

УДК 539.3

**М. М. ТКАЧУК, А. В. ГРАБОВСЬКИЙ, Н. Б. СКРІПЧЕНКО****МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ УДАРНО-КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕМЕНТІВ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

Робота присвячена розробці, вдосконаленню та реалізації методів розв'язання зв'язаної задачі аналізу напружено-деформованого стану з урахуванням контактної взаємодії та геометричного синтезу складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично генерованими поверхнями та динаміки віброударних систем на основі їхнього параметричного опису та інтеграції розрахункових моделей різного рівня. Розроблено принципово нові підходи до розв'язання зв'язаних задач геометричного синтезу та аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл, а також параметричного синтезу та аналізу динаміки віброударних систем. Запропоновано метод визначення кінематично генерованих поверхонь та створення скінченноелементних моделей. Розроблено новий напіваналітичний варіант методу граничних елементів, що відрізняється точним, а не приблизним, обчисленням коефіцієнтів визначальних рівнянь.

**Ключові слова:** ударно-контактна взаємодія, напружено-деформований стан, складнопрофільні машинобудівні конструкції, віброударна система.

**Вступ.** Основним видом передачі потужності в елементах машинобудівних конструкцій є контактна взаємодія. Особлива складність для аналізу процесів, що відбуваються при такій взаємодії, реалізується для випадків контакту складнопрофільних тіл та при ударно-контактному контакті. Недостатні можливості теорії. З одного боку, та потреби промисловості, – з іншого, зумовили високу актуальність проблеми розробки принципово нових методів аналізу ударно-контактної взаємодії. Ця проблема була поставлена та розв'язана авторським колективом. А саме робота висунута на здобуття щорічної премії Президента України для молодих вчених.

У публікації викладаються основні моменти поданої роботи.

**Актуальність теми.** Для сучасного машинобудування характерне широке застосування машин, у яких передача необхідних складних видів руху і значних робочих зусиль здійснюється за допомогою контакту складнопрофільних деталей. При цьому форма робочих поверхонь цих деталей визначається, по-перше, умовами кінематичного спряження, а по-друге, вимогами забезпечення міцності з урахуванням реальних розподілів контактної тиску [1 – 12]. При проектуванні таких елементів машин виникають дві зв'язані задачі: I – аналізу напружено-деформованого стану (НДС) складнопрофільних тіл (СПТ) з урахуванням їхньої контактної взаємодії; II – геометричного синтезу їхніх кінематично генерованих поверхонь (КГП). Існуючі методики розв'язання задач I і II не забезпечують *варіативності* при описі форми тіл, мають недосконалі механізми *інтеграції* геометричних і розрахункових моделей і є недостатньо *збалансованими* за точністю та обчислювальними ресурсами на різних етапах досліджень. Суттєве значення дані чинники мають для *важких* вібраційних машин, зокрема, віброударних, тому що при цьому традиційні підходи до моделювання динамічних процесів і НДС не дають адекватних результатів. У цьому контексті особливе значення набувають питання визначення сил ударної взаємодії вібромашини з технологічним вантажем при його частковому руйнуванні, оскільки в багатьох віброударних системах такого типу (тобто з високою дисипативністю) не можна заздалегідь установити параметри основних їх елементів. Це створює у поєднанні з випадковим характером всіх цих процесів ситуацію невизначеності, яка не дає можливості обчислення тривалості ударної взаємодії і амплітуди діючих навантажень, а, значить, і виникаючих в елементах машини напружень.

У зв'язку з цим удосконалення методів аналізу контактної взаємодії і синтезу тіл є *актуальною* науковою і практичною проблемою, яку розв'язано в поданій роботі.

**Мета і завдання дослідження.** Мета роботи полягає у вдосконаленні та реалізації методів розв'язання зв'язаної задачі аналізу напружено-деформованого стану з урахуванням контактної взаємодії і геометричного синтезу складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично генерованими поверхнями, у розробці методів визначення сил ударної взаємодії у віброударних машинах на основі розрахунково-експериментальної ідентифікації шляхом параметричного опису та інтеграції розрахункових моделей різного рівня.

Для досягнення поставленої мети поставлені наступні завдання: обґрунтувати на основі аналізу існуючих методів шляхи дослідження НДС складнопрофільних тіл з кінематично генерованими поверхнями; розробити підхід та комплексні математичні моделі НДС з урахуванням контакту СПТ з кінематично генерованими поверхнями, числові алгоритми на основі запропонованих математичних моделей НДС складнопрофільних тіл; визначити перспективні підходи та створити моделі для дослідження взаємодії елементів у віброударних машинах з нелінійними неутримуючими зв'язками при частковому руйнуванні технологічного вантажу; провести аналіз впливу параметрів віброударної системи на характеристики вібраційних процесів, на зусилля і тривалість ударної взаємодії; провести аналіз НДС складнопрофільних тіл та встановити закономірності розподілу контактної тиску і контактних зон.

**Постановка задач досліджень.** У роботі міститься аналіз та узагальнення методів дослідження контактної взаємодії тіл з кінематично генерованими поверхнями. Проведено аналіз можливостей та обмежень класичної теорії методу Герца, методів скінченних елементів, варіаційних нерівностей, множників Лагранжа, граничних елементів та інших, що широко застосовуються для розв'язання задач контактної взаємодії тіл довільної форми. Оскільки основна складність полягає якраз в особливості способу опису поверхонь тіл, то для розв'язання задачі аналізу контактної взаємодії необхідно розробити методи, що враховують дану особливість. Відповідно визначені основні задачі досліджень.

Розвинені теоретичні основи аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з кінематично генерованими поверхнями. Для тіл з КГП доцільно об'єднати в рамках єдиного підходу аналіз НДС з урахуванням

контактної взаємодії та геометричний синтез. У роботі вибір методу геометричного синтезу зроблений на користь кінематичного методу Литвина [13]. Для розв'язання задач аналізу контактної взаємодії пропонується залучити декілька методів, об'єднавши їх єдиним методологічним підходом, що враховує специфіку створення геометричної моделі для досліджуваних тіл [14–22].

Особлива увага приділена питанню розробки скінченно-елементних моделей СПТ, методів автоматизованої генерації та параметризованого опису, що задовольняють бажаним характеристикам якості і обмеженням застосування, наведеним на рис. 1.

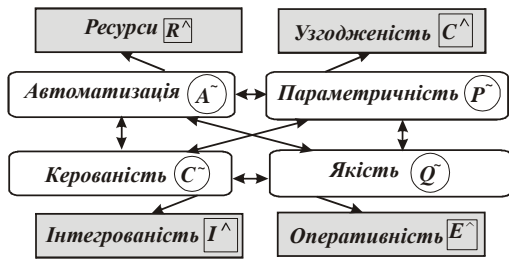


Рис. 1. Якісні характеристики СЕМ та відповідні проблемні обмеження

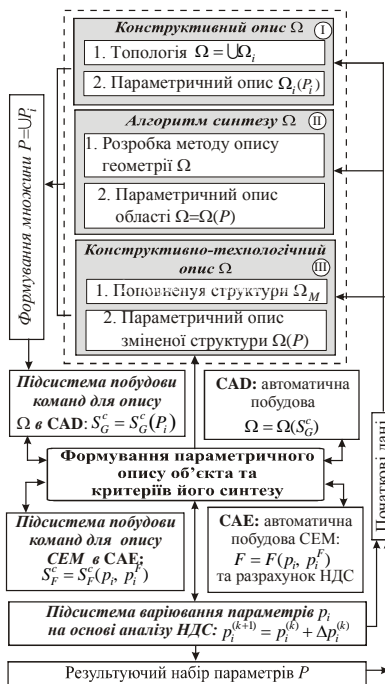


Рис. 2. Структура системи автоматизованого генерування моделей досліджуваних тіл

На рис. 2 наведена структурна схема проектних досліджень для тіл з різними способами опису геометричної та СЕМ. Якщо рівняння стану записати як  $L(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = 0$ , де  $\Omega$  – область, зайнята тілами  $\mathbf{u}$  – змінні стану;  $\mathbf{p}$  – параметри;  $\mathbf{r}, t$  – просторові і часова координати, то можна виділити два (I і III) основних традиційних конструктивних способи опису і третій аналітичний спосіб II:

$$L_1|_{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = 0; \quad (1)$$

$$L_2|_{\bar{\Omega}}(\Omega, \mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = 0, \quad (2)$$

шляхом розв'язання двох пов'язаних задач синтезу геометрії (2) та аналізу напруженого стану (1) у послдовності, вказаній

на рис. 3.

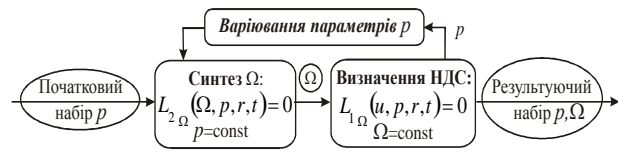


Рис. 3. Структура ітераційного розв'язання задачі синтезу та аналізу НДС складнопрофільних тіл

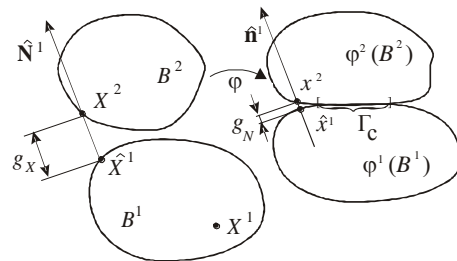


Рис. 4. Кінематика контакту гладких тіл

Контактна взаємодія тіл з КГП форми відноситься до випадку контакту тіл з гладкою границею. Для його дослідження залучається традиційне представлення механізму контакту  $g_N = (x^2 - \hat{x}^1) \cdot \hat{n}_1 \geq 0$  (рис. 4). Крайова задача:

$$\text{Div } \sigma = 0, \quad X \in B, \quad (3)$$

$$2\varepsilon(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}). \quad (5)$$

Тут  $\mathbf{u}, \sigma, \varepsilon, E$  – вектор переміщень, тензори напружень, деформацій та пружних констант матеріалів. Проте більш загальною є варіаційна постановка [16–19]. Для випадку двох тіл шуканим полем переміщень є  $\mathbf{u} \in K$ , де  $K = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \in H^1(B^1) \times H^1(B^2), \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_1^1, \mathbf{v}|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}_1^2, (\mathbf{v}^2 - \hat{\mathbf{v}}^1)|_{\Gamma_c} \cdot \hat{\mathbf{n}}^1 + g_x \geq 0\}$ , що для всіх  $\mathbf{v} \in K$  задовольняє нерівність

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq f(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (6)$$

де  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_B \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) dX$  є білінійною, а  $f(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS$  – лінійною формою.

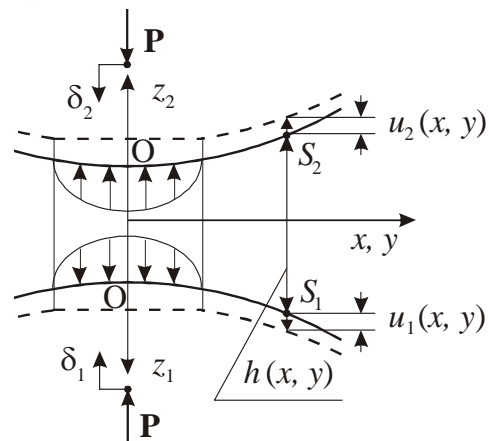


Рис. 5. Деформація тіл у контакті

Альтернативним відносно МСЕ та теорії Герца є метод граничних елементів [23]. В рамках моделі пружного напівпростору умови контакту мають вигляд (рис.5):

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, \\ S_1 \text{ і } S_2 - \text{в контакті;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, \\ S_1 \text{ і } S_2 - \text{поза контактом.} \end{cases} \quad (7)$$

Для цієї моделі справедливе інтегральне рівняння, що пов'язує переміщення виключно з розподілом тиску  $p(\xi, \eta)$  (рис. 6) [20]:

$$\begin{aligned} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) &= \\ &= ((1 - \nu_1^2) / \pi E_1 + (1 - \nu_2^2) / \pi E_2) \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta = (8) \\ &= (\pi E^*)^{-1} \left\{ \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta \right\}. \end{aligned}$$

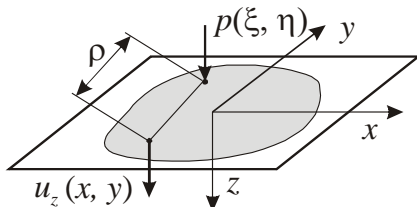


Рис. 6. Переміщення границі напівпростору під дією нормального зусилля

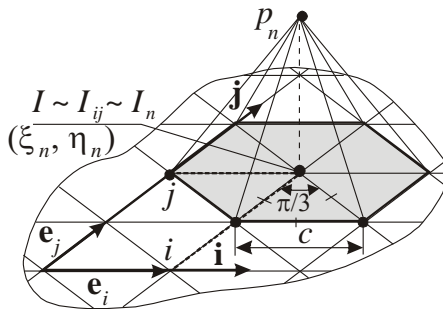


Рис. 7. Регулярна трикутна сітка та пірамідальний елемент функції тиску

Тут  $\nu_i, E_i, i=1,2$  – пружні параметри кожного з контактуючих тіл. Для отримання числового розв'язку функція  $p$  наближається суперпозицією масиву пірамідальних елементарних розподілів (рис. 7) і повністю визначається дискретним набором вузлових значень  $p_n$ :

$$p(\xi, \eta) \cong \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n.$$

Для знаходження  $p_n$  використані: прямий метод (метод колокацій) та варіаційний метод (принцип Калькера) [20]. У роботі розроблений аналітичний шлях обчислення „шаблону” форми розподілу переміщень для одиничного пірамідального елемента  $w(x, y) = \sum_m \iint_{S^{(1)}} [\hat{p}^{(1)}(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta$ , де  $S^{(1)}$  – шестикутна область з одиничними сторонами;  $\hat{p}^{(1)}$  – одиничний пірамідальний розподіл на ній. Тоді:  $u_n = u_{z_1}(I_n) + u_{z_2}(I_n) = \sum_m C_{mm} p_m$ , де  $C_{mm} = (c / \pi E^*) w[i(n) - i(m), j(n) - j(m)]$ .

Результатом є умови контакту (7) у дискретній формі:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ вузол } J_n - \text{ в контакті;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ вузол } J_n - \text{ поза контактом} \end{cases} \quad (9)$$

що доповнюються умови додатності і значення сили:

$$p_m \geq 0, \forall J_m; \quad (\sqrt{3}/2)c^2 \sum_m p_m = P. \quad (11)$$

Розв'язок визначальної системи (9)-(11) знаходиться у ході ітераційної процедури.

Здійснена числова реалізація розроблених методів та створена спеціалізований програмно-модельний комплекс (СПМК). Зокрема, для мінімізації похибки традиційних технологій опису форми (рис. 8) як альтернатива такому підходу пропонується високоточний алгоритм напівавтоматичної генерації топологічно регулярних сіток (рис. 9) на поверхні  $S_{id}$  у її природних координатах. У даному випадку загальна похибка визначається лише відхилення форми "граневої" поверхні  $S_G$  від ідеальної  $S_{id}$ .

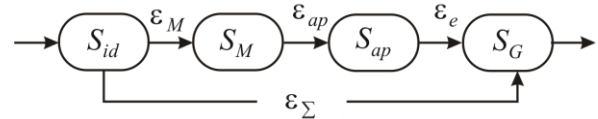


Рис. 8. Похибки моделювання геометрії традиційною технологією:

$$\epsilon_\Sigma = |\epsilon_M| + |\epsilon_{ap}| + |\epsilon_e|$$

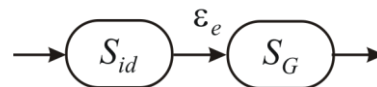


Рис. 9. Запропонована технологія генерування топологічно регулярних сіток та похибки

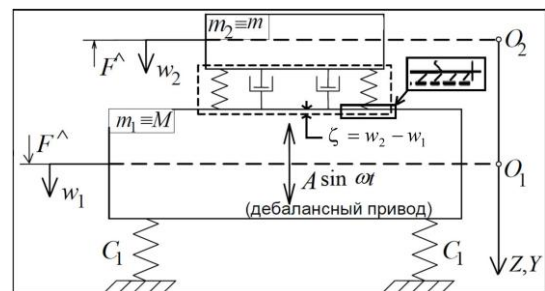


Рис. 10. Розрахункова схема віброударної системи

Підходи, методи та моделі динамічних процесів у віброударних системах з нелінійними неутримуючими зв'язками. Досліджується, для визначеності, двомасова віброударна система рис. 10). Задля урахування усіх особливостей досліджуваної двомасової системи пропонується встановлювати залежності сил взаємодії ланок у віброударній системі

$$F = F(\zeta(t) \equiv (w_1 - w_2), \zeta) \quad (12)$$

не апіорно, а шляхом наближення:

$$F = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij} \varphi_i(\zeta) \psi_j(\zeta), \quad (13)$$

де  $\varphi_i, \psi_j$  – базисні функції, а  $\alpha_{ij}$  – шукані коефіцієнти, що

визначаються основні аналізу та узагальнення серії експериментальних досліджень У цьому контексті задача ідентифікації набору параметрів приймає вигляд:

$$\alpha^* = \arg \min I(\zeta_N - \zeta_E). \quad (14)$$

Тут  $I$  - деякий критерій відповідності розподілів змінної стану  $\zeta$  в часі, отриманих, чисельно (індекс  $N$ ) та експериментальним шляхом (індекс  $E$ ), відповідно. Процедура визначення  $F(\zeta, \dot{\zeta})$  за результатами розрахунково-експериментальних досліджень (12)-(14) реалізує принципово новий підхід до опису сил контактної взаємодії у віброударній системі. Розглядається усталений процес з періодом  $T$ . На рис. 11, 12 представлені схематично розподіли шуканих зусиль, до яких пред'являються наступні вимоги:

$$F = 0, \quad \zeta < 0; \quad F \geq 0; \quad (15)$$

$$F(\zeta, \dot{\zeta}) > F(\zeta, 0), \quad \dot{\zeta} > 0; \quad F(\zeta, \dot{\zeta}) = F(\zeta, 0), \quad \dot{\zeta} < 0. \quad (16)$$

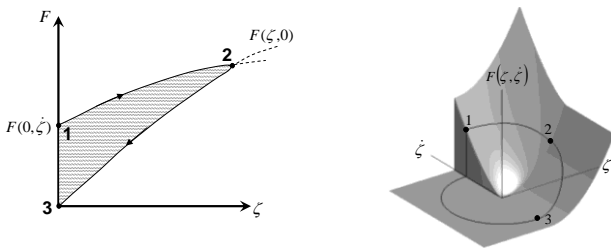


Рис. 11. Вигляд сили ударної взаємодії у фазовому просторі

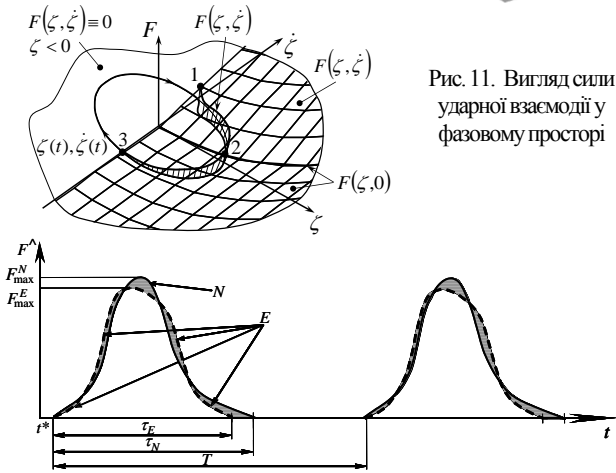


Рис. 12. Розрахунково-експериментальні розподіли ударної взаємодії

Тоді як міру невідповідності часових розподілів  $F_N^{\wedge}, F_E^{\wedge}$  (див. рис. 12) можна взяти будь-яку норму у функціональному просторі, відповідно до специфіки розв'язуваної задачі, зокрема:

$$I_1 = \frac{\max |F_N^{\wedge} - F_E^{\wedge}|}{\max |F_E^{\wedge}|}; \quad I_4 = \frac{\int \text{sign} |F_N^{\wedge} - F_E^{\wedge}| dt}{\int \text{sign} F_E^{\wedge} dt}. \quad (17)$$

З умови мінімуму (17) можна визначити  $F_N^{\wedge}$  як функцію параметрів стану та фізико-механічних характеристик елементів системи, що досліджується. У модельному випадку сила взаємодії задається як випадок розкладання (13):

$$F = \bar{\alpha}_1 \zeta + \bar{\alpha}_2 \dot{\zeta} \quad (18)$$

для визначених значень коефіцієнтів  $\bar{\alpha}_1 = 2.06 \cdot 10^8$  Н/м,

$$\bar{\alpha}_2 = 1.28 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{с/м}.$$

Із інтегрування системи рівнянь

$$\begin{cases} -m_1 \ddot{w}_1 + m_1 g + F_N^{\wedge}(\zeta, \dot{\zeta}, t) - C_1 w_1 - A \omega^2 \sin \omega t = 0, \\ m_2 \ddot{w}_2 - m_2 g + F_N^{\wedge}(\zeta, \dot{\zeta}, t) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

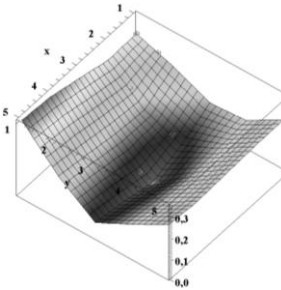


Рис. 13. Візуальне представлення функціонала

У наведеному прикладі мінімізація цієї розбіжності шляхом варіювання коефіцієнтів розкладання сили (13) має тотожно відтворити заздалегідь визначений розподіл (13).

На рис. 13 функціонал  $I_0 = (I_1 + I_4)/2$  представлено візуально в області  $\alpha_1 \in [1.03 \cdot 10^8, 3.09 \cdot 10^8] \times \alpha_2 \in [0.64 \cdot 10^7, 1.92 \cdot 10^7]$ . Пошук мінімуму його значення здійснюється методом покоординатного спуску. На рис. 14 наведено часові розподіли  $F_N^{\wedge}, F_E^{\wedge}$  для декількох послідовних наближень.

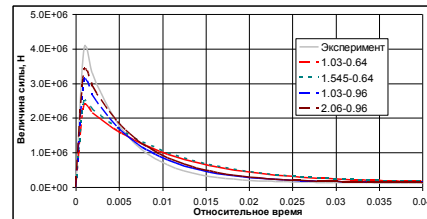


Рис. 14. Графіки часових розподілів  $F_N^{\wedge}, F_E^{\wedge}$  для різних наборів параметрів  $\alpha_1, \alpha_2$

Залежно від значень компонентів для обчислення сили система може мати на сталому режимі як одноударний, так і різноударний режим роботи (рис. 14-18). Важливо відзначити якісні особливості: зміщення максимальної сили на початок ударної взаємодії та деформація фазових діаграм (див. рис. 17, 18).

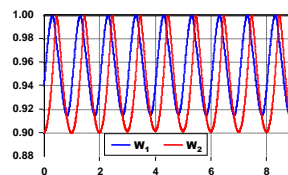


Рис. 15. Розподіли відносних величин  $w_1(t)$  та  $w_2(t)$

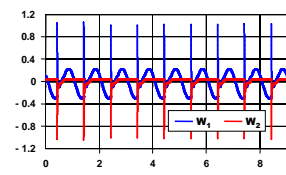


Рис. 16. Розподіли прискорень  $\ddot{w}_1(t)$  та  $\ddot{w}_2(t)$

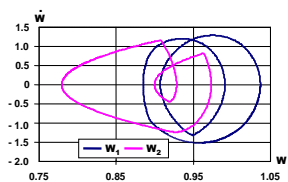


Рис. 17. Фазові діаграми для лінійної пружної моделі

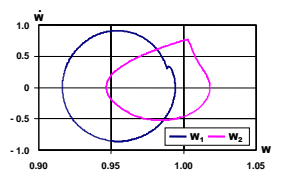


Рис. 18. Фазові діаграми для лінійної в'язкої моделі



**Прикладні задачі аналізу контактної взаємодії і геометричного синтезу СПТ.** Вибір об'єктів досліджень при цьому був зумовлений реальними потребами заводів, НДІ та КБ. Зокрема, розв'язана задача моделювання контактної взаємодії елементів ланцюгового приводу (круглоланковий ланцюг, рис. 19). Встановлено, що в них реалізується



Рис. 19. Конвеєр з ланцюговим приводом

складний тривимірний НДС; має місце складна конфігурація форми контактних плям та розподілу контактної тиску, що якісно і кількісно відрізняються від герцевських (чотирьохпелюсткова форма на відміну від еліптичної, рис. 20);

максимальні деформації виникають на внутрішній поверхні ланки в області контакту (рис. 21). Також було здійснено моделювання НДС коліс циліндро-конічної двохпараметричної передачі (рис. 22) із урахуванням контактної взаємодії їх зубців.

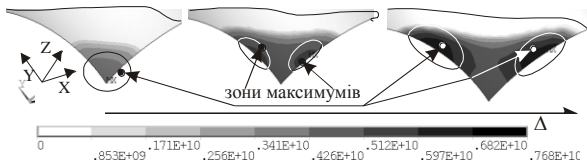


Рис. 20. Характер розподілу контактної тиску з ростом відносного подовження ланцюга  $\Delta$  (показана четвертина)

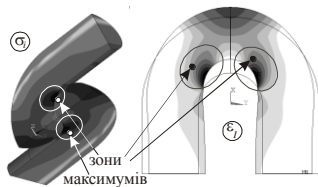


Рис. 21. Напружено-деформований стан при подовженні ланки на 15мм

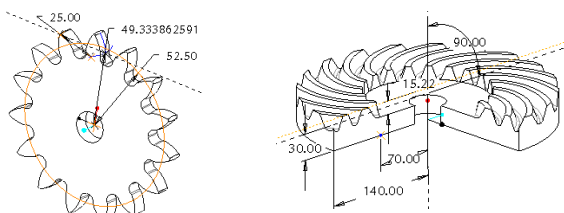


Рис.22. Основні розміри циліндричного (а) та конічного (б) коліс

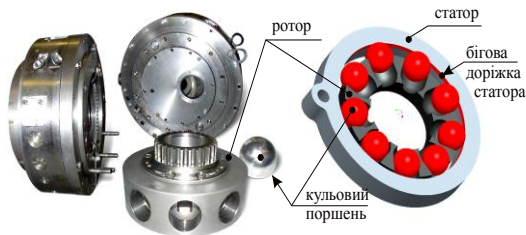


Рис. 23. Радіальна гідропередача

Досліджено контактну взаємодію кульового поршня з біговою доріжкою в радіальній гідроб'ємній передачі (ГОП-900, ХКБМ) танкової трансмісії (рис. 23).

Вибір спеціального профілю бігової доріжки зумовлює

характер розподілу контактної тиску, суттєво відмінний від герцевського (рис. 24), що враховується при виборі значень радіусу центральної частки бігової доріжки статора ГОП та інших її конструктивних параметрів. Розбіжності у значеннях максимального контактної тиску, одержаних за Герцом, МСЕ та МГЕ, демонструє області застосування та порівняльну точність результатів.

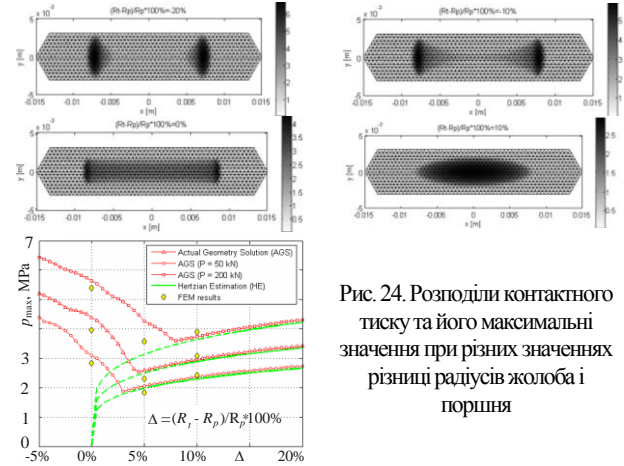


Рис. 24. Розподіли контактної тиску та його максимальні значення при різних значеннях різниці радіусів жолоба і поршня

**Дослідження динамічних процесів.** Дослідження динамічних процесів здійснено на прикладі вибивної машини для вибивки великих виливків масою близько 21т, маса вантажу близько 10т. (рис. 25). На рис. 26 показано характерний процес для вибивної машини при її розгоні з проходженням через резонанс. Аналіз показав, що варіювання коефіцієнтів  $\alpha_{ij}$  має суттєвий ефект (рис. 27).

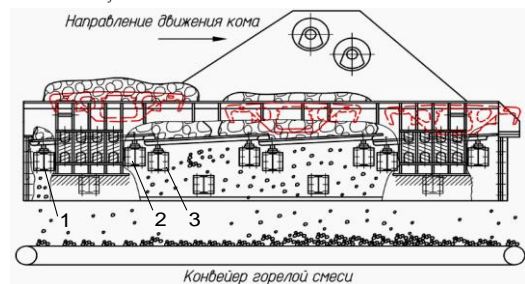


Рис. 25. Загальна схема досліджуваної вибивної машини

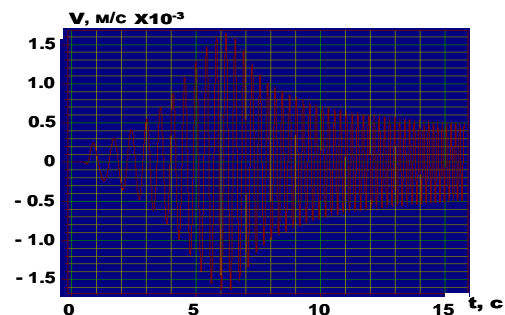


Рис. 26. Переміщення центру мас вібростанини при розгоні

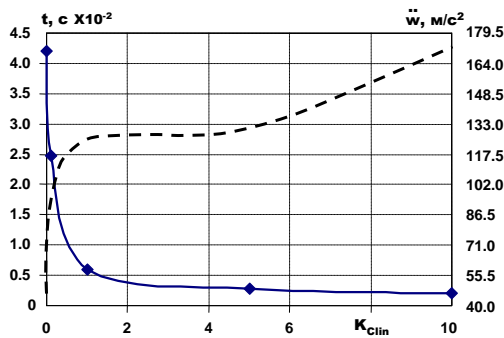


Рис. 27. Зміна тривалості імпульсу та амплітуди прискорень центру мас

**Експериментальні дослідження контактної взаємодії СПТ з КГП.** На прикладі макету циліндро-конічного двохпараметричного зачеплення продемонстрований повний цикл розробки, розрахунків, виготовлення і випробування (рис. 28). Для дослідження контакту був використаний метод контактних відбитків і оригінальний авторський алгоритм розшифровки.

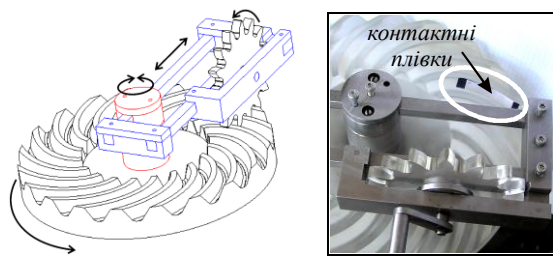


Рис.28. Дослідна модель ДПП

Проведені комплексні дослідження контактної взаємодії ланок силового ланцюга, ДПП і кульового поршня з біговою доріжкою радіальної ГОП показали повну якісну відповідність прогнозованих розрахунків та зафіксованих експериментально результатів (рис. 29, 30).

Проводився також експеримент у виробничих умовах на вибивній машині (рис. 31). Зафіксована множина осцилограм динамічних напружень знаходиться у задовільній відповідності з даними розрахунків (відмінність - не вище 12%). На цій основі було здійснено удосконалення унікальної вібротехніки (рис. 33).

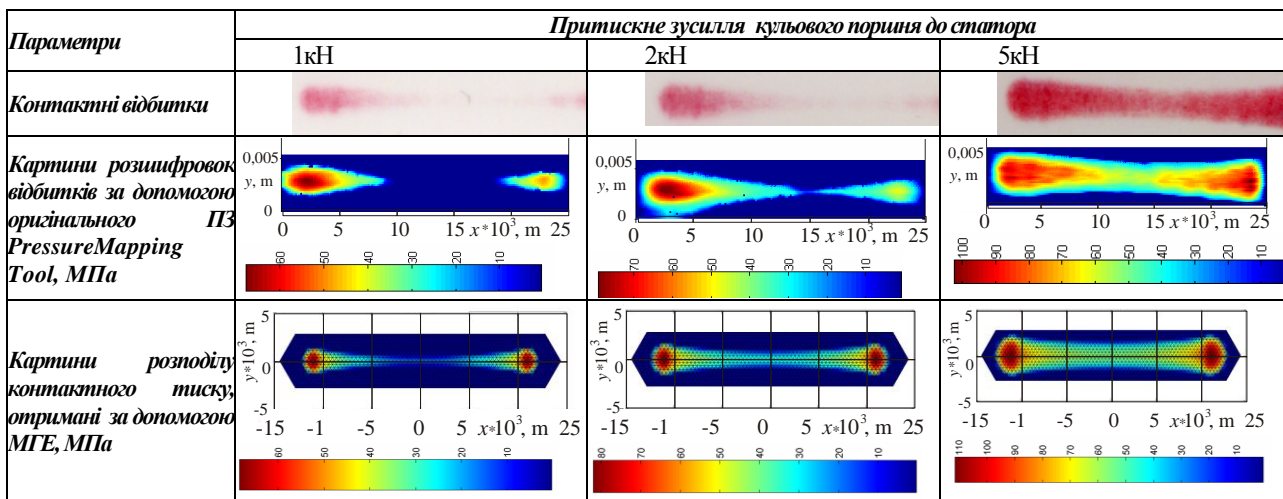


Рис. 29. Результати аналізу контактних відбитків на чутливих плівках Fuji та отриманих МГЕ

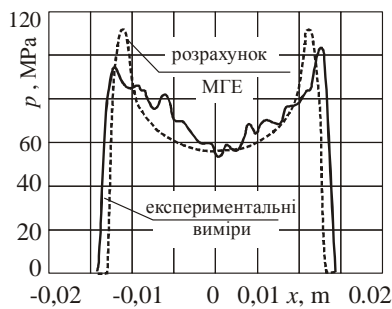


Рис. 30. Розподіли контактної тиску на довгій осі плями контакту при  $R_f = 31,0$  мм,  $P = 5$ кН

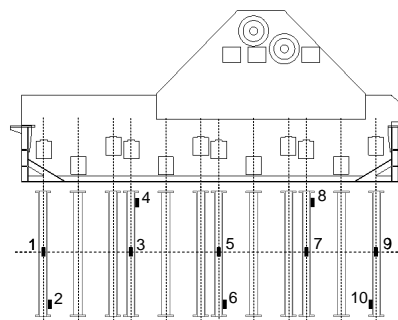


Рис. 31. Схема установки тензодавачів

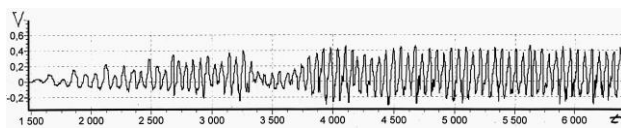


Рис. 32. Приклад осцилограми динамічних напружень



Рис. 33. Удосконалена вібростанція

**Висновки.** У роботі поставлена та розв'язана актуальна і важлива науково-практична проблема розробки методів аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл та геометричного синтезу форми їх поверхонь. Розв'язано наступні завдання: удосконалено метод розв'язання зв'язаної задачі аналізу НДС з урахуванням контактної взаємодії і синтезу спряжених поверхонь тіл, що відрізняється від традиційних єдиним підходом до опису геометричних і числових моделей досліджуваних тіл; запропоновано подальший розвиток методу моделювання кінематично генерованих поверхонь, який полягає в алгоритмічному описі поточних варіантів на основі розв'язання спеціальної задачі геометричного синтезу в криволінійних координатах; вперше запропоновано високоточне генерування скінченно-елементних моделей тіл шляхом топологічно регулярного розбиття у внутрішніх координатах поверхонь; застосовано метод граничних елементів (МГЕ) у поєднанні з уточненим аналітичним обчисленням коефіцієнтів матриці впливу та зазору між тілами; запропоновано і реалізовано інтеграцію розрахункових моделей різного рівня складності в єдиному процесі дослідження контактної взаємодії і синтезу спряжених поверхонь тіл; розроблено новий підхід для визначення сил ударної взаємодії у віброударних дисипативних системах шляхом розкладання шуканої сили в ряд з коефіцієнтами, які обчислюються в ході розрахунково-експериментальних досліджень; запропоновані функціонали для ідентифікації параметрів віброударної системи як міри невідповідності розрахункових та експериментальних результатів; визначено вплив різних компонент у розкладанні сили ударної взаємодії на її часовий розподіл, максимальні значення та тривалість; встановлено, що залежно від фізико-механічних параметрів системи в ній можливі рівно-ударні або різноударні субгармонійні усталені періодичні режими руху; установлені особливості форми та якісні зміни топології контактних зон і розподілу контактного тиску у спряженні тіл при зміні їх форми, розмірів та величини навантаження. Результати досліджень описані, зокрема, у роботах [24 – 37]. Отримані наступні нові наукові результати.

1. На основі аналізу зроблено висновки про недостатні можливості існуючих методів визначення НДС складнопрофільних тіл при контактній взаємодії по кінематично генерованих поверхнях (КГП). Удосконалення цих методів було обране як задача досліджень.

2. У роботі запропонований перспективний підхід до розв'язання зв'язаної задачі дослідження НДС з урахуванням контактної взаємодії складнопрофільних тіл і синтезу КГП, що базується, на відміну від традиційного підходу, на єдиному описі математичної, геометричної і числової моделей. Обґрунтовано використання не одного, а комплексу

методів і моделей різного рівня складності. Досліджено контакт тіл, форма яких може бути заздалегідь не визначена, як у традиційному випадку, а встановлюється у ході розв'язання спеціальної задачі їх геометричного синтезу у вигляді хмари зв'язаних точок.

3. Вперше розроблено теоретичні основи визначення зусиль у віброударних динамічних системах на основі розрахунково-експериментальної ідентифікації.

4. Розроблена у роботі комплексна математична модель НДС тіл з КГП реалізована у вигляді спеціалізованих програмно-модельних комплексів (СПМК), що інтегруються у процес проектних досліджень. Запропонований перспективний метод генерування скінченно-елементного розбиття на основі використання топологічно регулярних поверхневих криволінійних сіток на кінематично генерованих поверхнях.

5. Із застосуванням СПМК розв'язано цикл прикладних задач моделювання НДС із урахуванням контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Установлено закономірності розподілу контактного тиску та контактних зон у спряженні цих тіл. Вони у багатьох випадках різко відмінні від традиційних герцевських розподілів. Установлені також різко відмінні від традиційних часові розподіли зусиль ударної взаємодії з їх концентрацією на початкових етапах взаємодії.

6. Експериментальні дослідження НДС і контактної взаємодії СПТ проводилися на спеціально розроблених стендах і дослідних зразках зубчастих передач, ланцюгових приводів, вібростанцій, гідропередач танкових трансмісій. Відмінність від числових результатів не перевищує 11-16 %. Отримано повне підтвердження адекватності математичних моделей, обґрунтованості вибору методів числових досліджень, відповідності створених моделей, а також достовірності і точності одержаних результатів.

7. Результати досліджень упроваджені в ході виконання низки господарських і договорів про співпрацю з підприємствами, а також бюджетних тем в НТУ „ХПІ”. Запропоновані теоретичні розробки, алгоритми і моделі застосовні для використання при дослідженні широкого класу складнопрофільних тіл з кінематично генерованими поверхнями, які є об'єктами досліджень в різних галузях машинобудування.

Практична значимість для машинобудівної галузі полягає у можливості прямого застосування розробок для підвищення понад світовий рівень ТХ і ТТХ продукції вітчизняного машинобудування, у т.ч. – спеціального, та реалізована в наступному: 1) розроблений і реалізований алгоритм розв'язання практично важливих задач розрахунку міцності при проектуванні елементів конструкцій; 2) на прикладі розв'язання конкретних задач отримані рекомендації з проектування дослідних зразків гідрооб'ємних (ГОП) та двохпараметричних передач, силових ланцюгів, які привели до створення працездатних конструкцій з високими ТХ і ТТХ; 3) створені нові математичні моделі для визначення динамічних характеристик віброударної системи та обчислення внутрішніх зусиль, що виникають в системі. Це дає змогу науково обґрунтувати параметри з метою вдосконалення віброударних машин для вибивки великого вагонного литва; 4) запропонований в роботі підхід володіє достатньою універсальністю і застосовністю для розв'язання задач обґрунтування проектних параметрів широкого класу контактуючих тіл, які здійснюють погоджений рух по



поверхнях спряження.

Результати досліджень впроваджені у практику проектно-дослідницьких робіт у Харківському бронетанковому ремонтному заводі (ХБРЗ), ВАТ "ГСКРТ", ВАТ "Азовмаш", ДП "Завод ім. Малишева", ДП "ХКБМ" та науково-дослідної частини НТУ "ХПІ".

**Література.** 1. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz // *J. Reine Angew. Math.* – 1881. – Vol. 92. – S. 156-171. 2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 509 с. 3. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica / A. Signorini // *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze.* – 1933. – P. 513-533. 4. Александров В.М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В.М. Александров, Е.В. Коваленко. – М.: Наука, 1986. – 336 с. 5. Александров В.М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В.М. Александров, Д.А. Пожарский. – М.: Факториал, 1998. – 288 с. 6. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 303 с. 7. Goryacheva I.G. Contact Mechanics in Tribology / I.G. Goryacheva. – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 360 p. 8. Моссаковский В.И. Контактные задачи математической теории упругости / В.И. Моссаковский, Н.Е. Качаловская, С.С. Голикава. – К.: Наукова думка, 1985. – 176 с. 9. Панасюк В.В. Деякі контактні задачі теорії пружності / В.В. Панасюк, М.Й. Теплий. – К.: Наукова думка, 1975. – 196 с. 10. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г.Я. Попов. – К.-Одесса: Вища школа, 1982. – 168 с. 11. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 493 с. 12. Gladwell G.M.L. Contact problems in the classical theory of elasticity / G.M.L. Gladwell. – *Alphen an den Rijn: Sijthog and Noordhoff*, 1980. – 717 p. 13. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф.Л. Литвин. – М.: Наука, 1968. – 584 с. 14. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 383 с. 15. Киндерлерер Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. – М.: Мир, 1983. – 256 с. 16. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: Изд-во Моск. гос. ак-и приборост. и инф-ки, 1997. – 339 с. 17. Kikuchi N. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods / N. Kikuchi, J.T. Oden // *SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics*, Philadelphia. – 1986. – Vol. 8. – P. 156-161. 18. Solution of Variational Inequalities in Mechanics / I. Hlavacek, J. Haslinger, J. Necas [and oth.]. – Berlin, New York: Springer-Verlag, 1988. – 327 p. 19. Кравчук А.С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров / А.С. Кравчук // *Прикладная математика и механика*. Том 41. – 1977. – С. 329-337. 20. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics / J.J. Kalker // *J. Inst. Math. and Appl.* – 1977. – V. 20. – P. 199-221. 21. Wriggers P. Computational Contact Mechanics / P. Wriggers. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 518 p. 22. Wriggers P. Finite-element-formulation of large deformation impact-contact problems with friction / P. Wriggers, T.V. Van, E. Stein // *Computers and Structures.* – 1990. – V. 37. – P. 319-333. 23. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с. 24. Ткачук Н.Н. Математическое моделирование динамических процессов и напряженно-деформированного состояния элементов гидрообъемной передачи / А.В. Ткачук, Н.Н. Ткачук // *Вісник НТУ "ХПІ"*. – Х.: НТУ "ХПІ", 2003. – № 28. – С. 9-18. 25. Ткачук М. Напружено-деформований стан просторових конструкцій: методи автоматизованого аналізу / А. Васильєв, М. Ткачук, В. Головченко // *Машинознавство.* – Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2006. – №1(103). – С.23-28. 26. Грабовский А.В. Экспериментальное исследование динамических процессов в оптимизированной выбивной машине / Е.Н. Барчан, В.А. Шкода, В.В. Просняк, А.В. Грабовский // *Вісник НТУ "ХПІ"*. – Х.: НТУ "ХПІ", 2007. – № 23. – С. 26-32. 27. Ткачук Н.Н. К вопросу о контактно-взаимодействии плоского штампа с полупространством / Н.Н. Ткачук, А.Н. Ткачук // *Восточно-европейский журнал передовых технологий.* – Х.: УДАЗТ, 2010. – № 3/9 (45). – С. 50-53. 28. Грабовский А.В. Методы и алгоритмы верификации сил ударного взаимодействия в виброударных системах / Грабовский А.В. // *Східно-Європейський журнал передових технологій.* – Х.: УДАЗТ. – 2010. – № 3/9(45). – С.42-46. 29. Ткачук Н.Н. Подход к идентификации ударной модели для виброударной системы / Ткачук Н.Н., А.В. Грабовский, Ткачук Н.А. // *Вісник СевНТУ. Механіка, енергетика, екологія.* – Севастополь: СевНТУ. – 2010. – №110. – С. 55-60. 30. Ткачук М. Підхід до ідентифікації моделі для визначення ударної сили у віброударній системі / М. Ткачук, А. Грабовський, М. Ткачук, І. Артьомов, Е. Барчан // *Машинознавство.* – 2011. – № 5-6. – С. 21-26. 31. Ткачук Н.Н. Контакт сложнопровильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза / Н.Н. Ткачук,

Н.А. Ткачук // *Механіка та машинобудування.* – Х.: НТУ "ХПІ", 2011. – №2. – С. 75-86. 32. Грабовский А.В. Численный анализ влияния модели для определения силы ударного взаимодействия на характер динамических процессов в виброударных системах / Ю.В. Костенко, Н.А. Ткачук, А.В. Грабовский, Н.Н. Ткачук // *Механіка та машинобудування.* – Х.: НТУ "ХПІ", 2012. – № 2. – С. 34-48. 33. Грабовский А.В. Анализ динамических процессов и напряженно-деформированного состояния артиллерийских стволов / Н.А. Ткачук, А.В. Мартыненко, А.Ю. Васильев, А.В. Грабовский // *Вісник НТУ "ХПІ"*. – Х.: НТУ "ХПІ", 2013. – № 23 (996). – С. 146-152. 34. Tkachuk N.N. Sybharmonical modes in vibroimpact systems / Y.V. Kostenko, I.V. Artemov, N.N. Tkachuk // *Международный научно-исследовательский журнал* : Сб. по результатам XXV заочн. науч. конф. Research Journal of International Studies. – Екатеринбург: МНИЖ, 2014. – № 3. – Ч. 2. – С. 27-30. 35. Ткачук Н.Н. Расчетно-экспериментальная идентификация математических и численных моделей элементов сложных механических систем / Н.Н. Ткачук, А.Д. Черлуной, Н.Б. Скрипченко и др. // *КШП. ОМД (Москва).* – М.: ООО "Тисо Принт", 2014. – № 2. – С. 9-15. 36. Ткачук Н.Н. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопровильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (продолжение) / Н.Н. Ткачук, А.Д. Черлуной, Н.Б. Скрипченко и др. // *КШП. ОМД (Москва).* – М.: ООО "Тисо Принт", 2014. – № 7. – С. 9-15. 37. Ткачук М. Inelastic deformation of nonwoven textiles due to the frictional sliding of bonded fibers / Tkachuk M., Ganser M., Linder C. // *WCCM XI 11th. World Congress on Computational Mechanics.* 20-25 July 2014, Barcelona, Spain.

**Bibliography (transliterated):** 1. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // *J. Reine Angew. Math.* – 1881. – Vol. 92. – P. 156-171. 2. Dzhonson K. *Mehanika kontaktnogo vzaimodeystviya* – Moscow: *Mir*, 1989. – 509 p. 3. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica / A. Signorini // *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze.* – 1933. – P. 513-533. 4. Aleksandrov V.M. *Zadachi mehaniki sploshnyh sred so smeshannyimi granichnyimi usloviyami.* – Moscow: *Nauka*, 1986. – 336 p. 5. Aleksandrov V.M. *Neklassicheskie prostranstvennyye zadachi mehaniki kontaktnyih vzaimodeystviy uprugih tel* – Moscow: *Faktorial*, 1998. – 288 p. 6. Galin L.A. *Kontaktnyye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti.* – Moscow: *Nauka*, 1980. – 303 p. 7. Goryacheva I.G. *Contact Mechanics in Tribology.* – Dordrecht–Boston–London: *Kluwer Academic Publishers*, 1998. – 360 p. 8. Mossakovskiy V.I. *Kontaktnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* – Kyiv: *Naukova dumka*, 1985. – 176 p. 9. Panasyuk V.V. *Deyakl kontaktni zadachi teorii pruzhnosti.* – Kyiv: *Naukova dumka*, 1975. – 196 p. 10. Popov G.Ya. *Kontaktnyye zadachi dlya lineynno-deformiruемого osnovaniya.* – Kyiv–Odessa: *Vischa shkola*, 1982. – 168 p. 11. *Razvitie teorii kontaktnyih zadach v SSSR* / Pod red. L. A. Galina. – Moscow: *Nauka*, 1976. – 493 p. 12. Gladwell G.M.L. *Contact problems in the classical theory of elasticity– Alphen an den Rijn: Sijthog and Noordhoff*, 1980. – 717 p. 13. Litvin F.L. *Teoriya zubchatyih zatspeplenyi.* – Moscow: *Nauka*, 1968. – 584 p. 14. Dyuvo G. *Neravenstva v mehanike i fizike*, 1980. – 383 p. 15. Kinderlerer D. *Vvedenie v variatsionnyye neravenstva i ih prilozheniya* – Moscow: *Mir*, 1983. – 256 p. 16. Kravchuk A.S. *Variatsionnyye i kvazi variatsionnyye neravenstva v mehanike.* – Moscow: *Izd-vo Mosk. gos. ak-i priborost. i inf-ki*, 1997. – 339 p. 17. Kikuchi N. *Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods* / N. Kikuchi, J.T. Oden // *SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics*, Philadelphia. – 1986. – Vol. 8. – P. 156-161. 18. *Solution of Variational Inequalities in Mechanics* / I. Hlavacek, J. Haslinger, J. Necas [and oth.]. – Berlin, New York: *Springer-Verlag*, 1988. – 327 p. 19. Kravchuk A.S. *K zadache Gertsya dlya lineynno- i nelineynno-uprugih tel konechnyih razmerov* // *Prikladnaya matematika i mehanika*. Vol 41. – 1977. – P. 329-337. 20. Kalker J.J. *Variational principles of contact elastostatics* / J.J. Kalker // *J. Inst. Math. and Appl.* – 1977. – V. 20. – P. 199-221. 21. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics* / P. Wriggers. – Berlin-Heidelberg: *Springer-Verlag*, 2006. – 518 p. 22. Wriggers P. *Finite-element-formulation of large deformation impact-contact problems with friction* / P. Wriggers, T.V. Van, E. Stein // *Computers and Structures.* – 1990. – V. 37. – P. 319-333. 23. Krauch S., Starfild A. *Metody granichnyih elementov v mehanike tverdogo tela.* – Moscow: *Mir*, 1987. – 328 p. 24. Tkachuk N.N. *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov i napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya elementov gidroob'emnoy peredachi* // *Vіsnik NTU "KhPI"*. – Kharkov: *NTU "KhPI"*, 2003. – No 28. – P. 9-18. 25. Tkachuk M. *Napryuzhenno-deformovaniy stan prostorovih konstruksiy: metodi avtomatizovanogo analizu* // *Mashinoznavstvo.* – Lviv: *KINPATRI LTD*, 2006. – No1(103). – P.23-28. 26. *Grabovskiy A.V. Eksperimentalnoe issledovanie dinamicheskikh protsessov v optimizirovannoy vyibivnoy mashine* // *Vіsnik NTU "KhPI"*. – Kharkov: *NTU "KhPI"*, 2007. – No 23. – P. 26-32. 27. *Tkachuk N.N. K voprosu o kontaktnom vzaimodeystvii ploskogo shtampa s poluprostanstvom* // *Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovyih tehnologiy.* – Kharkov: *UDAZT*, 2010. – No 3/9 (45). – P. 50-53. 28. *Grabovskiy A.V. Metody i algoritmy verifikatsii sil udarnogo*



vzaimodeystviya v vibroudarnykh sistemah // *Shidno-Evropeyskiy zhurnal peredovih technology*. – Kharkiv: UDAZT, 2010. – No 3/9 (45). – P. 42-46. **29.** Tkachuk N.N. Podhod k identifikatsii udarnoy modeli dlya vibroudarnoy sistemy // *Visnik SevNTU. Mehanika, energetika, ekologiya*. – Sevastopol : SevNTU. – 2010. – No110. – P. 55-60. **30.** Tkachuk M. PidhId do Identifikatsiyi modeli dlya viznachennya udarnoYi sily u vlbroudarnyI sistemI // *Mashinoznavstvo*. – 2011. – No 5-6. – P. 21-26. **31.** Tkachuk N.N. Kontakt slozhnoprofilnyih tel: svyazannaya zadacha analiza napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya i geometricheskogo sinteza // *Mehanika ta mashinobuduvannya*. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2011. – No2. – P. 75-86. **32.** Grabovskiy A.V. Chislennyi analiz vliyaniya modeli dlya opredeleniya silyi udarnogo vzaimodeystviya na harakter dinamicheskikh protsessov v vibroudarnykh sistemah // *Mehanika ta mashinobuduvannya*. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2012. – No 2. – P. 34-48. **33.** Grabovskiy A.V. Analiz dinamicheskikh protsessov i napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya artilleriyskikh stvolov // *Visnik NTU*

"KhPI". – Kharkiv : NTU "KhPI", 2013. – No 23 (996). – P. 146-152. **34.** Tkachuk N.N. Sybharmonic modes in vibroimpact systems // *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal : Sb. po rezul'tatam XXV zaochn. nauch. konf. Research Journal of International Studies*. – Ekaterinburg: MNIZh, 2014. – No 3. – Ch. 2. – P. 27-30. **35.** Tkachuk N.N. Raschetno-eksperimental'naya identifikatsiya matematicheskikh i chislennykh modeley elementov slozhnykh mekhanicheskikh sistem // *KShP. OMD (Moskva)*. – Moscow: OOO "Tiso Print", 2014. – No 2. – P. 3-9. **36.** Tkachuk N.N. Mnogourovnevyie modeli v zadache analiza kontaktnogo vzaimodeystviya slozhnoprofilnyih tel: algoritmy, realizatsiya i analiz primenimosti (prodolzhenie) // *KShP. OMD (Moskva)*. – Moscow: OOO "Tiso Print", 2014. – No7. – P. 9-15, – No 8. – P. 8-14. **37.** Tkachuk M. Inelastic deformation of nonwoven textiles due to the frictional sliding of bonded fibers // WCCM XI. 11th. World Congress on Computational Mechanics. 20-25 July 2014, Barcelona, Spain.

Надійшло (received) 5.09.2015 з.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Ткачук Микола Миколайович** – кандидат технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», докторант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин» тел.: (057) 707-69-01; e-mail: [mikolei@rambler.ru](mailto:mikolei@rambler.ru).

**Ткачук Микола Миколайович** – Ph.D., National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", doctorante at the Department of theory and computer-aided design of mechanisms and machines, tel.: (057) 707-69-01; e-mail: [mikolei@rambler.ru](mailto:mikolei@rambler.ru).

**Грбовський Андрій Володимирович** – кандидат технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин»; тел.: (057) 7076166; e-mail: [andrej8383@gmail.com](mailto:andrej8383@gmail.com).

**Grabovskiy Andrey Vladimirovich** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Senior Researcher of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department, tel.: (057) 7076166; e-mail: [andrej8383@gmail.com](mailto:andrej8383@gmail.com).

**Скрипченко Наталія Борисівна** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин» тел.: (057) 707-65-34; e-mail: [natalia.skripchenko@ntu.kharkiv.edu](mailto:natalia.skripchenko@ntu.kharkiv.edu).

**Skripchenko Nataliia Borysivna** – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", postgraduate student at the Department of theory and computer-aided design of mechanisms and machines, tel.: (057) 707-65-34; e-mail: [natalia.skripchenko@ntu.kharkiv.edu](mailto:natalia.skripchenko@ntu.kharkiv.edu).