УДК 621.3(07)

Федоров М. М., Ткаченко А. А., Шелехова О. Г.

ОСОБЕННОСТИ СОСТАВЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

При оценке переходных процессов в разветвленных электрических цепях важную роль играет составление характеристического уравнения и анализ его корней.

Используемые в настоящее время методы составления характеристических уравнений [1–3], основанные на использовании системы дифференциальных уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа, громоздки, и требуют повышенного числа вычислительных операций [3], что усложняет математический анализ и расчет режимов электрической цепи. Поэтому разработка алгоритмов, базирующихся на более упрощенных методах расчета, к числу которых следует отнести составление характеристических уравнений, остается актуальной.

Цель работы – разработка упрощенных алгоритмов составления характеристических уравнений электрических цепей.

Рассмотрим алгоритм составления характеристического уравнения на конкретном примере. На рис. 1 приведена электрическая схема, содержащая 6 ветвей, 4 узла, источники напряжения и тока. Приведенное состояние цепи соответствует послекоммутационному режиму.

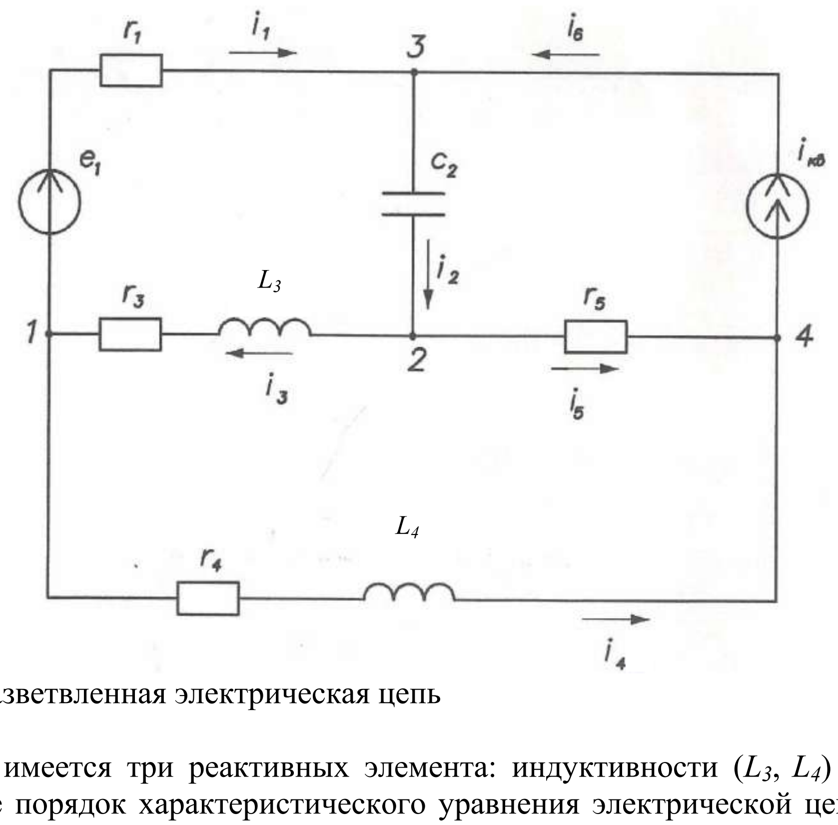

Рис. 1. Разветвленная электрическая цепь

В схеме имеется три реактивных элемента: индуктивности (L_3, L_4) и емкость (C_2). В общем случае порядок характеристического уравнения электрической цепи определяется количеством реактивных элементов электрической цепи исключение составляют цепи, содержащие индуктивные сечения и емкостные контуры.

Таким образом, для рассматриваемой схемы порядок характеристического уравнения должен быть равным трем. Система дифференциальных уравнений, составленная по первому и второму законам Кирхгофа, для рассматриваемой цепи имеет вид (1).

$$\begin{cases} i_1 + i_4 - i_3 = 0, \\ i_4 + i_5 - i_{k6} = 0, \\ i_{k6} + i_1 - i_2 = 0, \\ i_4 \cdot r_4 + \mathrm{L}_4 \cdot \dfrac{di_4}{dt} + i_3 \cdot r_3 + \mathrm{L}_3 \cdot \dfrac{di_3}{dt} - i_5 \cdot r_5 = 0, \\ i_1 \cdot r_1 + \dfrac{1}{C_2} \int i_2 dt + \mathrm{L}_3 \cdot \dfrac{di_3}{dt} + i_3 \cdot r_3 = e_1. \end{cases} \quad (1)$$

Составим систему дифференциальных уравнений для свободных составляющих токов. Учитывая, что свободные составляющие токов не зависят от внешних сил, то напряжения и токи источников питания принимаются равными нулю. Тогда система уравнений для свободных составляющих имеет вид:

$$\begin{cases} i_{1св} + i_{4св} - i_{3св} = 0, \\ i_{4св} + i_{5св} = 0, \\ i_{1св} - i_{2св} = 0, \\ i_{4св} \cdot r_4 + \mathrm{L}_4 \cdot \dfrac{di_{4св}}{dt} + i_{3св} \cdot r_3 - i_{5св} \cdot r_5 + \mathrm{L}_3 \cdot \dfrac{di_{3св}}{dt} = 0, \\ i_{1св} \cdot r_1 + \dfrac{1}{C_2} \int i_{2св} dt + \mathrm{L}_3 \cdot \dfrac{di_{3св}}{dt} + i_{3св} \cdot r_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Принимая во внимание, что ток свободной составляющей произвольной k-ой ветви равен:

$$i_{к\,св} = \mathrm{A}_{к} \cdot e^{p_k t}. \quad (3)$$

Напряжения на индуктивностях и емкостях соответственно равны:

$$u_{L\,св} = \mathrm{L}_{к} \cdot \frac{di}{dt} = \mathrm{L}_{к} \cdot p \cdot e^{p_k t} = \mathrm{L}_{к} \cdot p \cdot i_{L\,св}. \quad (4)$$

$$u_{c\,св} = \frac{1}{C_k} \int i_c \cdot dt = \frac{1}{C_k \cdot p} \cdot A_k \cdot e^{p_k t} = \frac{1}{C_k \cdot p} \cdot i_{k\,св}. \quad (5)$$

Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} i_{1св} + i_{4св} - i_{3св} = 0, \\ i_{4св} + i_{5св} = 0, \\ i_{1св} - i_{2св} = 0, \\ i_{4св} \cdot r_4 + \mathrm{L}_4 p \cdot i_{4св} + i_{3св} \cdot r_3 - i_{5св} \cdot r_5 + \mathrm{L}_3 p \cdot i_{3св} = 0, \\ i_{1св} \cdot r_1 + \dfrac{1}{C_2 p} \cdot i_{2св} + \mathrm{L}_3 p \cdot i_{3св} + i_{3св} \cdot r_3 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Полученной системе дифференциальных уравнений соответствует схема (рис. 2).

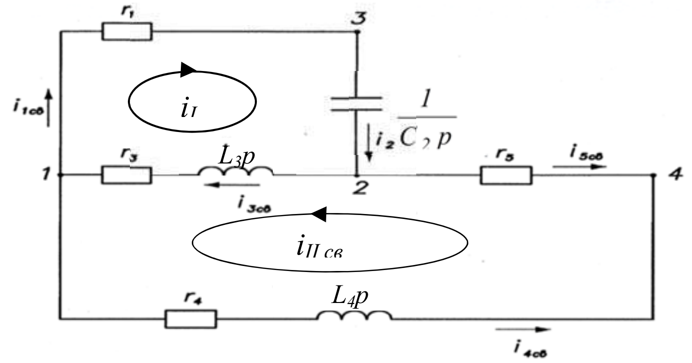

Рис. 2. Расчетная схема для определения свободных составляющих

Определитель полученной системы (6) имеет вид:

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & \dfrac{1}{pC_2} & r_3+pL_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3+pL_3 & r_4+pL_4 & -r_5 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Примем во внимание, что $i_{1св}=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $i_{2св}=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $i_{3св}=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ и т. д., а правая часть равна нулю, тогда $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=...=0$. Следовательно, $\Delta(p)$ должно быть равным нулю, в противном случае свободные составляющие токов были бы равными нулю. Поскольку свободные составляющие не могут равняться нулю, и $\Delta(p)=0$ является характеристическим уравнением системы. Порядок определителя равен количеству уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа, поэтому порядок определителя для рассматриваемого примера равен пяти. После раскрытия определителя было получено характеристическое уравнение в виде полинома третьего порядка:

$$p^3L_4L_3C_2+\mathrm{p}^2C_2(r_1L_3+r_1L_4+r_5L_3+r_4L_3+r_3L_4)+$$
$$+pC_2(r_1r_3+r_1r_4\ r_1r_5+r_5r_3+r_4r_3+\frac{L_4+L_3}{C_2})+r_3+r_4+r_5)=0. \quad (8)$$

Раскрытие подобного определителя пятого порядка достаточно трудоемко. Рассмотрим алгоритмы составления характеристических уравнений, основанных на различных методах, базирующихся на законах Кирхгофа с целью получения характеристического определителя более низкого порядка.

Используя метод контурных токов для схемы (рис. 2) имеем систему:

$$\begin{cases} i_{Icc}\cdot(r_1+\dfrac{1}{C_2p}+r_3+pL_3)-i_{IIcI}\cdot(r_3+pL_3)=0; \\ i_{IIcI}\cdot(r_3+pL_3+r_4+pL_4+r_5)-i_{Icc}\cdot(r_3+pL_3)=0. \end{cases}$$

Полученной системе уравнений соответствует определитель:

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} r_1+r_3+\mathrm{pL}_3+\dfrac{1}{\mathrm{pC}_3} & -r_3-\mathrm{pL}_3 \\ -\mathrm{r}_3-\mathrm{pL}_3 & r_3+r_4+r_5+\mathrm{pL}_3+\mathrm{pL}_4 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Принимая во внимание, что свободные составляющие контурных токов не равны нулю, характеристическое уравнение также имеет вид:

$$p^3 L_4 L_3 C_2 + \mathrm{p}^2 C_2 (r_1 L_3 + r_1 L_4 + r_5 L_3 + r_4 L_3 + r_3 L_4) + \mathrm{pC_2}(\mathrm{r_1 r_3 + r_1 r_4} + \\ + r_1 r_5 + r_5 r_3 + r_4 r_3 + \frac{L_4 + L_3}{C_2}) + r_3 + r_4 + r_5) = 0. \quad (10)$$

После раскрытия определителя, полученного на основании системы дифференциальных уравнений с использованием метода контурных токов, получен тот же результат, что и для системы дифференциальных уравнений, записанных на основании законов Кирхгофа. Однако, раскрытие определителя существенно упростилось за счет снижения его порядка.

Таким образом, использование метода контурных токов для получения характеристического определителя позволяет сократить его порядок до числа уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа.

Составим характеристическое уравнения с использованием метода узловых потенциалов. В схеме (рис. 2) для свободных составляющих два узла, поэтому, принимая потенциал второго узла равным нулю, получим:

$$\phi_{1\,\text{св}} \cdot \left(\frac{1}{r_1 + \frac{1}{\mathrm{C}_2 p}} + \frac{1}{r_4 + \mathrm{r}_5 + \mathrm{pL}_4} + \frac{1}{\mathrm{r}_3 + \mathrm{pL}_3} \right) = 0 \,. \quad (11)$$

Учитывая, что $\varphi_{1\,cc} \neq 0$, выражение в скобках представляет собой характеристическое уравнение. После приведения подобных характеристическое уравнение принимает вид:

$$p^3 L_4 L_3 C_2 + p^2 C_2 (r_1 L_3 + r_1 L_4 + r_5 L_3 + r_4 L_3 + r_3 L_4) + p C_2 (r_1 r_3 + r_1 r_4 + \\ r_1 r_5 + r_5 r_3 + r_4 r_3 + \frac{L_4 + L_3}{C_2}) + r_3 r_4 + r_5) = 0. \quad (12)$$

Сравнивая характеристические уравнения (8), (10) и (12), убеждаемся в их полной идентичности.

Использование метода узловых потенциалов для получения характеристического определителя позволяет сократить его порядок до числа уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа.

ВЫВОДЫ

Использование приведенных алгоритмов, основанных на использовании методов контурных токов и узловых потенциалов, позволяет существенно упростить получение характеристического уравнения сложной цепи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов . – М. : Гардарики, 2007. – 701 с.*
2. *Рыбалко Н. Л. Перехідні процеси в лінійних електричних колах із зосередженими параметрами : навч. посіб. / Н. Л. Рыбалко, В. О. Есауленко. – Донецьк : ДонНТУ, 1999. – 172 с.*
3. *Теоретические основы электротехники : учебник для вузов. В 3-х т. Том 2. / К. С. Демирчан, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – 4-е изд. – СПб. : Питер, 2003. – 576 с.*

Статья поступила в редакцию 19.09.2013 г.