операторов возникает множество проблем, среди которых следует особо выделить проблемы устойчивости, физической реализуемости, грубости и корректности обратных операторов. Перечисленные проблемы не позволяют в общем случае найти практически реализуемое решение задачи нахождения обратного оператора в задаче управления.

В то же время представляется естественным рассмотреть некоторые приближенные математические модели объекта управления и сигналов на его входах и выходах, для которых задача обращения имеет корректное решение.

Постановка задачи. Пусть задана линейная устойчивая динамическая система (ЛДС) математическая модель которой в пространстве состояний имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{x} \in R^n$ – вектор состояния, $\boldsymbol{y} \in R^m$ – вектор управления, $\boldsymbol{y} \in R^s$ – вектор выхода, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ – матрицы соответствующих размерностей.

Будем рассматривать управляемый процесс $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ на некотором, достаточно большом временном интервале $[t_0, t_1]$ при нулевых начальных условиях $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$.

Рассмотрим линейное пространство Z непрерывных функций $z(t)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{dz}{dt} \in Z \; . \tag{3}$$

К таким D-функциям можно отнести функцию

$$z(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{\boldsymbol{\alpha}_k t}\left(R_k(t)\sin\boldsymbol{\omega}_k t + Q_k(t)\cos\boldsymbol{\omega}_k t\right), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_k$ и $\boldsymbol{\omega}_k$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$ – некоторые постоянные величины, а $R_k(t)$ и $Q_k(t)$ – векторные многочлены степени не более l. Нетрудно простой проверкой убедиться, что функция вида (4) удовлетворяет условию (3). При различных значениях параметров N, $\boldsymbol{\alpha}_k$, $\boldsymbol{\omega}_k$, $R_k(t)$, $Q_k(t)$ могут быть получены различные частные виды D-функций. Рассмотрим случай, когда $N=1$, $\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_k=\mathbf{0}$. Тогда формула (4) примет вид

$$z(t)=Q(t)\,, \tag{5}$$

В дальнейшем будем рассматривать в качестве моделей сигналов подмножество полиномов

$$Q^l(t)\subset Z\,. \tag{6}$$

Следует отметить, что использование полиномов в качестве аппроксимаций входных сигналов в системе (1), (2) можно обосновать, опираясь на известную теорему Вейерштрасса [8]. Кроме того, для аппроксимации функций можно воспользоваться кусочной сплайн-аппроксимацией полиномами 3-й степени.

Поскольку соотношения (1), (2) содержат только операции сложения, умножения на матрицу и дифференцирование сигналов вида (4), то (1), (2) можно интерпретировать как оператор L, преобразующий входные сигналы $\boldsymbol{u}(t)$ в выходные $\boldsymbol{y}(t)$ в классе D-функций

$$\boldsymbol{y}(t)=L\big(\boldsymbol{u}(t)\big). \tag{7}$$

Задачу (7) будем называть прямой задачей.

При решении многих практических задач синтеза систем управления значительно больший интерес представляет обратная задача нахождения управления

$$\boldsymbol{u}(t)=L^{-1}\big(\boldsymbol{y}(t)\big), \tag{8}$$

реализующего заданный выход $\boldsymbol{y}(t)$ в классе полиномов степени не выше l. Это и составляет цель данного исследования.

Реакция ЛДС на полиномиальное воздействие. Будем искать вынужденную составляющую решения уравнения (1) в виде бесконечного ряда

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{u}^{(k-1)}(t)\,, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{C_k}$ – некоторые $n\times m$-матрицы, в дальнейшем подлежащие определению.

Подставляя (9) в (1) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{u}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{u}^{(k-1)}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\,. \tag{10}$$

Приравнивая матричные коэффициенты при производных $\boldsymbol{u}^{(k)}$ одного порядка в левой и правой частях (10) получим систему рекуррентных соотношений для определения матрицы $\boldsymbol{C}_k$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{B}=\mathbf{0}\,,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{k+1}=\boldsymbol{C}_k\,,\ k=\overline{1,\infty}\,, \tag{11}$$

из которых непосредственно следует

$$\boldsymbol{C}_1=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\,,\ \boldsymbol{C}_2=-\boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{B}\,,\ \ldots,\ \boldsymbol{C}_k=-\boldsymbol{A}^{-k}\boldsymbol{B}\,,\ldots \tag{12}$$

Таким образом, искомое решение прямой задачи в соответствии с (9) примет вид

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}^{-k}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{(k-1)}(t),\\&\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t).\end{aligned} \tag{13}$$

Из последнего соотношения следует, что решение прямой задачи принадлежит тому же D-классу функций, что и входное воздействие $\boldsymbol{u}(t)$.

В случае полиномиального векторного воздействия решение прямой задачи можно представить как

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(t)=-\sum_{k=1}^{l+1}\boldsymbol{A}^{-k}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{(k-1)}(t),\\&\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t),\end{aligned} \tag{14}$$

где l – максимальная степень полиномов компонент вектора $\boldsymbol{u}(t)$. Таким образом, соотношения (14) представляют собой точное решение прямой задачи управления при полиномиальном воздействии.

Матричное представление полиномиальных воздействий. Поставим в соответствие векторному полиному $\boldsymbol{u}(t)$ матрицу $\boldsymbol{U}$ размерности $m\times(l+1)$ каждая строка которой представляет собой последовательность коэффициентов компонент полинома $\boldsymbol{u}(t)$. Тогда вектор полиномиальных сигналов можно представить как

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}\,, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{T}=\left(1,t,\dfrac{t^2}{2!},..,\dfrac{t^l}{l!}\right)^T$ – $(l+1)$-мерный вектор.

Представление полиномиальных сигналов в матричной форме (15) позволяет эффективно применять методы теории матриц к решению различных задач теории управления.

Основные операции с матричным представлением сигналов следующие:

- сложение: $\boldsymbol{u}_1(t)+\boldsymbol{u}_2(t)=\big(\boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{U}_2\big)\boldsymbol{T}$;
- умножение на число: $\alpha\boldsymbol{u}(t)=\big(\alpha\boldsymbol{U}\big)\boldsymbol{T}$;
- умножение на матрицу слева: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}$;
- дифференцирование:

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\,. \tag{16}$$

Элементы $\boldsymbol{\lambda}_{ij}$ матрицы $\boldsymbol{\Lambda}$ размерности $(l+1)\times(l+1)$ имеют вид

$$\boldsymbol{\lambda}_{ij}=\boldsymbol{\delta}_{i,j+1}\,,\ i,j=\overline{1,l+1}\,,$$

где $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ – символ Кронекера.

В соответствии с (16) k-ю производную сигнала $\boldsymbol{u}^{(k)}(t)$ можно представить как

$$\frac{d^k\boldsymbol{u}(t)}{dt^k}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{T}\,, \tag{17}$$

где оператор $\mathbf{\Lambda}^k$ k-кратного дифференцирования матричного полинома представляет собой k-ю степень матрицы $\mathbf{\Lambda}$ и имеет структуру

$$\lambda_{ij}^k = \delta_{i,j+k}, \ i, j = \overline{1, l+1}; \ k = \overline{1, l}.$$

С учетом введенных операций с матричными полиномами решение прямой задачи (14) можно записать как

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= -\sum_{k=1}^{l+1} \boldsymbol{A}^{-k} \boldsymbol{B} \boldsymbol{U} \mathbf{\Lambda}^{k-1}, \\ \boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{C} \boldsymbol{X}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ прямоугольные матрицы соответствующих полиномиальных векторов состояния $\boldsymbol{x}(t)$ и выхода $\boldsymbol{y}(t)$. Исключая матрицу $\boldsymbol{X}$ из (18), получим окончательное аналитическое решение прямой задачи управления в среде полиномиальных сигналов

$$\boldsymbol{Y} = -\sum_{k=1}^{l+1} \boldsymbol{C} \boldsymbol{A}^{-k} \boldsymbol{B} \boldsymbol{U} \mathbf{\Lambda}^{k-1}, \tag{19}$$

имеющее структуру линейного оператора в пространстве прямоугольных матриц.

Решение задачи обращения. Полученный результат для прямой задачи управления в среде полиномиальных сигналов (19) позволяет легко решить соответствующую обратную задачу путем решения матричного уравнения (19) относительно $\boldsymbol{U}$ при заданной $\boldsymbol{Y}$. Поскольку система (19) по сути является системой линейных алгебраических уравнений, то необходимым условием единственности ее решения является равенство размерностей векторов входа и выхода исходной динамической системы $m = s$. Этот случай «квадратной» системы будем рассматривать в дальнейшем.

Решение матричного уравнения (19) можно получить путем векторизации матриц $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{U}$ и построений на основе кронекеровского произведения матриц [9]:

$$\left[\sum_{k=1}^{l+1} \boldsymbol{C} \boldsymbol{A}^{-k} \boldsymbol{B} \otimes \left(\mathbf{\Lambda}^{k-1} \right)^T \right] \boldsymbol{vecU} + \boldsymbol{vecY} = \mathbf{0}, \tag{20}$$

где векторы-столбцы $\boldsymbol{vecU}$ и $\boldsymbol{vecY}$ составлены из транспонированных строк матриц $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{Y}$. Решение $m \times (l+1)$-мерной линейной системы (20) осуществляется любым стандартным численным методом.

Характерной особенностью решения многих обратных задач является отсутствие робастности результатов. С точки зрения линейной алгебры для нашей задачи степень робастности эквивалентна степени обусловленности матрицы системы (20). В связи с этим предложенный алгоритм обращения ЛДС в качестве одной из компонент содержит оценку числа обусловленности матрицы системы уравнений (20).

Программный комплекс для обращения динамических систем. Содержит следующие основные структурные блоки:

1. Блок ввода исходной информации – ввод матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и размерностей m, n.

2. Блок формирования задания, включающий случайный или с фиксированным шагом выбор N значений компонент требуемого вектора выхода $\boldsymbol{y}^*(t)$ на заданном временном интервале $[t_0, t_1]$. Задание степени l аппроксимирующих полиномов и вычисление их коэффициентов на основе метода наименьших квадратов.

3. Формирование матрицы $\mathbf{\Phi}$ линейной системы уравнений (20), и вычисление числа обусловленности $\operatorname{cond}(\mathbf{\Phi})$ на основе евклидовой нормы. Если $\operatorname{cond}(\mathbf{\Phi}) \le 100$, то следует решение системы (20) методом Гаусса. В противном случае степень аппроксимирующих полиномов l увеличивается на единицу.

4. Правильность решения задачи обращения контролируется путем численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (1), (2) при нулевых начальных условиях и сравнения полученных значений вектора $\boldsymbol{y}(t)$ с соответствующими значениями исходной функции $\boldsymbol{y}^*(t)$.

Выводы. Предложено и обосновано матричное представление полиномиальных сигналов, что позволило моделировать динамические процессы как статические линейные преобразования в пространстве прямоугольных матриц. Получен достаточно простой и эффективный алгоритм решения задачи инверсии линейных управляемых динамических систем в условиях полиномиальных воздействий, а также метод оценки степени робастности результатов для конкретных задач синтеза систем управления.

Список литературы

1. *Ильин А. В.* Методы робастного обращения динамических систем / *А. В. Ильин, С. К. Коровин, В. В. Фомичев.* – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 219с.
2. *Костенко Ю. Т.* Системы управления с динамическими моделями / *Ю. Т. Костенко, Л. М. Любчик.* – Х. : Основа, 1996. – 212 с.
3. *Пухов Г. Е.* Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов / *Г. Е. Пухов, К. Д. Жук.* – К. : Наукова думка, 1966. – 218 с.
4. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамических управляемых систем. Линейные модели / *П. Д. Крутько.* – М. : Наука, 1987. – 304 с.
5. *Борухов В. Т.* Критерии обратимости линейных стационарных многомерных систем / *В. Т. Борухов* // Автоматика и телемеханика. – 1978, вып. 11. – С. 5–11.
6. *Гудвин Г. К.* Проектирование систем управления / *Г. К. Гудвин, С. Ф. Граббе, М. Э. Сальгадо.* – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 911 с.
7. *Trentelman H.* ControlTheory for Linear Systems / *H. Trentelman, A. Stoorvogel, M. Hautus.* – Режим доступа: http://www.math.rug.nl/trentelman/psfiles/book – Дата обращения : 10 апреля 2017.
8. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа / *Ш. Е. Микеладзе.* – М. : Гостехиздат, 1953. – 527 с.
9. *Ланкастер П.* Теория матриц / *П. Ланкастер.* – М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. – 280 с.

References (transliterated)

1. Il'in A. V., Korovin S. K., Fomichev V. V. *Metody robastnogo obrashcheniya dinamicheskikh sistem* [Methods of robust inversion of dynamical systems]. Moskow, FIZMATLIT Publ., 2009. 219 p.

ISSN 2079-0023 (print)
ISSN 2410-2857 (online)

2. Kostenko Yu. T., Lyubchik L. M. *Systemy upravleniya s dinamicheskimi modelyami* [Methods of robust inversion of dynamical systems]. Kharkiv, Osnova Publ., 1996. 212 p.
3. Puhov G. E., Zhuk K. D. *Sintez mnogosvyaznykh system upravleniya po metodu obratnykh operatorov* [Synthesis of multiply connected control systems by the method of inverse operators]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1996. 218 p.
4. Krut'ko P. D. *Obratnyye zadachi dinamicheskikh upravlyayemykh sistem. Lineynyye modeli* [Inverse problems of dynamical control systems. Linear models]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 218 p.
5. Borukhov V. T. Kriterii obratimosti lineynykh statsionarnykh mnogomernykh sistem [Criteria for the reversibility of linear stationary multidimensional systems]. *Avtomatika i telemechanika* [Automation and telemechanics], 1978, no. 2. pp. 5–11.
6. Goodwin G. C., Graebe S. F., Salgado M. E. *Proyektirovaniye sistem upravleniya* [Design of control systems]. Moscow, Binom Publ., 2004. 911 p.
7. Trentelman H., Stoorvogel A., Hautus M. *Control Theory for Linear Systems*. Available at: http://www.math.rug.nl/trentelman/psfiles/book (accessed: 10.04.2017.)
8. Mikeladze Sh. E. *Chislennyye metody matematicheskogo analiza* [Numerical methods of mathematical analysis]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1953. 527 p.
9. Lankaster P. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka Publ. 1973. 280 p.

Поступила (received) 17.05.2017

Бібліографічні описи / *Библиографические описания* / *Bibliographic descriptions*

Обернення лінійних динамічних систем в класі поліноміальних сигналів / О. С. Куценко, В. І. Товажнянський, М. А. Одарченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 28 (1250). – С. 19–22. – Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2079-0023.

Обращение линейных динамических систем в классе полиномиальных сигналов / А. С. Куценко, В. И. Товажнянский, Н. А. Одарченко // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харків : НТУ «ХПИ», 2017. – № 28 (1250). – С. 19–22. – Библиогр.: 9 назв. – ISSN 2079 0023.

Inversion of linear dynamical systems in the polynomial signals class / O. S. Kutsenko, V. I. Tovagnyansky, M. A. Odarchenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: System analysis, control and information technology. – Kharkov : NTU "KhPI", 2017. – No. 28 (1250). – P. 19–22. – Bibliogr.: 9. – ISSN 2079-0023.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Куценко Олександр Сергійович – др. техн. наук, професор, завідувач каф. системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна, e-mail: kuzenko@kpi.kharkov.ua.

Куценко Александр Сергеевич – др. техн. наук, профессор, заведующий каф. системного анализа и информационно-аналитических технологий, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина, e-mail: kuzenko@kpi.kharkov.ua.

Kutsenko Oleksandr Sergijovych – head of computer science department, National Technical University «Kharkiv Politechnic Institute», Kharkiv, Ukraine. e-mail: kuzenko@kpi.kharkov.ua.

Товажнянський Володимир Ігорович – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант; тел.: (057) 707-61-03; e-mail: vtovazhnianskyi@mail.ru

Товажнянский Владимир Игоревич – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», аспирант; тел.: (057) 707-61-03; e-mail: vtovazhnianskyi@mail.ru.

Tovagnyansky Vladimir Igorevych – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", graduate student; tel.: (057) 707-61-03; e-mail: vtovazhnianskyi@mail.ru.

Одарченко Микита Андрійович – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», магістр; тел.: (057) 707-61-03; e-mail: odarchenko.na21@gmail.com.

Одарченко Никита Андреевич – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», магистр; тел. (057) 707-61-03; e-mail: odarchenko.na21@gmail.com.

Odarchenko Mykyta Andriyovich – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", master; tel.: (057) 707-61-03; e-mail: odarchenko.na21@gmail.com.