МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП’ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING

УДК 518.5 **DOI: 10.20998/2079-0023.2019.02.06**

О. В. ТОНІЦА

МЕТОДИ СТОХАСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ

Пропонуються конструктивні методи та алгоритми стохастичного моделювання фізико-механічних полів на основі теорії R-функцій та нечіткої логіки, які дозволяють враховувати технічні та технологічні допуски на геометричну та фізичну інформацію, погрішності вимірів, помилки заокруглення, та на основі аналізу їх комплексного впливу на розв’язок робити експертний висновок. При розв'язанні крайових задач математичної фізики та створенні систем дослідження полів різної фізичної природи важливо враховувати технічні та технологічні допуски на геометричну та фізичну інформацію, погрішності виміру фізичних величин та похибки округлення. У зв’язку з цим виникає необхідність розвитку систем розрахунку полів з метою отримання допусків на розв’язок та подальшого експертного висновку.
Обчислювання в існуючих системах розрахунку полів, як правило, мають детермінований характер, а тим часом реальні процеси у певній мірі є стохастичними, містять в собі деяку нечіткість. Для того, щоб врахувати цю нечіткість, доцільно так перетворити існуючу схему дослідження фізичних полів, щоб в результаті багатоваріантного обчислення отримати більш точний «нечіткий» розв’язок, який буде ближче до реальності. Потрібно ввести в схему рішення урахування допусків, тобто джерел нечіткості, що найбільш сильно впливають на результуючий розв’язок. Практика свідчить, що таких джерел, як правило, три: допуски моделі, помилки методу та помилки округлення. Необхідно встановити вплив на розв’язок варіювання цих величин в межах допусків та дослідити можливості побудови допусків на цей розв’язок.
Досліджено зв'язок теорії R-функцій та нечіткої логіки. Доведено, що при необхідному узагальненні законів протиріччя та виключення третього множина функцій нечіткої логіки співпадає з множиною умовних R-функцій. Показано, що функції алгебри логіки є супровідними для умовних R-функцій та множина умовних R-функцій є функціонально замкненою.
На основі результатів досліджень в теорії R-функцій та нечіткій логіці розроблені методи та алгоритми моделювання нечітких областей складної форми. Розроблені нечіткі моделі поля та структури нечітких розв'язків, запропонована методика їх реалізації.
Ключові слова: фізико-механічне поле, крайова задача, теорія R-функцій, нечітка логіка, нечіткість, допуск, розв’язок.

О. В. ТОНИЦА

МЕТОДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Предлагаются конструктивные методы и алгоритмы стохастического моделирования физико-механических полей на основе теории R-функций и нечеткой логики, позволяющие учитывать технические и технологические допуски на геометрическую и физическую информацию, погрешности измерений, ошибки округления и на основе анализа их комплексного воздействия на решение делать экспертное заключение. При решении краевых задач математической физики и создании систем исследования полей различной физической природы важно учитывать технические и технологические допуски на геометрическую и физическую информацию, погрешности измерения физических величин и погрешности округления. В связи с этим возникает необходимость развития систем расчета полей с целью получения допусков на решение и дальнейшего экспертного заключения.
Вычисления в существующих системах расчета полей, как правило, имеют детерминированный характер, а между тем реальные процессы в определенной степени является стохастическими, содержат в себе некоторую нечеткость. Для того, чтобы учесть эту нечеткость, целесообразно так преобразовать существующую схему исследования физических полей, чтобы в результате многовариантного расчета получить более точное «нечеткое» решение, которое будет ближе к реальности. Нужно ввести в схему решения учета допусков, то есть источников нечеткости, что наиболее сильно влияют на результирующий решение. Практика показывает, что таких источников, как правило, три: допуски модели, ошибки метода и ошибки округления. Необходимо установить влияние на решение варьирования этих величин в пределах допусков и исследовать возможности построения допусков на это решение.
Исследована связь теории R-функций и нечеткой логики. Доказано, что при необходимом обобщении законов противоречия и исключенного третьего множество функций нечеткой логики совпадает с множеством условных R-функций. Показано, что функции алгебры логики является сопроводительным для условных R-функций и множество условных R-функций является функционально замкнутым.
На основе результатов исследований в теории R-функций и нечеткой логике разработаны методы и алгоритмы моделирования нечетких областей сложной формы. Разработанные нечеткие модели поля и структуры нечетких решений, предложена методика их реализации.
Ключевые слова: физико-механическое поле, краевая задача, теория R-функций, нечеткая логика, нечеткость, допуск, решение.

O. V. TONITSA

METHODS OF STOCHASTIC MODELING OF PHYSICAL-MECHANICAL FIELDS

Constructive methods and algorithms of stochastic modeling of physical-mechanical fields are proposed based on the theory of R-functions and fuzzy logic, which allow to take into account technical and technological tolerances for geometric and physical information, measurement errors, rounding errors, and based on the analysis of their complex influence on the development to draw an expert opinion. When solving boundary-value problems of mathematical physics and creating systems for the study of fields of different physical nature, it is important to take into account technical and

technological tolerances for geometric and physical information, errors of measurement of physical quantities and errors of rounding. In this regard, there is a need to develop field calculation systems in order to obtain permission for the solution and for further expert judgment.
Calculations in existing field calculation systems tend to be deterministic, but in the meantime, real processes are to some extent stochastic, with some imprecision. In order to take this fuzzy into account, it is advisable to transform the existing scheme of physical field research so that, as a result of multivariate computation, a more accurate "fuzzy" solution will be obtained that is closer to reality. It is necessary to enter into the scheme the decision of tolerance, that is, sources of fuzziness, which have the greatest influence on the resultant decision. Practice shows that there are usually three such sources: model tolerances, method errors, and rounding errors. It is necessary to establish the effect of the solution of variation of these values within the tolerances and to explore the possibility of constructing tolerances for this solution. In this regard, it is of great interest to develop systems for the study of physical and mechanical fields that are oriented towards multivariate solution of boundary value problems to account for the variation of the values under consideration within the specified tolerances.
The relation between the theory of R-functions and fuzzy logic is investigated. It is proved that with the necessary generalization of the laws of contradiction and the exclusion of the third set of functions of fuzzy logic coincides with the set of conditional R-functions. It is shown that functions of logic algebra are concomitant for conditional R-functions and the set of conditional R-functions is functionally closed.
Based on the results of research in the theory of R-functions and fuzzy logic, methods and algorithms for modeling fuzzy domains of complex form have been developed. Fuzzy field models and structures of fuzzy solutions are developed, the method of their realization is offered.
Keywords: physico-mechanical field, boundary value problem, R-functions theory, fuzzy logic, fuzzyness, solution.

Вступ. Існують виробничі задачі, при розв’язанні яких необхідно враховувати і спільно переробляти складну геометричну, логічну та аналітичну інформацію. До таких задач відносяться проблеми математичної фізики, пов'язані з інженерними розрахунками фізико-механічних полів, що визначають основні якісні характеристики виробів. Зростаючий інтерес до розрахунків фізичних полів пояснюється тим, що вони необхідні в теплофізиці, теорії пружності і пластичності, магнітній гідродинаміці та інших галузях науки, досягнення яких мають першорядне значення для науково-технічного прогресу [1, 2]. Дана робота присвячена розвитку інтелектуальних систем дослідження фізичних полів серії «Поле» для врахування технологічних допусків і методичних похибок.

Математичні моделі фізико-механічних полів можуть бути представлені як крайові задачі для рівнянь з частинними похідними при певних крайових умовах. Специфічна особливість поля як об'єкта моделювання – його залежність не тільки від характеру фізичних законів, що враховуються відповідними рівняннями, але і від форми, взаємного розташування тіл, у яких виникають поля, від конфігурації майданчиків їх взаємодії та інших геометричних і фізичних факторів. При дослідженні і вирішенні цих проблем вельми важливо створити ефективні обчислювальні методи, які дозволили б вирішити поставлені завдання і врахувати при цьому геометричну, логічну і аналітичну інформацію. Таку інформацію необхідно приводити до єдиного аналітичного виду, що дозволяє включати її в обчислювальний алгоритм. Особливо актуальною є розробка методів вирішення завдань, які мали б універсальний характер і не вимагали від дослідника глибокого знання теорії. Універсальність дозволяє використовувати методи системного програмування для автоматизації наукових досліджень у математичній фізиці.

До широко відомих універсальних методів відносяться варіаційні та проекційні методи, які прийнято називати прямими [1]. Їх характерна особливість – зведення крайових задач до систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Наближений розв’язок задачі отримується у вигляді лінійних комбінацій так званих координатних функцій, які задовольняють, якщо це необхідно, крайовим умовам даної задачі, а також вимогам повноти і умов апроксимаційної універсальності. Побудова координатних функцій, що задовольняють перерахованим умовам для областей практично довільної форми, довгий час залишалася проблематичною. Розглянути це питання з загальних позицій вдалося після створення конструктивного математичного апарату теорії R-функцій [1, 2], який дозволив отримати рішення відповідної математичної задачі у вигляді формули, яку називають структурою рішення і яка містить явну залежність від геометричних і фізичних параметрів. Теоретичні результати, що були отримані, використовувалися при створенні сучасної технології програмування в математичній фізиці, реалізації проблемно-орієнтованих мов і спеціалізованих систем серії "Поле". Користувачі останніх вказують формулювання завдання, вихідні дані, необхідну форму видачі результатів на мові високого рівня, який максимально наближений до загальноприйнятної мови опису постановки задачі і алгоритму її розв’язання. За завданням користувача система "Поле" створює обчислювальну схему, а потім автоматично синтезує робочу програму розв’язання задачі. Досвід застосування проблемно-орієнтованих мов і спеціалізованих систем серії «Поле» показує, що вони істотно спрощують і прискорюють найбільш трудомісткі етапи обчислювальних експериментів: програмування і налагодження модулів, розв’язання задач і аналіз результатів.

При конструюванні на аналітичному рівні розв’язків крайових задач для складних областей зі складним характером умов застосовується метод R-функцій в поєднанні з варіаційними і проекційними методами. Завдяки тому, що метод R-функцій дозволяє автоматизувати процес перетворення геометричної інформації в аналітичну, результат розв’язання крайової задачі можна розглядати як деяке співвідношення, яке включає всю інформацію про крайову задачу. Однак застосування операцій диференціювання робить такі співвідношення досить громіздкими, важко доступними для огляду і незручними в зверненні. Їх використання при вирішенні крайової задачі неможливе без спеціального апарату формалізації, що дозволяє звести алгоритм розв’язання до послідовності простих операцій. Складні математичні об'єкти об'єднуються засобами алгебри диференціальних кортежів [2], а потім застосовуються звичайні алгебраїчні методи перетворення цих співвідношень.

При розв'язанні крайових задач математичної фізики використовується традиційна схема реалізації прямих методів, яка зводиться до послідовного виконання наступних етапів: облік геометричної інформації; формування розв'язуючих систем лінійних алгебраїчних рівнянь; рішення систем рівнянь або проблеми власних чисел і векторів; обробка результатів обчислень.

Системи серії «Поле» є складними комплексами програм, призначеними для програмування і розв'язання крайових задач, сформульованих для рівнянь з частинними похідними при довільних крайових умовах та складній геометрії області. Організаційно дані системи складаються з двох частин – функціонального і системного наповнення. Інструментальна система «Поле» може бути використана для дослідження і розв'язання крайових задач математичної фізики. Проблемною орієнтацією служить розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами без обмежень на характер крайових і початкових умов, форму області та ділянок границі. Вхідні мови системи «Поле» дозволяють вводити всю необхідну інформацію про крайові задачі математичної фізики.

В наш час автоматизація програмування в галузі математичної фізики досягла значного прогресу. Ефект від використання проблемно-орієнтованих мов і спеціалізованих систем полягає в скороченні часу вирішення багатьох науково-технічних завдань, а також у створенні бази для переходу до індустріальних методів і нової технології програмування. Такі мови і системи є інструментальною базою для проведення обчислювальних експериментів, що звільняє математиків і інженерів від рутинної і не відповідної до їх спеціальності роботи по складанню й налагодженню громіздких програм. Для проведення обчислювальних експериментів в галузі математичної фізики в багатьох випадках необхідне глибоке вивчення модельованого процесу або явища, пізнання законів природи, процесів і їх проявів у складній взаємодії. Крім того, при розв'язанні задач математичної фізики доводиться враховувати питання збіжності, стійкості обчислювального процесу, точності обчислень, ефективності застосовуваних методів і т. ін. Ці обставини створюють додаткові труднощі при розробці математичного забезпечення для розв'язання задач математичної фізики. За допомогою системи «Поле» вирішено багато науково-технічних та інженерних задач. Наприклад, проведені розрахунок і оптимізація різних конструкцій, для яких визначаються основні якісні характеристики (міцність, добротність, довговічність, надійність і т. ін.). При розв'язанні таких складних завдань виникає необхідність в проведенні все більш тонких розрахунків температурних, деформаційних, силових та інших фізико-механічних полів з урахуванням різних факторів фізичного і геометричного характеру [6–10].

Для розв'язання приведених завдань використовуються методи і конструктивні засоби теорії R-функцій, що дозволяють з єдиних позицій вирішувати питання обліку і спільної переробки складної геометричної, логічної та аналітичної інформації, а також системи серії «Поле», характерною особливістю яких є можливість явного завдання на проблемно-орієнтованій мові необхідних фізичних і геометричних параметрів. Це дозволяє проводити різноманітні обчислювальні експерименти, переходити від рішення однієї задачі до іншої, змінюючи при цьому форму розглянутих об'єктів і різні фізичні та математичні параметри. Аналізуючи методи теорії R-функцій і її програмне забезпечення, слід зазначити, що вони представляють собою досить ефективну сукупність засобів для проведення обчислювальних експериментів з розрахунку різних фізико-механічних полів в об'єктах складної форми. Різні тестові приклади, порівняння результатів з точними рішеннями, узгодження рішень реальних завдань з даними фізичних експериментів підтверджують достовірність результатів і свідчать про доцільність застосування описаних програмних і мовних засобів для інженерних розрахунків. Основний напрямок розвитку теорії R-функцій пов'язаний зі створенням нових, більш простих і ефективних конструктивних засобів і з розширенням предметної області системи «Поле» [11, 12].

Математична постановка задачі. Розглянемо підходи до вдосконалення систем аналізу фізичних полів. При побудові систем дослідження задач розрахунку полів важливим є облік стохастичного характеру похибок вимірювань, допусків на геометричну та фізичну інформацію і помилок округлення. У зв'язку з цим виникає необхідність у розвитку існуючих систем розрахунку полів для різноманітних завдань з метою отримати допуски на рішення і подальший експертний висновок. Обчислення в системах розрахунку полів, як правило, носять детермінований характер, в той час як реальні процеси в певній мірі є стохастичними, містять в собі деяку нечіткість. Для обліку останньої потрібно так перетворити існуючу схему дослідження фізичних полів, щоб в результаті багатоваріантного розрахунку отримати більш точне «нечітке» рішення, яке буде ближче до реальності. Доцільно ввести в схему розв'язання облік допусків, тобто джерел нечіткості, що найбільш сильно впливають на результуюче рішення. Практика показує, що таких джерел, як правило, три: допуски моделі (на геометричні та фізичні характеристики), помилки методу («усічення» ряду, помилки інтегрування, рішення систем лінійних рівнянь) і похибки округлення [3]. Необхідно встановити комплексний вплив варіювання величин в межах допусків і досліджувати можливості побудови допусків на розв'язок. У зв'язку з цим великий інтерес представляє розробка систем дослідження полів, орієнтованих на різноманітне розв'язання крайових задач з метою врахування варіювання певних величин в межах заданих допусків.

Для розробки нечітких структурних формул рішення нечітких крайових задач необхідно визначити відповідні ізоморфізми в теоріях R-функцій та нечіткої логіки. Необхідно досліджувати в побудованих функціональних множинах питання функціональної замкнутості, повноти (побудови повних систем функцій), аналітичних уявлень функцій і їх тотожних перетворень.

В результаті досліджень, що були проведені, встановлено зв'язок нечіткої логіки і теорії R-функцій [4]. У нечіткій логіці виконуються всі закони алгебри двозначної логіки, крім закону виключення третього $(x \vee \bar{x} \equiv 1)$ і закону суперечності $(x \wedge \bar{x} \equiv 0)$. Дослідження показали, що ці закони можна доповнити.

Доповнимо систему тотожностей нечіткої логіки узагальненими законами виключення третього та суперечності:

$$x \vee \bar{x} = \frac{1}{2} + \left|x - \frac{1}{2}\right|;$$

$$x \wedge \bar{x} = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|,$$

де $\frac{1}{2}$ – центр множини [0, 1].

Тоді будуть мати місце наступні твердження:

Твердження 1. Функції нечіткої логіки є умовними R-функціями на відрізку [0, 1], відповідно до розбиття: $\left[0;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2};1\right]$ та $\left[0;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};1\right]$ у тризначному та двозначному випадках.

Наведені функції є умовними R-функціями, оскільки мають властивості R-функцій тільки на деякому відрізку числової осі, зокрема, на відрізку [0, 1].

Твердження 2. Функції алгебри логіки є супроводжуючими для умовних R[0, 1]-функцій, тобто для функцій нечіткої логіки.

Доведено наступні теореми.

Теорема 1. Множина {R[0,1]} умовних R-функцій є функціонально замкненою.

Теорема 2. Система R-функцій

$$x_1 \wedge_1 x_2 \equiv \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|)$$

$$x_1 \vee_1 x_2 \equiv \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|)$$

$$\bar{x} = 1 - x$$

є достатньо повною на множині {R[0,1]} умовних R-функцій.

Для ілюстрації нечіткості реальної задачі моделювання розглянемо задачу Діріхле для диференціального рівняння загального вигляду. Нехай задані область D і крайові умови з урахуванням допусків:

$$\mathrm{Au} = \mathrm{f};$$

$$U|_{\Gamma_i} = \varphi_i^* \Leftrightarrow \varphi \pm \Delta_\varphi;$$

$$D \Leftrightarrow D \pm \Delta_D$$

Змінюючи допуски на геометрію і крайові умови в заданих межах, отримуємо допуски на U, яким має задовольняти розв’язок реальної крайової задачі. Запропонована методика моделювання для завдання аналізу включає в себе наступні етапи: формування допусків на розв’язок; розв’язання реальної крайової задачі; формування експертного висновку про прийнятність знайденого розв’язку.

Математична модель і методи розв'язання задачі. Розглянемо модель фізичного поля, наприклад задачу Діріхле [1]. Чітку модель поля будемо позначати через m:

$$\mathrm{Au} = \mathrm{f};$$

$$U|_{\Gamma_i} = \varphi_i;$$

$$D$$

Її рішення структурним методом будується у вигляді

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} C_i \omega P_i + \Psi,$$

де ω – аналітичний опис області D;

Ψ – функція, що продовжує крайові умови всередину області;

C_i – невизначені коефіцієнти.

Відповідно до описаних вище джерел нечіткості побудуємо нечітку модель поля [4]:

$$\mathrm{Au} = \mathrm{f};$$

$$U|_{\Gamma_i} = \varphi_i \Leftrightarrow \left(\varphi \pm \Delta_\varphi, \mu_{\varphi^*}(\varphi^m)\right);$$

$$D \Leftrightarrow D \pm \Delta_D, \mu_{D^*}(D^*),$$

яку будемо позначати через M. Для виборки $\{m\} \subset M$ необхідно отримати нечіткий розв’язок.

$$U_n^* = \sum_{i=1}^{n} C_i \omega^m P_i + \Psi_i(\varphi_i), \mu_{U_n^*}(U_n^m).$$

Через M_1 позначимо модель, що враховує варіювання фізичних величин в межах заданих допусків, а через M_2 – модель, що враховує варіювання геометричних характеристик.

Модель M_1 буде мати вигляд

$$\mathrm{Au} = \mathrm{f};$$

$$U|_{\Gamma_i} = \varphi_i \Leftrightarrow \left(\varphi \pm \Delta_\varphi, \mu_{\varphi^*}(\varphi^m), M(x), D(x), f(x)\right);$$

$$D.$$

Модель M_2 буде виглядати наступним чином:

$$\mathrm{Au} = \mathrm{f};$$

$$U|_{\Gamma_i} = \varphi;$$

$$D \Leftrightarrow \left(D \pm \Delta_D, \mu_{D^*}(D), M(x), D(x), f(x)\right),$$

де $M(x)$ – математичне очікування,

$D(x)$ – дисперсія,

$f(x)$ – закон розподілу величини в межах допусків.

Помилка в величині параметрів має випадкову природу і обумовлена великою кількістю випадкових факторів. Внаслідок цього можна вважати, що досліджувані величини нормально розподілені [3, 4]. Для вирішення завдання потрібно побудувати стохастичну структуру, процес отримання заданого допуску в якій буде безперервним і стохастичним. Необхідно побудувати стохастичну дискретну апроксимацію, яка буде в границі наближатися до безперервної стохастичною.

Отримуємо нечіткий розв'язок

$$\tilde{U}_n^* = \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i \omega^m P_i + \tilde{\Psi}_i(\varphi_i), D(x), \mu_{U_n^*}(U_n^m),$$

де $D(x)$ – дисперсія випадкової величини.

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i,$$

де m_x – математичне очікування,
p_i – ймовірність події x_i.

При розв'язанні задачі, що представлена моделлю M_1, отримаємо ряд систем рівнянь, що відрізняються стовпцем вільних членів. Тому необхідно використовувати метод Гауса для розв'язання рівнянь з кількома правими частинами. При розв'язанні задачі, представленою моделлю M_2, отримаємо сукупність різних крайових задач. Для підвищення швидкодії процесу їх розв'язання доцільно використовувати розпаралелювання за завданнями [5].

Розглянемо питання формування вибірки та інтервального розв'язку. Як правило, розмитість описується нормальним законом розподілу, де Δ – деякий інтервал довіру. Генеруючи в межах інтервалу довіри випадкові послідовності, формуємо вибірку. Для моделі M_1 генеруємо випадкові послідовності на крайові умови, для M_2 – на геометрію. В результаті реалізації вибірки отримуємо розв'язок, що шукається. Інтервальний розв'язок в дискретному вигляді отримуємо наступним чином. Скануючи нечітку область D і табулюючі U_n в кожному вузлі деякої дискретної сітки, знаходимо математичне очікування, дисперсію і інтервал довіри. Нечіткість визначається математичним очікуванням і інтервалом довіри.

Опишемо формування вибірки для задачі синтезу і напрацювання допусків на геометрію. В цьому випадку характеристики розв'язку і їх допуски вже задані. Задаємо нижні границі значень функції належності і ймовірності довіри, а також послідовність допусків для геометрії, серед яких повинен міститися допуск, що шукається. Послідовно знаходячи розв'язок для кожного елемента вибірки, перевіряємо значення функції належності. Потім по значенням функції належності для вибірки і заданому значенню довірчої ймовірності оцінюємо прийнятність допуску. Останній інтервал, для якого умови прийнятності допуску будуть виконуватися, є довірчим інтервалом, що шукався.

Функцію належності поточної області по відношенню до еталонної знаходимо за допомогою обчислення поверхневого інтеграла по області, що досліджується. При розв'язанні задачі, представленої моделлю M_1, отримаємо сукупність систем рівнянь, що відрізняються стовпцем вільних членів. Тому необхідно використовувати метод Гаусса для вирішення рівнянь з кількома правими частинами. При розв'язанні задачі, представленою моделлю M_2, отримаємо декілька різних систем рівнянь. Для підвищення швидкодії процесу їх розв'язання доцільно використовувати розпаралелювання за завданнями.

Висновки. Запропоновані методи і алгоритми та програмне забезпечення, що розроблене, дозволяє враховувати допуски на фізичну і геометричну інформацію при моделюванні фізико-механічні полів.

Список літератури

1. Рвачев В. Л. *Теория R-функций и некоторые ее приложения*. Киев: Наук. думка, 1982. 550 с.
2. Рвачев В. Л., Шевченко А. Н. *Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов*. Киев: Техника, 1988. 199 с.
3. Шевченко А. Н., Тоница О. В. Моделирование физических полей с использованием теории R-функций и нечеткой логики. *Методы оптимизации технических и информационных систем: Сб. науч. тр*. Киев: НАН Украины. Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова. 1995. № 1. С. 64–67.
4. Шевченко А. Н., Тоница О. В. Моделирование геометрических объектов в системах анализа физических полей. *Проблемы бионики*. Харьков: ХНУРЭ. 1998. № 49. С. 130–134.
5. Тоница О. В. Разработка структур решения нечётких краевых задач. *Матеріали сьомої міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Простір і час сучасної науки». Частина 4*. Київ: Меганом, 2011. С. 28–30.
6. Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов, обладающих симметрией. *Кибернетика и системный анализ*. Киев: НАН Украины, Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова. 2008. Т. 44, № 6. С. 75–82.
7. Sheyko Tatyana I., Maksymenko-Sheiko Kyrylo V., Morozova Anna I. Screw-type symmetry in machine components and design at implementation on a 3D printer. *Journal of Mechanic Engineering*. 2019. Vol. 22, no. 1. P. 60–66.
8. Maksymenko-Sheiko K. V., Litvinova Yu. S., Sheyko T. I., T. I. Sheyko. Mathematical simulation of heat transfer during fluid flow for a fuel element with a polyzonal finned shell. *Journal of Mechanic Engineering*. 2017. Vol. 20, no. 4. P. 58–63.
9. Sheyko T. I., Maksymenko-Sheiko K. V., Litvinova Yu. S., Lisin D. A. R-functions and chevron surfaces in mechanical engineering. *Journal of Mechanic Engineering*. 2017. Vol. 20, no. 2. P. 54–60.
10. Litvinova Yu. S., Maksymenko-Sheiko K. V., Sheyko T. I. Analytical identification of three-dimensional geometric object according to the information about the shape of their sections. *Journal of Mechanic Engineering*. 2017. Vol. 20, no. 1. P. 45–51.
11. Maksimenko-Sheyko K. V., Sheyko T. I. Mathematical Modeling of the Thermal Modes of Electronic Boards With Sources Located According to the Scheme of Sierpinski Carpet. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013. Vol. 194, issue 3. P 330–339.
12. Maksymenko-Sheyko K. V., Sheyko T. I. Mathematical modeling of geometric fractals using *R*-functions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, issue 4. P 614–620

References (transliterated)

1. Rvachev V. L. *Teorija R-funkcij i nekotorye ee prilozhenija* [Theory of R-functions and some of its applications]. Kiev: Nauk. dumka Publ., 1982. 550 p.
2. Rvachev V. L., Shevchenko A. N. *Problemno orientirovannye jazyki i sistemy dlja inzhenernyh raschetov* [Problem-oriented languages and systems for engineering calculations]. Kiev: Tehnika Publ., 1988. 199 p.
3. Shevchenko A. N., Tonica O. V. Modelirovanie fizicheskih polej s ispol'zovaniem teorii R-funkcij i nechetkoj logiki [Modeling physical

fields using the theory of R functions and fuzzy logic.]. *Metody optimizacii tehnicheskih i informacionnyh sistem: Sb. nauch. tr.* Kiev, NAS of Ukraine. VM Glushkov Institute of Cybernetics Publ., 1995, no. 1, pp. 64–67.
4. Shevchenko A. N., Tonica O. V. Modelirovanie geometricheskih ob#ektov v sistemah analiza fizicheskih polej [Modeling geometric objects in physical field analysis systems]. *Problemy bioniki.* Kharkov: NURE Publ., 1998, no. 49, pp. 130–134.
5. Tonica O. V. Razrabotka struktur reshenija nechjotkih kraevyh zadach [Development of structures for solving fuzzy boundary value problems]. *Materialy s'omoyi mizhnarodnoyi naukovo praktychnoyi internet konferentsiyi «Prostir i chas suchasnoyi nauky». Chastyna 4 [Proceedings of the Seventh International Scientific and Practical Internet Conference "Space and Time of Modern Science". Part 4].* Kiev: Meganom Publ., 2011, pp. 28–30.
6. Maksimenko-Shejko K. V., Shejko T. I. R-funkcii v matematicheskom modelirovanii geometricheskih ob#ektov, obladajushhih simmetriej [R-functions in mathematical modeling of geometric objects with symmetry]. *Kibernetika i sistemnyj analiz.* Kiev: NAS of Ukraine. VM Glushkov Institute of Cybernetics Publ., 2008, vol. 44, no. 6, pp. 75–82.
7. Sheyko Tatyana I., Maksymenko-Sheiko Kyrylo V., Morozova Anna I. Screw-type symmetry in machine components and design at implementation on a 3D printer. *Journal of Mechanic Engineering*, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 60–66.
8. Maksymenko-Sheiko K. V., Litvinova Yu. S., Sheyko T. I., Sheyko T. I. Mathematical simulation of heat transfer during fluid flow for a fuel element with a polyzonal finned shell. *Journal of Mechanic Engineering*, 2017, vol. 20, no. 4, pp. 58–63.
9. Sheyko T. I., Maksymenko-Sheiko K. V., Litvinova Yu. S., Lisin D. A. R-functions and chevron surfaces in mechanical engineering. *Journal of Mechanic Engineering*, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 54–60.
10. Litvinova Yu. S., Maksymenko-Sheiko K. V., Sheyko T. I. Analytical identification of three-dimensional geometric object according to the information about the shape of their sections. *Journal of Mechanic Engineering*, 2017, vol. 20, no. 1, pp. 45–51.
11. Maksimenko-Sheyko K. V., Sheyko T. I. Mathematical Modeling of the Thermal Modes of Electronic Boards With Sources Located According to the Scheme of Sierpinski Carpet. *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 194, issue 3, pp 330–339.
12. Maksymenko-Sheyko K. V., Sheyko T. I. Mathematical modeling of geometric fractals using *R*-functions. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2012, vol. 48, issue 4, pp 614–620

Надійшла (received) 04.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Тоніца Олег Владимирович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних; м. Харків, Україна; e-mail: tonitsa.kmmm@gmail.com

Тоница Олег Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный технический университет «Харковский политехничний институт», доцент кафедры компьютерной математики и анализа данных; г. Харьков, Украина; e-mail: tonitsa.kmmm@gmail.com

Tonica Oleg Vladimirovych – Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institut", Associate Professor in Department of Computer Mathematics and data analysis; Kharkiv, Ukraine; e-mail: tonitsa.kmmm@gmail.com

УДК 519.2 **DOI: 10.20998/2079-0023.2019.02.07**

В. Л. ЛИСИЦКИЙ, В. С. МЕЖИРИЦКИЙ

МОДЕЛИ СБАЛАНСИРОВАННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ВХОДНЫХ, ВЫХОДНЫХ ПОТОКОВ ПРОДУКТОВ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТЕРРИТОРИИ

В работе рассматриваются вопросы повышения эффективности функционирования предприятий аграрной сферы за счет снижения их убытков путем создания интегрированного комплекса моделей сбалансированного планирования входных и выходных потоков продуктов растениеводства логистической системы территории, способной доставлять товар до требуемого места территории, в требуемый момент времени, в требуемом количестве и форме. Объектом сбалансированного планирования является аграрная холдинговая компания, производящая продукты растениеводства для снабжения ими потребителей заданной территории. Задача планирования состоит в определении такого сбалансированного плана обеспечения потребностей потребителей территории в комплектах продуктов растениеводства, при котором в условиях существующей логистической системы территории, действующих ограничений обеспечивается максимальная прибыль агрохолдинга. Построен комплекс моделей потребления, производства, транспортировки комплектов продуктов растениеводства, интегрированных в алгоритмическую модель сбалансированного планирования. Построенная алгоритмическая модель определяет совокупность процедур сбора, хранения, обработки, представления данных с использованием эффективных методов. Может служить теоретической основой для создания информационной технологии сбалансированного планирования входных, выходных потоков продуктов логистической системы территории.

Ключевые слова: модели сбалансированного планирования, входные, выходные потоки продуктов, логистическая система территории, потребители, производители продуктов растениеводства, интегрированный комплекс моделей, информационная технология планирования.