УДК 519.2 **DOI: 10.20998/2079-0023.2018.44.02**

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, А. Ю. СИДОРЕНКО

РЕВЕРСНЫЕ ФУНКЦИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА-СВЕРТКИ ОТ НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрен процесс, обладающий свойствами стационарности, нормальности и марковости. Для заданного временного интервала изучены энергетический функционал и функционал сверточного типа. При аналитическом рассмотрении задач теории вероятностей и математической статистики распространено допущение о том, что рассматриваемая задача получила своё разрешение, если построена характеристическая (производящая) функция. Однако, операция обратного преобразования Фурье или обратного преобразования Лапласа вызывает основные трудности в вычислительном отношении. Как числовая процедура преобразование Лапласа характеризуется неустойчивостью, степень которой увеличивается с ростом параметра преобразования. В работе предложен и использован подход для решения задачи статистики функционала, основанный на применении реверсных функций, что дало возможность получения аналитического выражения для производящей функции распределения случайных значений функционала-свертки. Проведен анализ статистических свойств функционала-свертки. Представлены математическое ожидание и дисперсия функционала-свертки. В данной работе плотность и интегральный закон распределения получены численно с помощью обратного преобразования Лапласа для выбранных значениях времени наблюдения T, декремента случайного процесса ν и его интенсивности σ_X^2. Приведены зависимости плотности и функций распределения для заданных значений параметров функционалов. Из расчетов следует, что увеличение параметра $T\sigma_X^2$ приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений. Уменьшение параметра νT приводит к локализации значений функционала-свертки во флуктуационной области $z \approx 0$. Плотность $f(z)$ симметрична относительно $z = 0$, имеет единственный максимум, две точки перегиба и экспоненциальную асимптотику на периферих.

Ключевые слова: стационарность, нормальность, марковость, интегральные квадратичные функционалы, энергетический функционал и функционал сверточного типа, статистические свойства функционала-свертки.

О. С. МАЗМАНІШВІЛІ, Г. Ю. СИДОРЕНКО

РЕВЕРСНІ ФУНКЦІЇ ТА РОЗПОДІЛ ІМОВІРНОСТЕЙ ВИПАДКОВОГО ФУНКЦІОНАЛА-ЗГОРТКИ З НОРМАЛЬНОГО МАРКІВСЬКОГО ПРОЦЕСА

Розглядається процес, що володіє властивостями стаціонарності, нормальності та марковості. Для заданого часового інтервалу вивчено енергетичний функціонал та функціонал-згортку. При аналітичному розгляді задач теорії ймовірностей та математичної статистики є припущення, що задача, що розглядається, буде вирішена, якщо побудована характеристична (твірна) функція розподілу. Це зумовлено тим, що при складанні випадкових величин щільність розподілу є багатократною згорткою парціальних щільностей. В той час, коли твірна функція є добутком парціальних твірних функцій, тобто дія, яка більш здійснена. Але, зворотне перетворення Фур'є або зворотне перетворення Лапласа викликає основні складності в обчислювальному відношенні. Як чисельна процедура перетворення характеризується своєю нестійкістю, степінь якої зростає з параметром перетворення. В роботі використаний підхід, заснований на застосуванні реверсних функцій, що дало можливість отримання аналітичного виразу для твірної функції розподілу випадкових значень функціоналу-згортки. Проведено аналіз статистичних властивостей функціоналу-згортки. Щільність розподілу ймовірностей та інтегральний розподіл отримано чисельно з використанням зворотного перетворення Лапласа для вибраних значень часу спостереження T, декременту випадкового процесу ν та його інтенсивності σ_X^2. Наведені залежності щільності та функцій розподілу для заданих значень параметрів функціоналів. З проведених розрахунків випливає, що збільшення параметра $T\sigma_X^2$ приводить до розширення значень функціоналу-згортки в периферійні області більших ухилень. Зменшення параметра νT призводить до локалізації значень функціоналу-згортки в межах флуктуаційної області $z \approx 0$. Щільність розподілу $f(z)$ симетрична відносно $z = 0$, має єдиний максимум, дві точки перегину та експоненціальну асимптотику на периферіях.

Ключові слова: стаціонарність, нормальність, марковість, інтегральні квадратичні функціонали, енергетичний функціонал та функціонал згорточного типу, статистичні властивості функціоналу-згортки.

O. S. MAZMANISHVILI, G. YU. SYDORENKO

REVERSAL FUNCTIONS AND PROBABILITY DISTRIBUTION OF THE PANDOM CROSS-FUNCTIONAL FROM NORMAL MARKOV PROCESS

The process, which has the properties of stationary, normality and markovity, is considered. For a given time interval, an energy functional and a cross-functional are studied in this article. In analytic consideration of the problems of probability theory and mathematical statistics, the assumption is widespread that the problem in question has been resolved if the characteristic (generating) function is constructed. However, the operation of the inverse Laplace transform causes the computational difficulties. As a numerical procedure, the inverse Laplace transform is characterized by instability, the degree of which increases with the transformation parameter. An approach based on the application of the reverse functions was proposed and used, which made it possible to obtain an analytical expression for the generating function of the distribution of random values of the cross-functional in this article. The analysis of the statistical properties of the cross functional is carried out. The density of probability distribution and the integral distribution law are obtained numerically using the inverse Laplace transform for the selected values of the observation time T, the decrement of the process ν and its intensity σ_X^2. The dependences of the density and distribution functions for given values of the parameters of functionals are given. It follows from the calculations that an increase in the parameter $T\sigma_X^2$ leads to the expansion of the values of the functional in the peripheral regions of large deviations. Reducing the parameter νT leads to the localization of the values of the cross-functional in the fluctuation domain $z \approx 0$. The density $f(z)$ is symmetric with respect $z = 0$. It has a unique maximum, two points of inflection, and an exponential asymptotic behavior on the periphery.

Keywords: stationary, normality, markovity, integral quadratic functional, energy functional and cross-type functional, statistical properties of cross-functional.

Введение. При аналитическом рассмотрении задач теории вероятностей и математической статистики распространено допущение о том, что рассматриваемая задача получила своё разрешение, если построена характеристическая (производящая) функция рассматриваемой случайной величины. Это можно пояснить тем, что при сложении случайных величин искомая плотность распределения композиции есть многократная (по числу слагаемых) свертка парциальных плотностей, в то время как характеристическая функция композиции является произведением парциальных характеристических функций [1, 2], то есть операцией существенно более просто выполнимой, чем многократное интегрирование.

Однако, операция обратного преобразования Фурье или обратного преобразования Лапласа вызывает основные трудности в вычислительном отношении. Как числовая процедура преобразование Фурье характеризуется неустойчивостью, степень которой увеличивается с ростом параметра преобразования. Несмотря на большое число попыток [3, 4], к настоящему времени отсутствуют устойчивые алгоритмы обращения Фурье.

С другой стороны, автокорреляционный анализ наряду со спектральным играет большую роль в практическом применении, например, в теории сигналов. В настоящее время корреляция является наиболее широко распространенным методом обработки различных сигналов и данных (оптических и других). При всех своих различных проявлениях корреляция, по существу, является методом оценки взаимных связей, имеющих форму подобий или совпадений. Таким образом, процесс корреляции сводится к сравнению (сопоставлению) двух картин или процессов. Сопоставление картин, сигналов или процессов можно произвести, используя понятие корреляционной функции [2]. Корреляция также является неотъемлемой частью процесса свертки, который, по сути, та же корреляция двух последовательностей данных, при вычислении которой одна из последовательностей обращена во времени. Это означает, что для вычисления корреляции и свертки могут использоваться одни и те же алгоритмы.

Постановка задачи. В ряде задач возникает необходимость вычисления случайных величин, которые представляют собой квадратичные функционалы от траекторий нормального марковского процесса. Примером может служить энергетический и сверточный функционал

$$J_1[x] = \int_0^T x^2(t)dt\,, \qquad J_2[x] = \int_0^T x(t)x(T-t)dt, \tag{1}$$

а также различные варианты функционала $J_1[x]$, например, функционалы корреляционного и интерференционного вида [1-3].

В функционалах (1) $0 \le t \le T$ – временной интервал наблюдения, а под $\{x(t)\}$ понимается нормальный процесс Орнштейна-Уленбека (ОУ-процесс) [4, 5]. Стационарный, вещественный случайный ОУ-процесс имеет декремент ν, интенсивность σ_X^2, а также безусловные нулевое математическое ожидание и дисперсию $\mathrm{M}[x^2(t)] = \sigma_X^2$. При этом ОУ-процесс $x(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}x(t) + \nu x(t) = w(t), \tag{2}$$

где ν – декремент $\nu > 0$,

$w(t)$ – винеровский случайный процесс с корреляционной функцией

$$K_U(t,t') = \mathrm{M}[w(t)w(t')] = \frac{1}{2\sigma_W^2}\min(t,t').$$

Задача о нахождении статистических свойств функционала $J_1[x]$ рассматривалась в [6, 7]. Их полное описание содержится в полученном выражении для производящей (характеристической) функции $Q_Y(\lambda)$ случайной величины $Y = J_1[x]$.

Поставим задачу о нахождении плотности распределения $f(z)$ случайных значений z функционала $Z = J_2[x]$ (1) или, что эквивалентно, производящей (характеристической) функции (ХФ) $Q_Z(\lambda)$ распределения вероятностей для случайного функционала-свертки с параметром λ.

$$Q_Z(\lambda) = \left\langle \exp\left(-\lambda\int_0^T x(t)x(T-t)dt\right)\right\rangle. \tag{3}$$

Здесь уголковыми скобками будем обозначать усреднение в пространстве функций $\{x(t)\}$.

Поставленная задача ранее рассматривалась в работах [8 -10]. В этих работах для вычисления ХФ пришлось преодолеть значительные технические трудности, в частности, найти аналитическое представления для фундаментальной матрицы $\exp(A)$, где A – некоторая построенная (4×4)-матрица.

В настоящей работе предложен и использован менее сложный подход, основанный на применении реверсных функций. Под реверсной функцией $R[\varphi(t)]$ будем понимать функцию, обладающей свойством $R[\varphi(t)] = \varphi(T-t)$, то есть свойством временной инверсии на интервале $0 \le t \le T$.

Вычисление характеристической функции. Рассматривая функционал $J_2[x]$ (1) в пространстве, образованном множеством функций $\{x(t)\}$, запишем его в виде

$$J_2[x] = \frac{1}{4}\int_0^T \Big[\big(x(t)+x(T-t)\big)^2 - \\ - \big(x(t)-x(T-t)\big)^2\Big]dt. \tag{4}$$

Тогда

$$Q_Z(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\frac{1}{4}\int_0^T [x(t)+x(T-t)]^2\,dt + \\ + \frac{1}{4}\int_0^T [x(t)-x(T-t)]^2\,dt\right\}\right\rangle. \tag{5}$$

Введем следующие функции:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= x(t) + x(T-t),\\
v(t) &= x(t) - x(T-t).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Принимая во внимание явный вид функционала (1), представим его в виде интегралов от суммы квадратичных форм

$$
\begin{aligned}
&J_2[x] = J_U[x] + J_V[x] = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^T \left[x(t) + R[x(t)]\right]^2 dt - \\
&- \frac{1}{4}\int_0^T \left[x(t) - R[x(t)]\right]^2 dt.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Поскольку для функций $u(t) = x(t) + x(T-t)$ и $v(t) = x(t) - x(T-t)$ справедливо $\langle u(t)\rangle = 0$, $\langle v(t)\rangle = 0$ и $\langle u(t)v(t)\rangle = 0$, то они, с учетом нормального свойства процесса $x(t)$, статистически независимы [3]. Отсюда вытекает, что характеристическую функцию $Q_z(\lambda)$ можно записать в виде

$$
Q_Z(\lambda) = Q_U(\lambda) Q_V(\lambda), \tag{8}
$$

где

$$
\begin{aligned}
Q_U(\lambda) &= \left\langle \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\int_0^T u^2(t)dt\right)\right\rangle,\\
Q_V(\lambda) &= \left\langle \exp\left(\frac{\lambda}{4}\int_0^T v^2(t)dt\right)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{9}
$$

В факторизационном представлении (8) для ХФ $Q_Z(\lambda)$ сначала рассмотрим первый множитель $Q_U(\lambda)$. Наряду с множеством функций $\{u(t)\}$ рассмотрим сопряженное с ним множество функций $\{p(t)\}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
Q_U(\lambda) &= \left\langle \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\int_0^T u^2(t)dt\right)\right\rangle = \left\langle \int Dp(t) \times \right.\\
&\left. \times \exp\left\{-\int_0^T p^2(t)dt + \sqrt{-\lambda}\int_0^T p(t)u(t)dt\right\}\right\rangle,
\end{aligned} \tag{10}
$$

где $Dp(t)$ – обобщенный дифференциал в пространстве функций $\{p(t)\}$. В силу нормальности функций $\{u(t)\}$ статистическое среднее в (10) равно

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \exp\left(\sqrt{-\lambda}\int_0^T p(t)u(t)dt\right)\right\rangle = \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda\int_0^T dt\, p(t)\int_0^T dt' p(t')\langle u(t)u(t')\rangle\right\}
\end{aligned} \tag{11}
$$

что после прямого вычисления коррелятора $K_U(t,t') = \langle u(t),u(t')\rangle$ дает

$$
\begin{aligned}
Q_U(\lambda) &= \int Dp(t)\left\langle \exp\left\{-\int_0^T p^2(t)\,dt - \frac{\lambda}{2}\sigma_X^2 \times \right.\right.\\
&\times \int_0^T dt\, p(t)\int_0^T dt' p(t')\,[\exp(-\nu|t-t'|) + \\
&\left.\left. + \exp(-\nu|t+t'-T|)]\right\}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Функциональный интеграл (12) равен детерминанту Фредгольма

$$
Q_U(\lambda) = \det(E + \lambda K_U), \tag{13}
$$

где E – единичный оператор.

Утверждение 1.

Статистические средние, основанные на корреляторе $K_U(t,t') = \langle u(t)u(t')\rangle$ с собственными функциями $\{\phi_n(t)\}$ и собственными числами $\{\Lambda_n\}$, эквивалентны соответствующим статистическим средним, основанным на корреляторе $K_X(t,t') = \langle x(t)x(t')\rangle$ с собственными функциями $\{\phi_n(t)\}$ и собственными числами $\{\lambda_n\} = \{2\Lambda_n\}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение для собственных функций $\{\phi_n(t)\}$ оператора K_U с соответствующим им набором собственных чисел $\{\Lambda_n\}$, $n = 1,2,\ldots$,

$$
\begin{aligned}
\phi_n(t) &= \Lambda_n\int_0^T dt'\phi_n(t')\,[\exp(-\nu|t-t'|) + \\
&+ \exp(-\nu|t+t'-T|)].
\end{aligned} \tag{14}
$$

Коррелятор $K_U(t,t')$ имеет вид

$$
K_U(t,t') = \langle x(t)x(t')\rangle + \langle x(t)x(T-t')\rangle, \tag{15}
$$

и выражен в (14) через корреляторы исходного случайного ОУ-процесса.

Во втором слагаемом под интегралом (14) осуществим реверсную замену во времени $T - t' = \tau$, тогда, вновь используя переменную t', получим

$$
\begin{aligned}
\phi_n(t) &= \Lambda_n\int_0^T dt'\left[\phi_n(t') + R[\phi_n(t')]\right] \times \\
&\times \exp(-\nu|t-t'|).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Из (16) вытекает, что для реверсной функции справедливо

$$
\begin{aligned}
&R[\phi_n(t)] = \phi_n(T-t) = \\
&= \Lambda_n\int_0^T dt'[\phi_n(t') + R[\phi_n(t')]] \times \\
&\times \exp(-\nu|t+t'-T|)
\end{aligned} \tag{17}
$$

или

$$
\begin{aligned}
R[\phi_n(t)] &= \Lambda_n\int_0^T dt'\left[\phi_n(t') + R[\phi_n(t')]\right] \times \\
&\times \exp(-\nu|t-t'|).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Складывая (16) и (18), приходим к уравнению

$$
\psi_n(t) = 2\Lambda_n\int_0^T dt'\psi_n(t')\exp(-\nu|t-t'|), \tag{19}
$$

где $\psi_n(t) = \phi_n(t) + R[\phi_n(t)]$. В этом уравнении ядром служит уже коррелятор только ОУ-процесса.

Из (16) и (19) можно заключить, что нахождение статистических средних, основанных на корреляторе $K_U(t,t')$ можно свести к нахождению статистических средних, основанных на корреляторе $K_X(t,t')$. Поэтому

$$Q_U(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{4}\int_0^T dt[x(t)+x(T-t)]^2\right\}\right\rangle = \\ = \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\int_0^T x^2(t)\,dt\right\}\right\rangle. \qquad (20)$$

В правой части этого выражения получена производящая функция $Q_Y(\lambda)$ энергетического функционала $Y = J_1[x]$ (1). Поэтому

$$Q_U(\lambda) = Q_Y(\lambda/2). \qquad (21)$$

Утверждение 2.

Статистические средние, основанные на корреляторе $K_V(t,t') = \langle v(t)v(t')\rangle$ с собственными функциями $\{\phi_n(t)\}$ и собственными числами $\{\Lambda_n\}$, эквивалентны соответствующим статистическим средним, основанным на корреляторе $K_X(t,t')$.

Доказательство. Преобразования, аналогичные выше изложенным, приводят к выражению

$$Q_V(\lambda) = \left\langle \exp\left\{\frac{\lambda}{2}\int_0^T x^2(t)\,dt\right\}\right\rangle. \qquad (22)$$

Поэтому

$$Q_Z(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\lambda\int_0^T x(t)x(T-t)\,dt\right\}\right\rangle = \\ = Q_Y(\lambda/2)Q_Y(-\lambda/2). \qquad (23)$$

Для полученных функциональных средних можно использовать ранее найденные аналитические представления [5]. Это окончательно дает для искомой характеристической функции

$$Q_Z(\lambda) = \\ = \left(\frac{4r_+\nu\,e^{\nu T}}{(r_+ + \nu)^2\,e^{r_+T} - (r_+ - \nu)^2 e^{-r_+T}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left(\frac{4r_-\nu\,e^{\nu T}}{(r_- + \nu)^2\,e^{r_-T} - (r_- - \nu)^2 e^{-r_-T}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (24)$$

где $r_+ = \sqrt{\nu^2 + \lambda\nu\sigma_X^2}$, $r_- = \sqrt{\nu^2 - \lambda\nu\sigma_X^2}$.

Замечание. После замены в (24) $2\nu\sigma_X^2 \Rightarrow \sigma_W^2$ и предельного перехода $\nu \to 0$ в получившемся выражении приходим к характеристической функции $Q_W(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J[w])\rangle$ функционала-свертки $J[w] = \int_0^T dt w(t)w(T-t)$ от винеровского процесса $w(t)$ [3, 4]:

$$Q_W(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J[w])\rangle = \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda}\sigma_W^2 T\right)}. \qquad (25)$$

Свойства сверточного функционала. Найденная характеристическая функция (24) $Q_Z(\lambda)$ функционала-свертки $Z = J_2[x]$ от нормального марковского процесса $x(t)$ содержит всю статистическую информацию о случайной величине Z. В частности, плотность распределения вероятностей $f(z)$ можно получить с помощью обратного преобразования Лапласа.

На рис. 1 приведена зависимость плотности $f(z)$ для заданных значений параметров расчета. Плотность распределения вероятностей $f(z)$ симметрична относительно линии $z = 0$. Вместе с тем она удовлетворяет общим требованиям, предъявляемым к плотностям распределениям вероятностей интегральных квадратичных функционалов, а именно, $f(z)$ имеет единственный максимум, две точки перегиба и экспоненциальную асимптотику на периферииях.

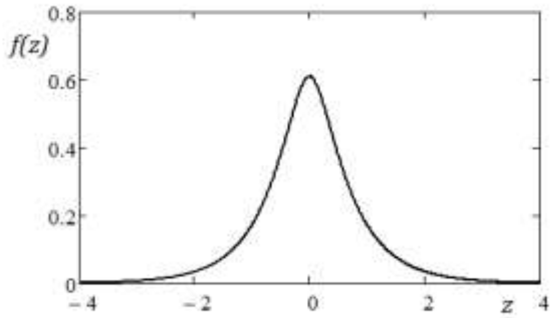

Рис. 1. Плотность распределения вероятностей $f(z)$; параметры: $\sigma_X^2 = 1.0$, $T = 4.0$, $\nu = 1.0$

На рис. 2 приведена зависимость функции распределения $F(z)$ для этого же функционала.

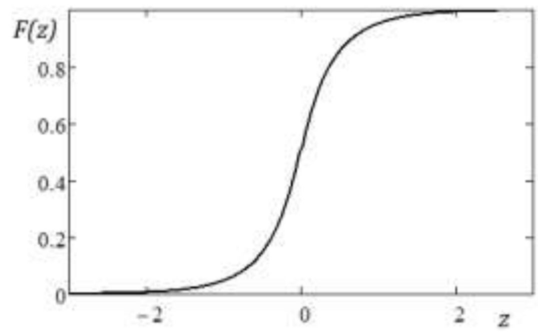

Рис. 2. Функция распределения вероятностей $F(z)$; параметры: $\sigma_X^2 = 1.0$, $T = 4.0$, $\nu = 1.0$

При ν коэффициент корреляции влияет на поведение плотности и функции распределения функционала (1). На рис. 3–4 представлены графики плотности и функции распределения функционала (1) при изменении параметра декремента ν.

С увеличением уровня корреляции (при уменьшении параметра ν) график плотности распределения имеет тенденцию локализоваться вокруг среднего значения функционала (1), поэтому плотности распределения вероятностей при уменьшении декремента становятся более пологими, как видно из рис. 3.

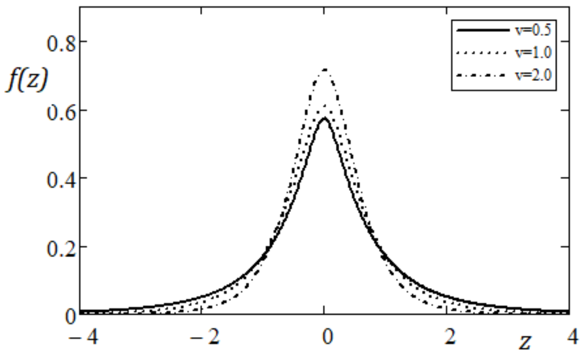

Рис. 3. Плотности распределения вероятностей $f(z)$; параметры: $\sigma_X^2 = 1.0$, $T = 4.0$, $\nu = 0.5, 1.0, 2.0$

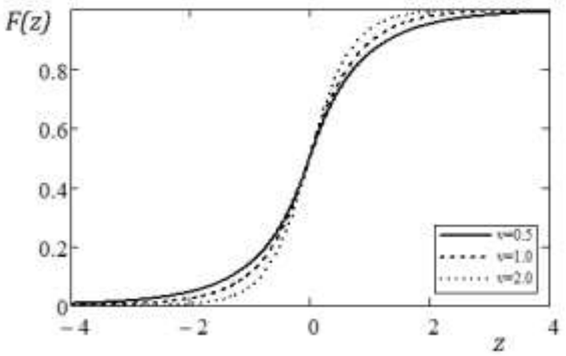

Рис. 4. Функции распределения вероятностей $F(z)$; параметры: $\sigma_X^2 = 1.0$, $T = 4.0$, $\nu = 0.5, 1.0, 2.0$

Также следует, что уменьшение параметра $\chi = \nu T$, равного отношению интервала наблюдения T к длине корреляции $l_{corr} = \nu^{-1}$ ОУ-процесса, приводит к локализации значений функционала-свертки во флуктуационную область $z \approx 0$.

Из аналогичных расчетов, можно показать, что увеличение параметра $T\sigma_X^2$ приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений. На рис. 5–6 приведены плотности и функции распределения для заданного квадратичного функционала при изменении параметра интенсивности σ.

Из рис. 1–6 можно сделать вывод о том, что приведенные зависимости отвечают общим закономерностям, характерным для плотности и функции распределения.

Из (24) следует для первого момента, что

$$\boldsymbol{M}[Z] = 0. \tag{25}$$

далее, дисперсия равна

$$\boldsymbol{M}[Z^2] = \sigma_X^4 T^2 \frac{\chi - 1 + \exp(-\chi)}{\chi^2}, \quad \chi = \nu T. \tag{26}$$

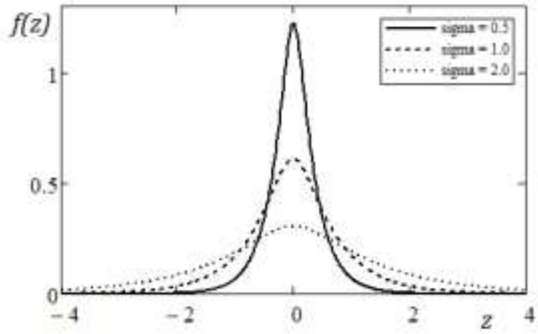

Рис. 5. Плотности распределения вероятностей $f(z)$; параметры: $\sigma_X^2 = 0.5, 1.0, 2.0$, $T = 4.0$, $\nu = 1.0$

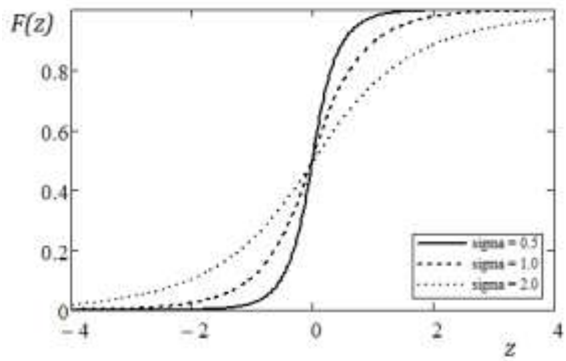

Рис. 6. Функции распределения вероятностей $F(z)$; параметры: $\sigma_X^2 = 0.5, 1.0, 2.0$, $T = 4.0$, $\nu = 1.0$

На рис. 7 показана зависимость среднеквадратического разброса σ плотности $f(z)$ случайных значений функционала-свертки Z.

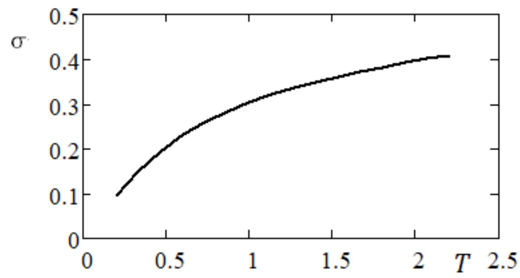

Рис. 7. Зависимость среднеквадратического разброса σ плотности $f(z)$ от длительности наблюдения T; параметры: $\sigma_X^2 = 1$, $\nu = 1$

Из рис. 7 можно сделать вывод, что при увеличении интервала наблюдения среднеквадратический разброс плотности также возрастает.

На рис. 8 показана зависимость параметра интенсивности $\sigma = \sqrt{\boldsymbol{M}[Z^2]}$ (26) плотности $f(z)$ случайных значений функционала-свертки Z.

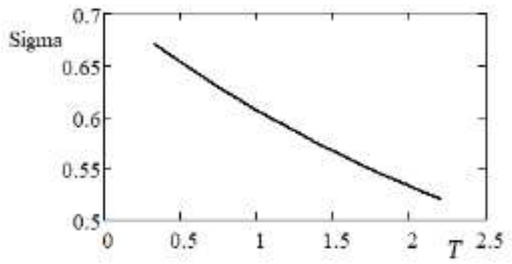

Рис. 8. Зависимость параметра интенсивности σ от длительности наблюдения T; параметр: $\nu = 1$

Выводы. В работе рассмотрен случайный процесс Орнштейна-Уленбека, обладающий свойствами стационарности, нормальности и марковости. Для заданного временного интервала изучены энергетический функционал и функционал сверточного типа. Предложен подход, основанный на применении реверсных функций, что дало возможность получения аналитического выражения для производящей функции распределения случайных значений функционала-свертки.

Плотность и интегральный закон распределения получены численно для выбранных значениях времени наблюдения T, декремента случайного процесса ν и его интенсивности σ_X^2. Получено, что увеличение параметра $T\sigma_X^2$ приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений. Уменьшение параметра νT приводит к локализации значений функционала-свертки во флуктуационной области $z \approx 0$. Плотность $f(z)$ симметрична относительно линии $z = 0$ и удовлетворяет общим требованиям, предъявляемым к плотностям распределениям вероятностей интегральных квадратичных функционалов.

Список литературы

1. Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S *On the theory of Brownian Motion*. Phys. Rev. 1930. V. 36. P. 823–841.
2. Чандрасекар С. *Стохастические проблемы в физике и астрономии*. Москва: Гос. издательство иностранной литературы. 1947. 168 с.
3. Тихонов В. И., Миронов М. А. *Марковские процессы* Москва: Сов. Радио. 1977. 488 с.
4. Habibi A. *Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image*. Proc. IEEE. 1972. V. 60. № 7. P. 878–883.
5. Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А. *Шероховатость поверхностей.* Москва: Наука. 1975. 344 с.
6. Клячко А. А., Солодянников Ю. В. Вычисление характеристических функций некоторых функционалов от винеровского процесса и броуновского моста. *Теория вероятн. и ее применение*. 1986. Т. 31. Вып. 3. С. 569–573.
7. Лэкс М. *Флуктуации и когерентные явления*. Москва: Наука. 1974. 299 с.
8. Мазманишвили А. С. *Континуальное интегрирование как метод решения физических задач*. Киев: Наукова Думка. 1987. 224 с.
9. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Статистические свойства функционала-свертки от нормального марковского процесса. *Доклады Академии Наук УССР*. 1988. № 1. С. 14–16.
10. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса. *Проблемы передачи информации*. 1990. Т. 26. Вып. 3. С. 96–101.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва: Наука. 2004. 356 с.
12. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. *Справочник по математике*. Москва: Наука. 1981. 719 с.
13. Задирака В. К. *Теория вычисления преобразования Фурье*. Київ: Наукова Думка. 1983. 216 с.

References (transliterated)

1. Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S. On the theory of the Brownian Motion. *Phys. Rev.*, 1930, v. 36, pp. 823–841.
2. Chandrasekar S. *Stohasticheskie problemy v fisike I astronomij*i [Stochastic problems in physics and astronomy]. Moscow, GIIL Publ., 1947. 168 p.
3. Tihonov V. I., Mironov M. A. *Markovskie processy* [Process of Markov]. Moscow, Sov., Radio Publ., 1977. 488 p.
4. Habibi A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image. *Proc. IEEE*, 1972, vol. 60, no. 7, pp. 878–883.
5. Husu A. P., Vitenberg Yu. R., ed. *Sherohovatost' poverhnosti* [Surface of roughness]. Moscov, Nauka Publ., 1975. 344 p.
6. Klyachko A. A., Solodyannikov Yu. V. Vychislenie harakteristicheskih funkciy nekotoryh funkcionalov ot vinnerovskogo processa [The calculation of the characteristic functions of some functionals of the Wiener process]. *Teoriya veroyatnostey i primenenie* [Probability theory and its application]. 1986, vol. 31, issue 3, pp. 569–573.
7. Lax M. Fluktuaciya i kogerentnye yavlenia [Fluctuations and coherent phenomena]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 299 p.
8. Mazmanishvili O. S. *Kontinual'noe integrirovanie kak metod resheniya fizicheskih zadach* [Continual integration as a method for solving physical problem]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1987. 224 p.
9. Vyrchenko Yu. P., Mazmanishvili O. S. Statisticheskie svoystva funkcionala-svertki ot normalnogo markovskogo processa [Statistical properties of convolutional functional from a normal Markov process]. *Doklady Akademii Nauk USSR*. 1988, issue 1, pp. 14–16.
10. Vyrchenko Yu. P., Mazmanishvili O. S. Raspredelenie veroyatnostey sluchaynogo funkcionala funkcionala-svertki ot normalnogo markovskogo processa [Probability distribution of a convolutional functional from a normal Markov process]. *Problemy peredachi informacii*, 1990, issue 26, no. 3, pp. 96–101.
11. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funkciy I funkcional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 2004. 356 p.
12. Bronshtein I. N., Semendyaev K. A. *Spravochnik po matematike* [Math Handbook]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 719 p.
13. Zadiraka V. K. *Teoriya vychisleniya preobrazovaniya Fur'e* [Fourier Transform Computation Theory]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1983. 216 p.

Поступила (received) 05.11.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Мазманішвілі Олександр Сергійович (***Мазманишвили Александр Сергеевич***, ***Mazmanishvili Oleksandr Serhiyovych***) – доктор фізико-математичних наук, професор, старший науковий співробітник ННЦ ХФТІ, м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0373-0626; e-mail: mazmanishvili@gmail.com

Сидоренко Ганна Юріївна (***Сидоренко Анна Юрьевна***, ***Sydorenko Ganna Yuriivna***) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0761-2793; e-mail: annsydorenko01@gmail.com