

УДК 622.625.6

Гутаревич В. О.

## ИССЛЕДОВАНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ МОНОРЕЛЬСОВОГО ПУТИ ШАХТНОЙ ПОДВЕСНОЙ ДОРОГИ

Работа шахтной подвесной монорельсовой дороги, когда происходит движение состава по монорельсу, связана с силовыми действиями, обусловленными реализацией тягового и тормозного усилий, перемещением груза, изменчивостью ускорений, наличием стыков и неровностью пути [1–4]. В результате этого наблюдаются колебания, приводящие к дополнительным затратам энергии, деформации самого пути и его подвешивания, включая крепь горной выработки. Вследствие чего ухудшаются эффективность, снижается надежность и повышается аварийность работы. С ростом скорости движения и массовой нагрузки на монорельс негативные последствия многократно усиливаются, что в значительной мере ограничивает возможность их эксплуатации.

Цель работы заключается в установлении взаимосвязи между поперечными колебаниями монорельсового пути и параметрами подвесной дороги.

Во время движения подвесной дороги возникает изгиб упругой линии монорельса. Уравнение изгиба будет [5, 6]:

$$- EJ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} = M_u, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости материала монорельса;

$J$  – момент инерции поперечного сечения монорельса относительно его продольной оси;

$z$  – поперечное перемещение монорельса в точке  $x$ ;

$M_u$  – момент инерции поперечного сечения монорельса относительно его продольной оси.

Приведенное уравнение (1) справедливо, поскольку поперечные размеры монорельса малы относительно его длины.

После дифференцирования по  $x$  получим:

$$- \frac{d}{dx} \left( EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{dM_u}{dx} = Q(x, t), \quad (2)$$

где  $Q(x, t)$  – перерезывающая сила, действующая на монорельс в точке  $x$ .

В результате вторичного дифференцирования по  $x$  установим интенсивность нагрузки  $q(x, t)$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = - \frac{dQ}{dx} = q(x, t). \quad (3)$$

С учетом принципа Даламбера уравнение поперечного перемещения принимает вид:

$$\rho \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = q(x, t), \quad (4)$$

где  $\rho_\gamma \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$  – силы, устанавливаемые согласно принципу Даламбера.

Полученное уравнение (4) учитывает интенсивность нагрузки, возникающей при перемещении подвешенного состава по монорельсу и, в общем случае, изменяющейся во времени. Когда перемещение состава не происходит и поперечное сечение не изменяется, то это уравнение приобретает вид свободных поперечных колебаний монорельса:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + r^2 \frac{d^4 z}{dx^4} = 0, \quad (5)$$

где  $r = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_\gamma}}$ .

Решение уравнения (5) может быть получено аналогично, как и для продольных колебаний. Отличие заключается в том, что необходимо учитывать для каждого конца монорельса по два граничных условия.

Например, когда отрезок монорельса подвешен за концы, а один из концов зафиксирован от продольного перемещения, то смещения и изгибающие моменты равны:

$$\begin{aligned} (z)_{x=0} = 0; & \quad \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0. \\ (z)_{x=L} = 0; & \quad \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Если оба конца монорельса закреплены неподвижно, то смещения и изгибающие моменты равны:

$$\begin{aligned} (z)_{x=0} = 0; & \quad \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=0} = 0. \\ (z)_{x=L} = 0; & \quad \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Возможны и другие сочетания граничных условий, когда монорельс имеет дополнительные промежуточные крепления или подвешивается на упругие опоры.

Начальные условия, которые задаются в момент  $t = 0$ , аналогично как для продольных колебаний, устанавливаются смещением и скоростью:

$$z(x,0) = \varphi_1(x); \quad \dot{z}(x,0) = \varphi_2(x). \quad (8)$$

Частное решение уравнения (5) найдем в виде произведения двух функций:

$$z(x,t) = T(t)X(x). \quad (9)$$

После подстановки имеем:

$$\frac{T''(t)}{r^2 T(t)} = -\frac{X^{IV}(x)}{X(x)} = -a_z^4, \quad (10)$$

где  $a_z$  – постоянная, характеризующая указанные соотношения.

Отсюда следует:

$$T'' = \omega^2 T = 0, \quad (11)$$

$$X^{IV} - a_z^4 X = 0, \quad (12)$$

где  $\omega^2 = r^2 a_z^4$  или:

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ}{\rho\gamma}} a_z^2. \quad (13)$$

Общее решение уравнения (11) аналогично, как и для продольных колебаний, будет:

$$T(t) = A_r \cos \omega t + B_r \sin \omega t = P_r \cos(\omega t - \varphi_r), \quad (14)$$

где  $A_r, B_r, P_r, \varphi_r$  – произвольные постоянные.

Для уравнения (12) решение будем искать в следующем виде:

$$X = e^{\psi x}. \quad (15)$$

Тогда, характеристическое запишем уравнение:

$$\psi^4 - a_z^4 = 0. \quad (16)$$

Корнями этого уравнения будут:

$$\psi_1 = a_z; \psi_2 = -a_z; \psi_3 = ja_z; \psi_4 = -ja_z. \quad (17)$$

Отсюда следует общее решение уравнения (12) :

$$X(x) = A_{r1} e^{a_z x} + A_{r2} e^{-a_z x} + A_{r3} e^{ja_z x} + A_{r4} e^{-ja_z x}. \quad (18)$$

Это решение можно представить как:

$$X(x) = B_{r1} \cos a_z x + B_{r2} \sin a_z x + B_{r3} \operatorname{ch} a_z x + B_{r4} \operatorname{sh} a_z x. \quad (19)$$

Используя функции частот Крылова [6, 7], уравнение (19) имеет вид:

$$X(x) = 2c_{r1} S_z(a_z x) + 2d_{r1} T_z(a_z x) + 2e_{r1} U_z(a_z x) + 2f_{r1} V_z(a_z x), \quad (20)$$

где  $c_{r1}, d_{r1}, e_{r1}, f_{r1}$  – постоянные, определяемые граничными условиями;

$2S_z(a_z x), 2T_z(a_z x), 2U_z(a_z x), 2V_z(a_z x)$  – функции частот, равные:

$$\left. \begin{aligned} 2S_z(a_z x) &= \operatorname{ch}(a_z x) + \cos(a_z x); \\ 2T_z(a_z x) &= \operatorname{sh}(a_z x) + \sin(a_z x); \\ 2U_z(a_z x) &= \operatorname{ch}(a_z x) - \cos(a_z x); \\ 2V_z(a_z x) &= \operatorname{sh}(a_z x) - \sin(a_z x). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Рассмотрим случай, когда отрезок монорельса жестко закреплен с двух сторон. Учитывая начальные условия (7) и (9), имеем:

$$\begin{matrix} (X)_{x=0} \\ (X)_{x=L} \end{matrix} = 0, \quad \begin{matrix} \left(\frac{dX}{dt}\right)_{x=0} \\ \left(\frac{dX}{dt}\right)_{x=L} \end{matrix} = 0. \quad (22)$$

Используя выражение (20), когда  $x = 0$ , получаем  $c_{r1} = 0, d_{r1} = 0$ . Для другого конца отрезка монорельса, когда  $x = L$ , используя свойства круговой замены функций частот [6], можно записать:

$$\begin{cases} e_{r1}U_z(a_zL) + f_{r1}V_z(a_zL) = 0; \\ e_{r1}a_zT_z(a_zL) + f_{r1}U_z(a_zL) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Найдем определитель для этой системы уравнений:

$$\begin{vmatrix} U_z(a_zL) & V_z(a_zL) \\ T_z(a_zL) & U_z(a_zL) \end{vmatrix} = 0. \quad (24)$$

Если раскрыть определитель (24), то характеристическое уравнение имеет вид  $D(a_zL) = 0$ .

Отсюда:

$$\operatorname{ch}\sigma \cos\sigma - 1 = 0, \quad (25)$$

где  $\sigma = a_zL$ .

Уравнение (25) можно представить в виде:

$$\cos\sigma = \frac{1}{\operatorname{ch}\sigma}. \quad (26)$$

Решение уравнения (26) легко получить графически построением каждой из его частей, когда корни  $\sigma_0 = 0; \pm\sigma_1; \pm\sigma_2; \pm\sigma_3 \dots$  устанавливаются точками пересечения кривых. Более точное решение находится с учетом [8]:

$$\sigma_i = (2i - 1)\frac{\pi}{2}, \quad (27)$$

где  $i = 3, 4, 5 \dots$

Тогда для (13) получаем:

$$\omega_i = \frac{\sigma_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho\lambda}}. \quad (28)$$

Для случая, когда отрезок монорельса жестко закреплен только с одной стороны, а с другой подвешен, можно аналогично получить характеристическое уравнение  $B(a_zL) = 0$  и корни уравнения:

$$\sigma_i = (4i - 1)\frac{\pi}{2}. \quad (29)$$

Если отрезок монорельса подвешен за оба конца, то характеристическое уравнение будет  $F(a_z L) = 0$ , а корни уравнения равны  $\sigma_i = \pi i$ .

Следует отметить, что корни  $\sigma_i$  обращают определитель (24) в нуль. Это позволяет из (23) установить отношения:

$$\frac{e_{r1}}{f_{r1}} = -\frac{\operatorname{sh} \sigma - \sin \sigma}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \sigma} = -\frac{\operatorname{ch} \sigma - \cos \sigma}{\operatorname{sh} \sigma - \sin \sigma}. \quad (30)$$

В общем виде:

$$\left. \begin{aligned} e_{r1} &= D(\operatorname{sha}_z L - \sin a_z L); \\ f_{r1} &= -D(\operatorname{cha}_z L - \cos a_z L). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

В выражении (31) можно считать  $D = 1$ , поскольку в решении (9) имеется произвольная постоянная  $P_r$  (14), которая представлена в виде множителя.

На основании этого имеем ряд частных решений (9) для уравнения (5) :

$$z_i(x, t) = X_i P_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) = P_i (\cos \omega_i t - \varphi_i) [(\operatorname{sha}_{z_i} L - \sin a_{z_i} L)(\operatorname{cha}_{z_i} x - \cos a_{z_i} x) - (\operatorname{cha}_{z_i} L - \cos a_{z_i} L)(\operatorname{sha}_{z_i} x - \sin a_{z_i} x)]. \quad (32)$$

Кроме того, для уравнения (5) решением будет:

$$z_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i P_i \cos(\omega_i t - \varphi_i). \quad (33)$$

Здесь важным обстоятельством является то, что нет смысла учитывать отрицательное значение корней  $\sigma_i$ , поскольку для решения (32) нечетности выражения в квадратных скобках устанавливают значения  $z_i$ , как и положительные корни.

Для определения постоянных  $P_i$  и  $\varphi_i$  используем начальное распределение (8).

Запишем уравнение (33) как сумму:

$$z_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) X_i, \quad (34)$$

где

$$P_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \quad \varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{b_i}{a_i}. \quad (35)$$

После подстановки начальных условий (8) в (34) имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i X_i(x) = \varphi_1(x); \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i b_i X_i(x) = \varphi_2(x). \quad (37)$$

Учитывая, что  $X_i(x)$  удовлетворяет соотношению ортогональности [9], то для отрезка монорельса  $[0, L]$  можем записать:

$$\int_0^L X_i(x)X_j(x)dx \begin{cases} = 0 & \text{при } i \neq j; \\ \neq 0 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (38)$$

Для определения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  обе части выражения (36) разложим в ряд Фурье по  $\sin$  и по  $\cos$ . Умножив обе части этого выражения на  $X_j$ , проведя интегрирование в диапазоне  $[0, L]$  и учитывая соотношение (38), когда все члены ряда, за исключением одного, у которого  $i = j$ , имеем:

$$a_i = \frac{\int_0^L \varphi_1(x)X_i(x)dx}{\int_0^L X_i^2(x)dx}; \quad b_i = \frac{\int_0^L \varphi_2(x)X_i(x)dx}{\omega_i \int_0^L X_i^2(x)dx}.$$

На основании (34) найденные коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  позволяют получить окончательное решение уравнения свободных поперечных колебаний монорельса для заданных начальных и конечных условий.

## ВЫВОДЫ

Полученные зависимости, устанавливающие взаимосвязь между поперечными колебаниями монорельсового пути и условиями его крепления будут использоваться для обоснованного выбора параметров шахтных монорельсовых дорог. В дальнейшем планируется провести теоретические исследования движения подвесной монорельсовой дороги с учетом колебаний монорельса и подвижного состава.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Введение в теорию устойчивости колесных экипажей и рельсового пути : монография / В. Г. Вербицкий, А. Новак, Э. Даниленко, М. Ситаж. – Донецк : Вебер, 2007. – 255 с.
2. Иванченко И. И. Метод подконструкций в задачах динамики скоростной монорельсовой дороги / И. И. Иванченко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 6. – С. 101–117.
3. Расцветаев В. А. Особенности формирования дополнительных нагрузок на арочную крепь участковых выработок с подвесными монорельсовыми дорогами / В. А. Расцветаев // Науковий вісник НГУ. – 2011. – № 4. – С. 35–38.
4. Кузнецов Е. В. Опыт эксплуатации подвесной монорельсовой дороги в условиях шахты ОАО «Разрез Сибиргинский» / Е. В. Кузнецов // Вестник КузГТУ. – 2005. – № 4. – С. 24–26.
5. Иориси Ю. И. Виброметрия. Измерение вибрации и ударов. Общая теория, методы и приборы / Ю. И. Иориси. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиз, 1963. – 771 с.
6. Шевченко Ф. Л. Динамика упругих стержневых систем / Ф. Л. Шевченко. – Донецк : ООО «Лебедь», 1999. – 268 с.
7. Шевченко Ф. Л. Упрощенный расчет стержневых систем ступенчато-переменного сечения на продольные колебания как систем с распределенными параметрами / Ф. Л. Шевченко // Наукові праці ДонНТУ. – Донецьк: ДонНТУ. – 2008. – Вип. 5(139). – С. 166–179. – (Серія: «Машинобудування і машинознавство»).
8. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей) Теория звука. В 2 т. Т. 1 / Дж. В. Стретт. – М. : ГИТТЛ, 1955. – 503 с.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. В 5 т. Т. 2 / В. И. Смирнов. – М. : Наука, 1974. – 656 с.

Статья поступила в редакцию 20.06.2013 г.