МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING

УДК 519.612 **DOI: 10.20998/2079-0023.2019.01.07**

Н. А. МАРЧЕНКО, Р. О. РУДЕНКО

ПОЛІПШЕНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Проведений огляд існуючих методів дослідження стійкості розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що залежать від вхідних даних, тобто варіацій параметрів. Розглянуто методи оцінки стійкості розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, такі як числа зумовленості, модульні визначники та побудова таблиці знаків за оригінальним та поліпшеним методом побудови. Реалізоване програмне забезпечення для оцінки стійкості систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою чисел обумовленості, модульних визначників та побудови таблиці знаків для знаходження точних оцінок варіацій розв'язків залежних від варіацій параметрів СЛАР.

В роботі показано, що дослідження стійкості за числами обумовленості дають дуже грубу оцінку можливих похибок розв'язків, але вони є простими в реалізації, та для СЛАР можуть одразу показати, що деякі системи є погано зумовленими, що значно економить час дослідження, особливо якщо СЛАР мають дуже велику розмірність. Дослідження стійкості за модульними визначниками потребують великих розрахунків, але дають досить надійну оцінку зверху щодо можливих варіацій окремих компонент розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Це є дуже важливою особливістю метода тому, що окремі компоненти розв'язку можуть зазнавати значних варіацій, що не враховуються при дослідженні за числами обумовленості. Дослідження стійкості побудовою таблиці знаків надають можливість знайти максимальні варіації окремих компонент розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що насправді можуть бути значно меншими, ніж верхня оцінка можливих варіацій за методом модульних визначників. В роботі запропоновано поліпшений метод побудови таблиці знаків, що знаходить більш точний діапазон можливих варіацій розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Був проведений порівняльний аналіз між традиційним методом побудови таблиці знаків за окремими визначниками та поліпшеним методом побудови таблиці знаків за похідними від ділення визначників за формулою Крамера. Згідно аналізу, поліпшений метод у 30% випадків знаходить варіації, що в 1.3 рази більші ніж варіації, що знаходить попередній метод, та у 5% випадків ці варіації перевищують попередні у 2 або більше разів. Це говорить про те, що традиційний метод у деяких випадках недооцінював можливі відхилення розв'язків, що залежать від варіацій вхідних даних.

Ключові слова: лінійна алгебра, чисельні методи, стійкість, матриця, система лінійних алгебраїчних рівнянь, визначник, модульний визначник, таблиця знаків, число обумовленості

Н. А. МАРЧЕНКО, Р. А. РУДЕНКО

УЛУЧШЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Проведен обзор существующих методов исследования устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), зависящих от входных данных, то есть вариаций параметров. Рассмотрены методы оценки устойчивости решения систем линейных алгебраических уравнений, такие как числа обусловленности, модульные определители и построение таблицы знаков по оригинальному и улучшенному методам построения. Реализовано программное обеспечение для оценки устойчивости систем линейных алгебраических уравнений с помощью чисел обусловленности, модульных определителей и построения таблицы знаков для нахождения точных оценок вариаций решений зависимых от вариаций параметров СЛАУ.

В работе показано, что исследование устойчивости по числам обусловленности дают очень грубую оценку возможных погрешностей решений, но они просты в реализации, и для СЛАУ могут сразу показать, что некоторые системы плохо обусловленными, что значительно экономит время исследования, особенно если СЛАУ имеют очень большую размерность. Исследование устойчивости по модульным определителями требуют больших расчетов, но дают достаточно надежную оценку сверху относительно возможных вариаций отдельных компонент решений систем линейных алгебраических уравнений. Это является очень важной особенностью метода потому, что отдельные компоненты решений могут испытывать значительные вариации, которые не учитываются при исследовании при помощи чисел обусловленности. Исследование устойчивости при помощи построения таблицы знаков дает возможность найти максимальные вариации отдельных компонент решений системы линейных алгебраических уравнений, которые на самом деле могут быть значительно меньше, чем верхняя оценка возможных вариаций методом модульных определителей. В работе предложен улучшенный метод построения таблицы знаков, который находит более точный диапазон возможных вариаций решений системы линейных алгебраических уравнений.

Был проведен сравнительный анализ между традиционным методом построения таблицы знаков по отдельным определителями и улучшенным методом построения таблицы знаков по производным от деления определителей по формуле Крамера. Согласно анализу, улучшенный метод в 30% случаев находит вариации, которые в 1.3 раза больше чем вариации, которые находит предыдущий метод, и в 5% случаев эти вариации превышают предыдущие в 2 или более раз. Это говорит о том, что традиционный метод в некоторых случаях недооценивал возможные отклонения решений, зависящих от вариаций входных данных.

Ключевые слова: линейная алгебра, численные методы, надежность, матрица, система линейных алгебраических уравнений, определитель, модульный определитель, таблица знаков, число обусловленности.

© Н. А. Марченко, Р. О. Руденко, 2019

N. A. MARCHENKO, R. O. RUDENKO

IMPROVED METHOD FOR STABILITY RESEARCH OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

A review of existing methods for stability research of solutions of systems of linear algebraic equations (SLAE) depending on the input data, that is, parameter variations, have been carried out. Methods for stability research of solving systems of linear algebraic equations, such as condition numbers, modular determinants and the construction of a table of signs using the original and improved construction methods, were considered. Software for stability research of systems of linear algebraic equations have been developed. The software is using condition numbers, modular determinants, and construction of table of signs to find accurate estimates of the variations of solutions of SLAEs that depend on parameters variations.
It is shown that stability research using condition numbers gives a very rough estimate of possible errors in solutions, but that research is simple to implement, and for SLAEs it can immediately show that some systems are ill-conditioned, which saves research time, especially if SLAEs have a very large dimensionality. The stability research using modular determinants requires large calculations, but they give a fairly reliable upper estimate with respect to possible variations of individual components of solutions of systems of linear algebraic equations. This is a very important feature of the method because the individual components of solutions may experience significant variations that are not taken into account in the research using condition numbers. The study of stability by constructing a table of signs makes it possible to find the maximum variations of individual components of solutions of a system of linear algebraic equations, which in fact can be significantly less than the upper estimate of possible variations found by method of modular determinants. The paper proposes an improved method for constructing a table of signs, which finds a more accurate range of possible variations of solutions of a system of linear algebraic equations.
A comparative analysis was conducted between the traditional method of constructing a table of signs using individual determinants and an improved method of constructing a table of signs based on the derivatives of the division of determinants using the Cramer formula. According to the analysis, the improved method in 30% of cases finds variations that are 1.3 times greater than the variations that the previous method finds, and in 5% of cases these variations are 2 or more times greater than the previous ones. This suggests that the traditional method in some cases underestimated the possible deviations of solutions that depend on variations of the input data.

Keywords: linear algebra, numerical methods, stability, reliability, matrix, system of linear algebraic equations, determinant, modular determinant, signs table, condition number.

Вступ. За оцінками вчених чисельні методи розв’язування СЛАР застосовуються більш ніж у половині розрахункових математичних задач [1–9]. Традиційні методи розрахунку стійкості розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь не дають надійних результатів [10, 11]. Однією з причин ненадійності розрахунків є неточності в завданні коефіцієнтів рівнянь. Для реальних об’єктів ці коефіцієнти не можуть точно відповідати значенням, заданим при проектуванні, крім того, в ході експлуатації параметри об’єкта можуть зазнавати змін, що впливають на розв’язки. При деяких умовах навіть невеликі зміни в параметрах можуть привести до значних змін у розв’язках, і відповідно до значних змін у поведінці об’єктів.

У даній роботі увага приділяється погрішностям розв’язків, що виникають через варіації вхідних даних розрахунків.

Норма матриці, числа зумовленості. Класичним методом оцінки стійкості розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь є числа зумовленості [1, 2, 10–13]. Якщо розглядається система лінійних рівнянь, яка записується в матричному вигляді як

$$Ax = b, \tag{1}$$

де A – матриця СЛАР;

$\boldsymbol{x}$ – невідомий вектор, що є розв’язком системи;

$\boldsymbol{b}$ – заданий вектор правих частин.

Тоді числом зумовленості називають добуток норми матриці A на норму оберненої матриці. При цьому число зумовленості системи лінійних рівнянь пов’язує властивості матриці системи рівнянь з похибкою розв’язку системи лінійних рівнянь. В найгіршому випадку відносна невизначеність розв’язку $\boldsymbol{x}$ буде перевищувати відносну невизначеність вхідних даних у кількість разів.

Навіть малі числа зумовленості матриці не є надійним показником стійкості отриманих розв’язків. Це пов’язано з тим, що числа зумовленості лише гарантують деякий діапазон значень міри вектору розв’язку $\boldsymbol{x}$, наприклад, його довжини, але не мають відношення до окремих складових розв’язку x_i, що в деяких випадках можуть навіть змінювати знак при достатньо невеликих значеннях числа зумовленості.

Перевагою використання чисел зумовленості є простота використання та мала кількість необхідних обчислювань.

Оцінка похибки за модульними визначниками. В роботах [10, 11] як методи розрахунку стійкості додатково пропонується використовувати оцінки похибки за модульними визначниками та за таблицею їх знаків.

Модульні визначники дозволяють дати оцінку максимально можливої невизначеності визначників системи лінійних алгебраїчних рівнянь, якщо відома невизначеність вхідних даних. Модульний визначник розраховується аналогічно до розрахунку визначника матриці, але усі складові беруться за модулем та усі знаки «мінус» у формулі замінюються на знаки «плюс».

Модульний визначник чисельно пов’язує властивості вхідних даних з мірою відносної невизначеності визначників матриці.

Справжнє значення визначника $\overline{det}$ можна оцінити за допомогою формули:

$$\det_{\text{ном}} - n\varepsilon\det_{\text{мод}} \le \overline{\det} \le \det_{\text{ном}} + n\varepsilon\det_{\text{мод}}, \tag{2}$$

де $\det_{\text{НОМ}}$ – визначник матриці, обчислений за стандартною формулою;

$\det_{\text{МОД}}$ – модульний визначник матриці;

$\overline{\det}$ – справжнє значення визначника матриці;

n – порядок матриці;

ε – можлива відносна похибка в визначенні параметрів матриці.

Виходячи з того, що формула відома Крамера дозволяє отримати значення розв’язків x_i системи лінійних алгебраїчних рівнянь як ділення визначників, та відомостей про невизначеність визначників системи лінійних алгебраїчних рівнянь можемо дати верхню оцінку невизначеності окремих складових розв'язку x_i. Використовуючи формулу Крамера

$$x_i = \frac{D^{<i>}}{D}, \quad (3)$$

де x_i – i-та компонента розв'язку СЛАР;

D – визначник СЛАР, що досліджується;

$D^{<i>}$ – визначник, отриманий із D заміною i-го стовбця на стовбець вільних членів СЛАР, можливо оцінити варіації розв'язку x_i при відносних варіаціях коефіцієнтів $\pm\varepsilon$:

$$\frac{D^{<i>}\min}{\mathrm{Dmax}} < x_i < \frac{D^{<i>}\max}{\mathrm{Dmin}}, \quad (4)$$

де x_i – i-та компонента розв'язку СЛАР;

$D\min$ і $D\max$ – відповідно мінімально і максимально можливе значення визначника СЛАР, отримане за формулою (3);

$D^{<i>}\min$ і $D^{<i>}\max$ – відповідно мінімально і максимально можливе значення визначника $D^{<i>}$, отримане за формулою (3).

Перевагою використання модульних визначників є відносна простота використання (порівняно до методу побудови таблиці знаків) та можливість отримання верхньої границі невизначеності розв'язків.

Головними недоліками використання модульних визначників є значна кількість необхідних обчислювань для матриць великої розмірності, та те, що модульні визначники зазвичай дають завищені значення невизначеності, які не можуть бути досягненні [10, 11]. Для більш точної оцінки необхідно користуватися методом побудови таблиці знаків та розраховувати максимальні і мінімальні значення розв'язків x_i.

Оцінка похибки за таблицею знаків для визначників. Метод оцінки за допомогою «таблиці знаків» ґрунтується на побудові такого прикладу можливого відхилення, що призводить до максимально можливих змін значення розв'язків x_i. Побудова прикладу відхилення, як і у попередньому методі, використовує формулу Крамера (3) як формулу прямого знаходження розв'язків x_i

Розглянемо визначник n-го порядку

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} \pm \varepsilon_{11} a_{11} & \cdots & a_{1n} \pm \varepsilon_{1n} a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm \varepsilon_{n1} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \pm \varepsilon_{nn} a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

як функцію n^2 змінних величин ε_{ij}. Випишемо головну лінійну частину приросту цієї функції:

$$\Delta_{\text{лін}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \Delta\varepsilon_{ij}, \quad (6)$$

де n – порядок матриці,

a_{ij} – елемент визначника з координатами (i,j);

A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij};

$\Delta\varepsilon_{ij}$ – можлива відносна похибка в визначенні елемента a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Кожен елемент таблиці знаків («+» або «–») співпадає зі знаком добутку $a_{ij} A_{ij}$.

Аналогічно попередньому методу за формулами (3) і (4) оцінюються варіації розв'язку x_i, але завдяки знаходженню конкретного прикладу варіації визначників ця оцінка буде точнішою за попередню.

Додаткові складності вносить наявність спільних коефіцієнтів визначників у чисельнику та знаменнику, а саме, $n-1$ стовпців у визначниках D та $D^{<i>}$, збігаються. Це призводить до суперечливих змін розв'язків x_i, що не дозволяє знайти максимально можливе відхилення розв'язків при зміні коефіцієнтів ε_{ij}, що задовольняють нерівності $|\varepsilon_{ij}| \leq \varepsilon_0$, де ε_0 – задана максимально можлива відносна похибка в визначенні елементів a_{ij}.

Поліпшений метод побудови таблиці знаків.

Розглянемо розв'язок x_k:

$$x_k = \frac{D^{<k>}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \pm \varepsilon_{11} a_{11} & \cdots & b_1 \pm \mu_1 b_1 & \cdots & a_{1n} \pm \varepsilon_{1n} a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm \varepsilon_{n1} a_{n1} & \cdots & b_n \pm \mu_n b_n & \cdots & a_{nn} \pm \varepsilon_{nn} a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} \pm \varepsilon_{11} a_{11} & \cdots & a_{1k} \pm \varepsilon_{1k} a_{1k} & \cdots & a_{1n} \pm \varepsilon_{1n} a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm \varepsilon_{n1} a_{n1} & \cdots & a_{nk} \pm \varepsilon_{nk} a_{nk} & \cdots & a_{nn} \pm \varepsilon_{nn} a_{nn} \end{vmatrix}},$$

де $k = 1, 2, \ldots, n$;

$\mu_1, \ldots, \mu_n$ – можливі відносні похибки в визначенні елементів $b_1, \ldots, b_n$.

Запишемо формулу для функції x_k, що залежить від ε_{ij}:

$$x_k(\varepsilon_{ij}) = \frac{D^{<k>}(\varepsilon_{ij})}{D(\varepsilon_{ij})} = \frac{\varepsilon_{ij} a_{ij} A^{<k>} + D^{<k>}}{\varepsilon_{ij} a_{ij} A_{ij} + D}, \quad (7)$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, та знайдемо часткову похідну розв'язку x_k за змінною ε_{ij}:

$$x_k(\varepsilon_{ij})' = \frac{a_{ij} A^{<k>}{}_{ij} D - a_{ij} A_{ij} D^{<k>}}{\left(\varepsilon_{ij} a_{ij} A_{ij} + D\right)^2}. \quad (8)$$

Головна лінійна частина приросту розв'язку x_k в точці $\varepsilon_{ij} = 0$ (його повній диференціал) без урахування стовпця $j = k$ буде дорівнювати:

$$\Delta_{\text{лін}}^{<k>} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} \frac{a_{ij} A^{<k>}{}_{ij}\, D - a_{ij} A_{ij}\, D^{<k>}}{D^2} \cdot \Delta\varepsilon_{ij}, \quad (9)$$

де $\Delta\varepsilon_{ij}$ – приріст змінної ε_{ij}. Вважаючи, як і раніше, що для всіх i та j, $j \neq k$ дотримується нерівність $|\varepsilon_{ij}| \leq \varepsilon_0$, отримаємо, що найбільше збільшення розв'язку в лінійному наближенні буде при $|\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_0$, і воно дорівнює

$$\Delta_{\text{лін макс}}^{<k>} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\left| a_{ij} A^{<k>}{}_{ij}\, D - a_{ij} A_{ij}\, D^{<k>} \right|}{D^2} \varepsilon_0. \quad (10)$$

Кожен елемент (окрім випадку $j = k$) повної «таблиці знаків» співпадає зі знаком виразу $a_{ij} A^{<k>}{}_{ij} D - a_{ij} A_{ij} D^{<k>}$.

За умови $j = k$ визначники $D^{<k>}$ та D не мають спільних коефіцієнтів, тому максимізація (мінімізація) розв'язку x_k за коефіцієнтами μ_k та ε_{ik} може проводитися незалежно для визначників $D^{<k>}$ та D, але слід враховувати знаки визначників.

Запишемо формулу для функції x_k, що залежить від змінних μ_k та ε_{ik}:

$$x_k(\mu_k,\varepsilon_{ik}) = \frac{\mu_k b_i A^{<k>}{}_{ik} + D^{<k>}}{\varepsilon_{ik} a_{ik} A_{ik} + D}. \quad (11)$$

Знайдемо часткову похідну розв'язку x_k за змінною μ_k при $\varepsilon_{ik} = 0$, вона буде дорівнювати:

$$\frac{\partial x_k(\mu_k,\varepsilon_{ik})}{\partial \mu_k} = \frac{b_i A^{<k>}{}_{ik}}{D}. \quad (12)$$

Головна лінійна частина приросту розв'язку x_k в точці $\varepsilon_{ik} = 0$, $\mu_k = 0$ (його повний диференціал) з урахування лише стовпця $j = k$ буде дорівнювати:

$$\Delta^{<k>}_{\text{лін}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i A^{<k>}{}_{ik}}{D} \Delta\mu_k - \frac{a_{ik} A_{ik}\, D^{<k>}}{D^2} \Delta\varepsilon_{ik} \right), \quad (13)$$

де $\Delta\mu_k$ – приріст змінної μ_k;
$\Delta\varepsilon_{ik}$– приріст змінної ε_{ik}.

Вважаючи, як і раніше, що для всіх i та j $(j = k)$ дотримується нерівність $|\varepsilon_{ij}| \le \varepsilon_0$, отримаємо, що найбільше збільшення розв'язку в лінійному наближенні буде при $|\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_0$, і воно дорівнює

$$\Delta^{<k>}_{\text{лін макс}} = \sum_{i=1}^{n} \left(D + \frac{|a_{ik} A_{ik}\, D^{<k>}|}{D^2} \right) \cdot \varepsilon_0. \quad (14)$$

Звідси отримаємо, що кожен елемент ε_{ij} у випадку $j = k$ повної таблиці знаків («+» або «–») має протилежний знак від знаку добутку $a_{ik} A_{ik}\, D^{<k>}$, та кожен елемент $\Delta\mu_k$ має знак, співпадаючий зі знаком виразу $\frac{b_i A^{<k>}{}_{ik}}{D}$, та знаки дорівнюють нулю, якщо відповідні вирази дорівнюють нулю.

Програмне забезпечення дослідження стійкості розв'язків СЛАР. Для можливості порівняння результатів було створено програмне забезпечення, що дозволяє користувачеві досліджувати стійкість СЛАР, що представлені в матричному вигляді (1), інтерфейс якого зображено на рис. 1.

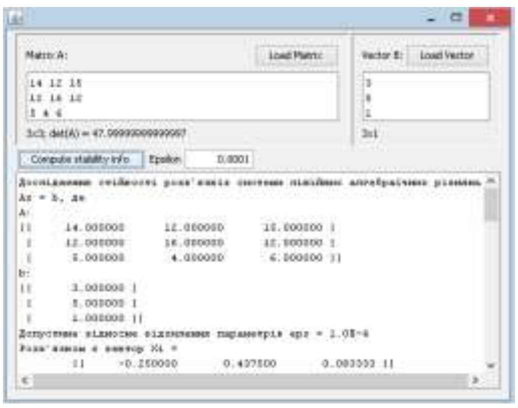

Рис. 1. Вікно програми

Користувач може ввести матрицю системи A та вектор правих частин $\boldsymbol{b}$. При цьому введення можливо як з клавіатури, так и шляхом їх завантаження за допомогою кнопок «Load Matrix» та «Load Vector». В нижній частині вікна передбачено виведення звіту з результатами дослідженням стійкості.

Звіт з дослідженням стійкості містить:

- розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- можливі варіації розв'язків СЛАР;
- можливі варіації значень визначників, які використовуються у розрахунках;
- детальну інформацію щодо умов, при яких розв'язки або визначники змінюють знак.

Чисельний експеримент з дослідженням поліпшеного методу побудови таблиці знаків. Для порівняння результатів дослідження стійкості систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом побудови таблиці знаків за визначниками та побудови таблиці знаків за похідними ділення двох визначників згідно формули Крамера були проаналізовані випадково створені системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Графік з порівнянням розподілу відносних відхилень розв'язків x_i, що залежать від відносних відхилень параметрів ε за двома методами наведений на рис. 2, та графік розподілу уточнень оцінок за похідними ділення двох визначників згідно формули Крамера для кожного розв'язку x_i для СЛАР розмірності $n = 5$ наведений на рис. 3.

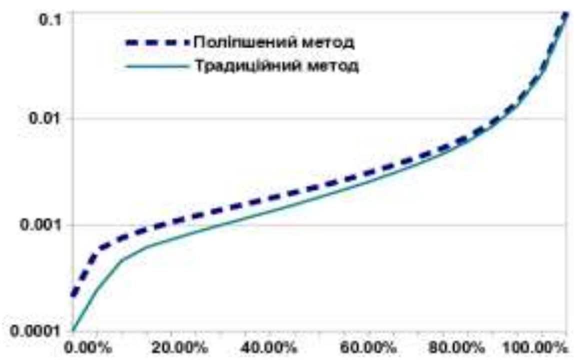

Рис. 2. Розподіл відносних відхилень розв'язків x_i

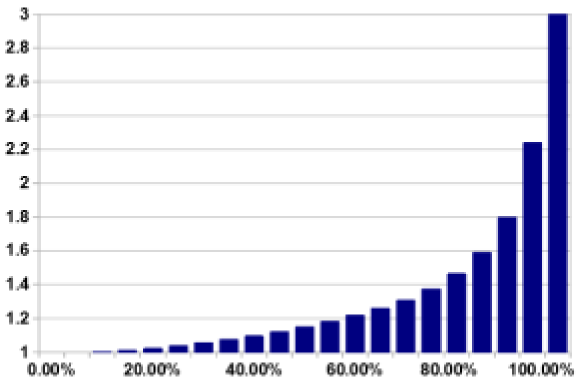

Рис. 3. Розподіл уточнень оцінок

Стосовно уточнень оцінок кожного окремого розв'язку можемо бачити, що уточнення для 50 % розв'язків не перевищують 1.15 разів, уточнення для

30 % розв'язків знаходяться у діапазоні між 1.15 та 1.46, уточнення для 15 % розв'язків знаходяться у діапазоні між 1.46 та 2.24, та уточнення для 5 % розв'язків перевищують 2.24 разів. Максимальне уточнення дорівнює 127.43, що може бути критичним у деяких випадках.

Висновки. В роботі був проведений огляд існуючих методів дослідження стійкості розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що залежать від вхідних даних, тобто варіацій параметрів СЛАР. Були реалізовані методи оцінки стійкості систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою чисел обумовленості, модульних визначників та побудови таблиці знаків для знаходження точних оцінок варіацій розв'язків, залежних від варіацій параметрів СЛАР.

За допомогою розробленого програмного забезпечення був проведених порівняльний аналіз стійкості розв'язків систем лінійних рівнянь за чотирма розглянутими методами. Показано, що дослідження стійкості за числами обумовленості дають дуже грубу оцінку можливих похибок розв'язків.

В ході дослідження також отримано, що запропонований поліпшений метод побудови таблиці знаків у 30 % випадків знаходить варіації, що в 1.3 рази більші ніж варіації, що знаходить класичний метод, та у 5 % випадків ці варіації перевищують попередні у 2 або більше разів. Результати роботи також доповідались на конференції [14].

Список літератури

1. Кутнів М. В. *Чисельні методи*. Львів: НУ «Львівська політехніка», 2008. 200 с.
2. Шахно С. М. *Чисельні методи лінійної алгебри*. Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2007. 245 с.
3. Красс М. С, Чупрынов Б. П. *Математика для экономистов*. Санкт-Петербург: Питер, 2005. 464 с.
4. *Высшая математика для экономистов* / ред. проф. Н. Ш. Кремера. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. 471 с.
5. Красс М. С. *Математика для экономических специальностей*. Москва: ИНФРА-М, 1998. 464 с.
6. Ильина В. А., Силаев П. К. *Численные методы для физиков-теоретиков.* Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 132 с.
7. Кудрявцев Л. Д. О некоторых математических вопросах теории электрических цепей // *Успехи математических наук.* 1948. Т.3, № 4(26). С. 80–118.
8. Коваленко А. А. *Основы линейной алгебры*. Барнаул: Изд-во АлтГПА, 2010. 118 с.
9. Гун Г. Я. *Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением*. Москва: Металлургия, 1983. 352 с.
10. Петров Ю. П. *Как получать надежные решения систем уравнений*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2012. 176 с.
11. Петров Ю. П. *Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2008. 160 с.
12. Уоткинс Д. С. *Основы матричных вычислений*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 664 с.
13. Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения*. Москва: Мир, 2001. 430 с.
14. Руденко Р. О. Розробка програмного забезпечення для дослідження стійкості чисельних методів лінійної алгебри. *Труди 23-го міжнародного молодіжного форуму «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті». Т 9.* Харків: ХНУРЕ, 2019. С. 130–131.

References (transliterated)

1. Kutniv M. V. *Chysel'ni metody* [Numerical methods]. Lviv, Lviv Polytechnic National University Publ., 2008. 200 p.
2. Shakhno S. M. *Chysel'ni metody liniynoyi alhebry* [Numerical methods of linear algebra]. Lviv, VTS LNU im. I. Franko Publ., 2007. 245 p.
3. Krass M. S, Chuprynov B. P. *Matematika dlya ekonomistov* [Mathematics for Economists]. St. Petersburg, Piter Publ., 2005. 464 p.
4. *Vysshaya matematika dlya ekonomistov* [Higher Mathematics for Economists] N. Sh. Kremer ed. Moscow, UNITY-DANA Publ., 2007. 471 p.
5. Krass M. S. *Matematika dlya ekonomicheskikh spetsial'nostey* [Mathematics for economic specialties]. Moscow, INFRA-M Publ., 1998. 464 p.
6. Il'ina V. A., Silayev P. K. *Chislennyye metody dlya fizikov-teoretikov*. [Numerical methods for theoretical physicists]. Moscow-Izhevsk, Institute of Computer Science Publ., 2003. 132 p.
7. Kudryavtsev L. D. *O nekotorykh matematicheskikh voprosakh teorii elektricheskikh tsepey* [On Some Mathematical Questions in the Theory of Electrical Circuits]. Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 1948, vol. 3, no. 4 (26), pp. 80–118.
8. Kovalenko A. A. *Osnovy lineynoy algebry* [Basics of linear algebra]. Barnaul, AltGPA Publ., 2010. 118 p.
9. Gun G. Ya. *Matematicheskoye modelirovaniye protsessov obrabotki metallov davleniyem* [Mathematical modeling of metal forming processes]. Moscow, Metallurgy Publ., 1983. 352 p.
10. Petrov Yu. P. *Kak poluchat' nadezhnyye resheniya sistem uravneniy* [How to obtain reliable solutions of systems of equations]. St. Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2012. 176 p.
11. Petrov Yu. P. *Obespecheniye dostovernosti i nadezhnosti komp'yuternykh raschetov* [Ensuring the reliability and reliability of computer calculations]. St. Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2008. 160 p.
12. Watkins David S. *Fundamentals of Matrix Computations*. 2nd Edition. New York, John Wiley & Sons, Inc., 2002 (Russ. ed.: Watkins D. S. *Osnovy matrichnykh vychisleniy*. Moscow, BINOM; Laboratory of Knowledge Publ., 2006. 664 p.
13. Demmel James W. *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997 (Russ. ed.: Demmel' Dzh. *Vychislitel'naya lineynaya algebra*. *Teoriya i prilozheniya*. Moscow, Mir Publ., 2001. 430 p.
14. Rudenko R. O. Rozrobka prohramnoho zabezpechennya dlya doslidzhennya stiykosti chysel'nykh metodiv liniynoyi alhebry [Software development for studying the stability of numerical methods of linear algebra]. *Trudy 23-ho mizhnarodnoho molodizhnoho forumu «Radioelektronika ta molod' u KHKHI stolitti». T 9.* [Proc. of the 23rd International Youth Forum "Radio Electronics and Youth in the 21st Century". Vol. 9]. Kharkiv, KNURE Publ., 2019, p. 130–131.

Надійшла (received) 13.05.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Марченко Наталя Андріївна (***Марченко Наталья Андреевна***, ***Marchenko Natalya Andriivna***) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри «Системний аналіз та інформаційно-аналітичні технології»; м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9889-3713; e-mail: mna123@ukr.ua

Руденко Роман Олександрович (***Руденко Роман Александрович***, ***Rudenko Roman Oleksandrovych***) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», магістрант; м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9424-6639; e-mail: roman.rudenko.a@gmail.com