

УДК 621.91:536.2  
© 2014

**Ю.Г. КРАВЧЕНКО,**  
кандидат технічних наук,

**Б.Г. ПЕЛІШЕНКО,**  
кандидат фізико-  
математичних наук,

**О.Ю. КУЗНЕЦОВА,**  
кандидат технічних наук,

ДВНЗ “Національний гірничий  
університет” – Дніпропетровський  
державний аграрно-  
економічний університет  
E-mail: juko@3g.ua

ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ  
КОНТАКТНОЇ ТЕМПЕРАТУРИ  
НАГРІВУ ПО ДОВЖИНІ  
І ГЛИБИНІ ЛЕЗА

*Виведена формула температурного поля леза (прямого клина) в головній січній площині по глибині від поверхні нагріву і його середнього значення. Визначена система рівнянь взаємовпливу контактних температур на передній та задній поверхнях.*

**Ключові слова:** температурне поле, нагрів, потужність, джерело, лезо.

Аналітичне визначення температури різання пов'язано зі складною задачею розрахунку інтенсивностей (густини) теплових потоків  $q_\gamma$  через передню  $A_\gamma$  та  $q_\alpha$  через задню  $A_\alpha$  поверхні леза. Відомо, що температура тертя стружки значно перевищує температуру контактної зі сторони  $A_\alpha$  поверхні різання  $R$  заготовки. Тому остання слугує своєрідним охолоджувачем для леза, забираючи у свою масу частину теплоти, яка поступає зі сторони стружки через  $A_\gamma$ .

На основі цього явища А.Н. Резников [1, 2] запропонував систему рівнянь контактних температур на  $A_\gamma$  і  $A_\alpha$ :

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{\gamma s} + (\Theta_{\gamma\mu} - \Theta_{\gamma c}) &= \Theta_{\gamma\mu} \cdot M_\gamma + \Theta_{\alpha c} \cdot N_\alpha \\ \Theta_{\alpha s} + (\Theta_{\alpha\mu} - \Theta_{\alpha c}) &= \Theta_{\alpha\mu} \cdot M_\alpha + \Theta_{\gamma c} \cdot N_\gamma \end{aligned} \right\}, (1)$$

де в лівій частині  $\Theta_{\gamma s}$  і  $\Theta_{\alpha s}$  – залишкові температури стружки і контактної поверхні  $R$  від роботи пластичної деформації в площині зсуву  $P_\gamma$ ;  $\Theta_{\gamma\mu}$  і  $\Theta_{\alpha\mu}$  – температури тертя стружки і заготовки з контактними поверхнями  $A_\gamma$  і  $A_\alpha$  леза;  $\Theta_{\gamma c}$  і  $\Theta_{\alpha c}$  – температури зниження внаслідок теплообміну між парами тертя; у пра-

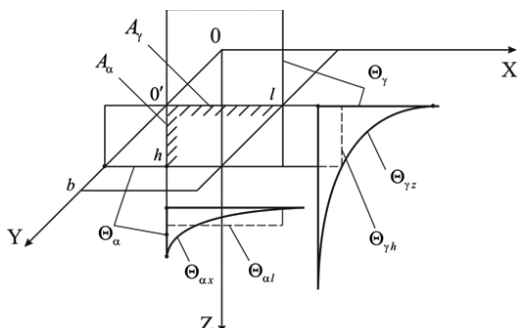
вій частині зазначені залежні від густини теплових потоків контактні температури леза  $\Theta_{\gamma\mu} = f(q_\gamma)$  і  $\Theta_{\alpha\mu} = f(q_\alpha)$  з коефіцієнтами  $M$  і  $N$  взаємовпливу температурних полів від  $\Theta_{\gamma\mu}$  і  $\Theta_{\alpha\mu}$ . Значення  $M$  і  $N$  у вигляді графічних і табличних функцій отримані на основі експериментальних даних і результатів моделювання.

**Мета роботи** – вивести формулу температурного поля леза в головній січній площині  $P_\tau$  і визначити аналітично взаємовплив контактних температур на передній та задній поверхнях.

**Постановка задачі.** Визначається розподіл температури по глибині леза в головній січній площині  $P_\tau$  від дії смугового безперервного джерела (СБД) нагріву поверхонь  $A_\gamma$  і  $A_\alpha$  (рис.1).

Напівплощини  $хоу (A_\gamma)$  і  $уoz (A_\alpha)$  – адіабатичні і мають рівномірний розподіл контактних температур  $\Theta_\gamma$  і  $\Theta_\alpha$ . Температурне поле леза на ділянках  $o'l'$  і  $o'h'$  площини  $P_\tau$  визначаються методом суперпозиції незалежних полів

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{\gamma x} &= \Theta_\gamma + \Theta_{\alpha d} \\ \Theta_{\alpha z} &= \Theta_\alpha + \Theta_{\gamma h} \end{aligned} \right\} (2)$$



**Рис.1. Схематизація температурних полів  $\Theta_{\gamma}$  і  $\Theta_{\gamma h}$  на передній ( $l \times b$ ) та  $\Theta_{\alpha}$  і  $\Theta_{\alpha h}$  на задній  $A_{\alpha}$  ( $h \times b$ ) контактних поверхнях леза:** – довжина контакту стружки з  $A_{\gamma}$ ;  $h$  – величина зносу леза по  $A_{\alpha}$ ;  $b$  – ширина січної зрізу

на основі вихідних даних середнього значення контактних температур [3]  $\Theta_{\gamma}$  і  $\Theta_{\alpha}$  з урахуванням температур  $\Theta_{\alpha l}$  і  $\Theta_{\gamma h}$  додаткового впливу джерел теплоти  $q_{\gamma}$  і  $q_{\alpha}$ . Визначення середнього значення температури  $\Theta_{\alpha l}$  (або  $\Theta_{\gamma h}$ ) на фіксованій глибині  $l$  (або  $h$ ) є предметом даного дослідження.

За початкову основу розрахунків прийнято вираз [4, 5] для температурного поля від лінійного миттєвого джерела (ЛМД) на адіабатичній поверхні напівобмеженого тіла з ординатою  $-\infty < y_1 < \infty$  та аплікатою  $z_1 = 0$  (кількість теплоти імпульсу  $Q_{ЛМ}$  – Дж/м – подвоюється)

$$\Theta_{ЛМ} = \frac{Q_{ЛМ}}{2\pi\lambda\tau} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2 + z^2}{4\omega\tau}\right], \quad (3)$$

де  $\lambda$  і  $\omega$  – коефіцієнти тепло- і температуропроводності;  $\tau$  – час спостереження температури після імпульсу теплоти;  $x_1$  – абсциса ЛМД;  $x$  і  $z$  – координати точки, що розглядається.

Під час розрахунку використано розкладання інтегральної показникової функції для малих значень  $t$  у числовий ряд [5–7]

$$-Ei(-t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = -c - \ln t - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n \cdot n!} \quad (4)$$

з постійною Ейлера  $c = 0,5772$ .

**Основний зміст.** Розрахунки складаються з двох частин.

1. Температурне поле в січній площині клина при нагріванні однієї зі сторін. Розв'язок виконували по другому напрямку

розрахунку [3] шляхом двох інтегральних переходів від ЛМД до СБД.

Розподіл температури по глибині  $z$  від лінійного безперервного джерела (ЛБД) потужністю  $q_{ЛБ}$  (Вт/м) визначається інтегруванням  $\Theta_{ЛМ}$  (3) по змінній  $\tau_i$  [4, 5]

$$\Theta_{ЛБ} = \int_0^{\tau} \Theta_{ЛМ} \cdot d\tau_i = \frac{q_{ЛБ}}{2\pi\lambda} \int_0^{\tau} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2 + z^2}{4\omega(\tau-\tau_i)}\right] \frac{d\tau_i}{\tau-\tau_i},$$

де  $\tau_i$  – момент часу імпульсу теплоти;  $\tau$  – момент часу фіксації температури;  $\tau - \tau_i$  – час розповсюдження теплоти від  $i$ -го імпульсу.

$$\text{Застосування підстановки } \frac{(x-x_1)^2 + z^2}{4\omega(\tau-\tau_i)} = s$$

приводить до виразу

$$\Theta_{ЛБ} = \frac{q_{ЛБ}}{2\pi\lambda} \int_{s_1}^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s}. \quad (5)$$

Для прямого безконечного клина температурне поле діючого і відбитого СБД [1, 4] густиною  $q_{СБ}$  (Вт/м<sup>2</sup>) визначається інтегруванням  $\Theta_{ЛБ}$  (5) по змінній  $x_1$  [4, 5] зі застосуванням чергової заміни:

$$\Theta_{СБ} = \int_{-x}^x \Theta_{ЛБ} \cdot dx_1 = \frac{q_{СБ}}{2\pi\lambda} \int_{-l}^l \left( \int_{s_1}^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s} \right) dx_1 =$$

$$= \frac{q_{СБ} \cdot \omega\tau}{\pi\lambda} \int_{p_2}^{p_1} \left( \int_p^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s} \right) \frac{dp}{\sqrt{4\omega\tau \cdot p - z^2}}. \quad (6)$$

Внутрішній інтеграл (6) замінюємо числовим рядом (4) при  $n = 1$  для малих значень  $p$ , і тоді зовнішній інтеграл набуває вигляду

$$J_{\Sigma} = \int_{p_2}^{p_1} (-c - \ln p + p) \frac{dp}{\sqrt{4\omega\tau \cdot p - z^2}}. \quad (7)$$

Кожен інтеграл складових в (7) обчислюється окремо [8, 9] з урахуванням  $4\omega\tau \cdot p - z^2 = a \cdot p + b$ . Сумарно замість (7) маємо вираз

$$J_{\Sigma} = \frac{l}{\omega\tau} \left[ -c + 2 - \frac{x+l}{2l} \ln \frac{(x+l)^2 + z^2}{4\omega\tau} + \frac{x-l}{2l} \ln \frac{(x-l)^2 + z^2}{4\omega\tau} - \frac{z}{l} \left( \arctg \frac{x+l}{z} - \arctg \frac{x-l}{z} \right) + \frac{1}{12\omega\tau} (l^2 + 3x^2 + 3z^2) \right]. \quad (8)$$

Після упорядкування і підстановки (8) в (6) отримуємо функцію температурного поля від дії СБД на  $A_{\gamma}$ :

$$Q_{СБ} = \frac{q_{СБ} \cdot l}{\pi\lambda} \left[ 2,809 + \frac{l^2 + 3x^2 + 3z^2}{12\omega\tau} - \frac{l+x}{2l} \ln \frac{(l+x)^2 + z^2}{\omega\tau} \right]$$

$$\frac{l-x}{2l} \ln \frac{(l-x)^2 + z^2}{\omega\tau} - \frac{z}{l} \left( \operatorname{arctg} \frac{l+x}{z} + \operatorname{arctg} \frac{l-x}{z} \right). \quad (9)$$

Відзначимо, що функція  $f(z, x)$  у квадратних дужках (9) при  $z = 0$  видозмінюється відповідно на функцію [3]

$$U_\Psi = 2,809 + \ln F_0 - (1 + \Psi) \ln(1 + \Psi) - (1 - \Psi) \ln(1 - \Psi) + (1 + 3\Psi^2)/12 \cdot F_0$$

з безрозмірним параметром  $\Psi = x/l$  і критерієм Фур'є  $F_0 = \omega\tau/l^2$ .

2. Середнє значення температури по ширині  $l$  і глибині  $h$  дії СБД теплоти визначається подвійним інтегруванням [8, 9] функції  $f(z, x)$  (9) по змінним  $x, z$

$$T = \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^l f(x, z) dz \cdot dx. \quad (10)$$

Після інтегрування (10) по  $x$  отримуємо

$$T = \frac{1}{h} \int_0^h \left( 3,809 + \frac{l^2}{6\omega\tau} + \frac{z^2}{4\omega\tau} - \frac{4l^2 + z^2}{4l^2} \ln \frac{4l^2 + z^2}{\omega\tau} + \frac{z^2}{2l^2} \ln \frac{4l^2 + z^2}{z^2} + \frac{z^2}{4l^2} \ln \frac{z^2}{\omega\tau} - \frac{2z}{l} \operatorname{arctg} \frac{2l}{z} \right) dz. \quad (11)$$

Вдруге зазначимо, що проінтегрований вираз в дужках (11) при  $z = 0$  відповідає функції [3] середнього значення температури  $U_l = 2,423 + \ln F_0 + 1/(6F_0)$ .

Далі після інтегрування (11) по  $z$ , математичних перетворень, групування і скорочення на відношення  $(2l^2 + h^2)/(12\omega\tau)$ , яке прямує до 0, знаходимо розрахункову формулу

$$T_\gamma = 4,476 + 2\pi \frac{l}{h} + \frac{h^2}{12l^2} \ln \frac{4l^2 + h^2}{h^2} - \ln \frac{4l^2 + h^2}{\omega\tau} - \frac{16l}{3h} \operatorname{arctg} \frac{h}{2l} - \frac{4l^2 + h^2}{lh} \operatorname{arctg} \frac{2l}{h}. \quad (12)$$

Функція (12) залежить від теплопроводності інструментального матеріалу  $\omega$ , часового теплонасищення тіла леза  $\tau$ , довжини контакту стружки  $l$  з  $A_\gamma$  і величини фаски зносу  $h$  по  $A_\alpha$ .

Визначаючи функцію  $T_\alpha$  середнього значення температурного поля зі сторони  $A_\alpha$  від СБД густиною  $q_\alpha$ , слід у розрахунковій формулі (12) поміняти місцями  $l$  і  $h$ .

З метою підтвердження достовірності попередніх розрахунків було проведено додаткове інтегрування (10) спочатку по  $z$ , а потім по  $x$

$$T_\gamma = 4,476 + \frac{2\pi l}{3h} + \frac{h^2}{12l^2} \ln \frac{4l^2 + h^2}{h^2} - \ln \frac{4l^2 + h^2}{\omega\tau} - \frac{8l}{3h} \operatorname{arctg} \frac{h}{2l} - \frac{4l^2 + 3h^2}{3lh} \operatorname{arctg} \frac{2l}{h}. \quad (13)$$

Вирази (12) і (13) відрізняються лише множниками трьох доданків і мають однакові значення порівняльних розрахунків.

**Реалізація.** Температура леза в січній площині  $P_\gamma$  від СБД на поверхнях  $A_\gamma$  і  $A_\alpha$   $\Theta(J_0) = 0,5[\Theta(J_\gamma) + \Theta(J_\alpha)]$  по рис.2 дорівнює [1, 5].

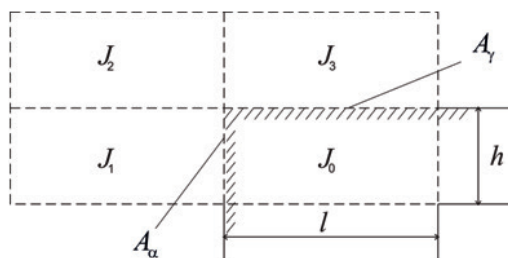


Рис.2. Відбиття фіктивних джерел  $J_1 - J_3$  для прямого клина

Вираз (14) являє собою праву частину системи (1), де до контактної температури  $\Theta_\gamma$  або  $\Theta_\alpha$  з функцією УЛ [3] додається середнє значення температурного поля по довжині і глибині січної площі  $l \times h$  від СБД другої сторони леза з функцією  $T_l$  (13).

$$\Theta_l(J_0) = \sum_{n=0}^{n=3} \Theta(J_n) = 2[\Theta(J_\gamma) + \Theta(J_\alpha)] \quad (14)$$

Кінцеві розрахунки зводяться до середніх значень контактних температур на поверхнях  $A_\gamma$  і  $A_\alpha$  леза з урахуванням додаткової температури їх взаємовпливу (2)

$$\left. \begin{aligned} Q_{\gamma\alpha} &= \frac{2}{\pi\lambda} (q_\gamma \cdot l \cdot U_\gamma + q_\alpha \cdot h \cdot T_\alpha) \\ Q_{\alpha\gamma} &= \frac{2}{\pi\lambda} (q_\alpha \cdot h \cdot U_\alpha + q_\gamma \cdot l \cdot T_\gamma) \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

де функції  $U_\gamma$  і  $U_\alpha$  через критерії  $F_{0l} = \frac{\omega\tau}{l^2}$

і  $F_{0h} = \frac{\omega\tau}{h^2}$  визначаються відповідно за

формулою [3]  $U = 2,423 + \ln F_0 + 1/(6F_0)$ , а функції  $T_\gamma$  і  $T_\alpha$  – за формулою (12).

Пошукові значення густини теплопоглинання лезом  $q_y$  і зі знаком мінус визначаються розв'язанням системи рівнянь (1) з аналітично розрахованою правою частиною (15).

Усі інші розрахункові моделі зі застосуванням середньої температури в січній леза  $\Theta_{\text{лр}} = f(T_y, T_o)$ , еквівалентного значення густини  $q' = f(\Theta_{\text{лр}})$  та балансу теплових потоків  $q_y \cdot l = q_a \cdot h$  виявилися недостовірними.

### Висновки

1. Здійснено аналітичне розв'язання задачі з визначення взаємовпливу контактних температур на передній та задній поверхнях леза на основі спільного температурного поля в головній січній площині.

2. Виведено формулу температурного поля по ширині і глибині дії смугового безпе-

рервного джерела теплоти на поверхні прямого клина.

3. Отримано середнє значення функції залежності температури в головній січній площині леза від довжини контакту зі стружкою на передній і величини фаски зносу на задній поверхнях.

### Бібліографія

1. Резников А.Н. Теплофизика резания / А.Н. Резников. – М.: Машиностроение, 1969. – 288 с.

2. Резников А.Н. Теплофизика процессов механической обработки материалов / А.Н. Резников. – М.: Машиностроение, 1981. – 279 с.

3. Кравченко Ю.Г. Распределение контактной температуры на режущем клине / Ю.Г. Кравченко // Резание и инструмент в технологических системах. – 2010. – № 78. – С. 88–96.

4. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке / Н.Н. Рыкалин. – М.: Матгиз, 1951. – 296 с.

5. Карслоу Г.С. Теплопроводность твердых тел / Г.С. Карслоу, Д.К. Егер; пер. с англ.

под ред. А.А. Померанцева. – М.: Наука, 1964. – 487 с.

6. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш; пер. с нем. под ред. Л.И. Седова. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

7. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган; пер. с англ. под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Карамзиной. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт; пер. с англ. Н.В. Леви. – М.: Наука, 1978. – 224 с.

9. Брычков Ю.А. Таблицы неопределенных интегралов: справочник / Ю.А. Брычков, О.Н. Маричев, А.П. Прудников. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

Рецензент – доктор технічних наук,  
професор С.С. Тищенко