

УДК 534: 621.031

Човнюк Ю. В., Діктерук М. Г., Почка К. І., Кравчук В. Т.

ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН ЗА ДОПОМОГОЮ АМПЛІТУДНО-ФАЗОВИХ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для теоретичного та експериментального дослідження динаміки резонансних та біля резонансних систем з кількома ступенями вільності руху, систем з розподіленими параметрами, а також складних змішаних пружних систем останнім часом отримує широке розповсюдження метод частотного аналізу з використанням амплітудно-фазових частотних характеристик (АФЧХ) реакції пружної системи на гармонічний силовий вплив, що замінює реальні зовнішні сили збудження.

Знання АФЧХ для різних точок пружної системи вібраційної машини дозволяє встановити небезпечно з точки зору руйнування місце конструкції, а також може бути використане при аналізі стабільності робочого режиму для цілого ряду вібраційних машин.

Метод побудови АФЧХ вперше був використаний для аналізу динаміки систем при дослідженні конструкцій літака в роботі [1], а у роботі Банах Л. Я. [2] – для дослідження динамічних властивостей резонансних вібротехнічних машин. Цей метод може також бути використаний для дослідження динаміки вібраційних машин типу резонансних машин, що вивчають втому матеріалів, конструкцій, електродинамічних вібраторів та ряду вібротехнічних технологічного призначення (віброгрохотів, віброживильників і тому подібне). У випадку нелінійних вібротехнічних систем можна застосувати підходи робіт [3–5].

Результати цитованих вище досліджень будуть використані у даній роботі.

Мета даної роботи полягає у встановленні АФЧХ систем з одним ступенем вільності руху з нелінійною силою тертя методами гармонічної лінеаризації та чисельними – на ПЕОМ.

1. Метод АФЧХ для динамічних моделей вібраційних машин з лінійною дисипацією.

АФЧХ будується на комплексній площині і представляє собою геометричне місце кінців вектора динамічної піддатливості e при зміні частоти від 0 до ∞ . Напрямок вимушеної сили (або сили збудження) співпадає з віссю абсцис, вздовж якої відкладається дійсна частина динамічної піддатливості ($Re e$); вздовж осі ординат відкладається її уявна частина ($Im e$). Біля деяких точок характеристики наносять значення відповідних їм частот. Таким чином, АФЧХ дає можливість наочно представляти співвідношення амплітуд вхідної і вихідної величин та зсув фаз між ними.

АФЧХ у точці збудження пружної системи вібраційної машини відповідає диференціальному рівнянню руху виду:

$$f(\ddot{x}_1, \dot{x}_1, x_1, \dots, \ddot{x}_n, \dot{x}_n, x_n) = P \cdot \sin \omega \cdot t, \quad (1)$$

де $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$; $\ddot{x}_i = \frac{d^2x_i}{dt^2}$; $i = \overline{(1, n)}$; t – час; P – амплітуда; ω – кругова частота вимушеної

сили. Рівняння (1) виникає при динамічному аналізі систем, що мають n ступенів вільності руху.

Амплітуда реакції залежить не тільки від динамічних характеристик системи, але також від амплітуди, місця прикладання та частоти вимушеної сили. При аналізі динамічних характеристик зручно розглядати динамічну піддатливість системи, тобто відношення амплітуди реакції до амплітуди вимушеної сили. Це зв'язано з тим, що у більшості промислових випробувань вимірювання сили спряжене з великими труднощами і воно може бути суттєво спрощене шляхом підтримки амплітуди сили постійною та шляхом вимірювання амплітуди реакції системи.

Якщо амплітуда та фаза реакції системи визначаються у точці збудження, тоді, зазвичай, динамічну піддатливість називають головною. Якщо у складній пружній системі, що складається з n мас, або у системі з розподіленими параметрами амплітуда та фаза реакції системи визначаються не у точці збудження, тоді динамічну піддатливість називають побічною [2].

Розглянемо типові АФЧХ для низки динамічних моделей деяких типів вібраційних машин. Найпростіша одно масова модель з інерційним вібратором описується лінійним диференціальним рівнянням:

$$m \cdot \ddot{x} + 2 \cdot b \cdot \dot{x} + c \cdot x = P_0 \cdot \omega^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}; \quad i^2 = -1, \quad (2)$$

де m – маса; c – жорсткість; x – координата; $2 \cdot b$ – коефіцієнт в'язкого тертя; $P_0 \cdot \omega^2$ – амплітуда вимушеної сили інерційного вібратора.

АФЧХ такої системи при зміні частоти збудження ω у невеликому діапазоні поблизу резонансної частоти ω_0 та при малих коефіцієнтах дисипації (в'язке тертя) представляє собою кола [3], розміщені симетрично відносно уявної вісі (рис. 1). При резонансі зсів фази дорівнює $\pi/2$, а амплітуда пропорційна резонансному діаметру, причому $|OA| = \frac{1}{2 \cdot b \cdot \sqrt{c/m}}$; крім того,

у момент резонансу похідна $\frac{d\varphi}{d\omega}$ має максимум (φ – фазовий кут між силою збудження та переміщенням).

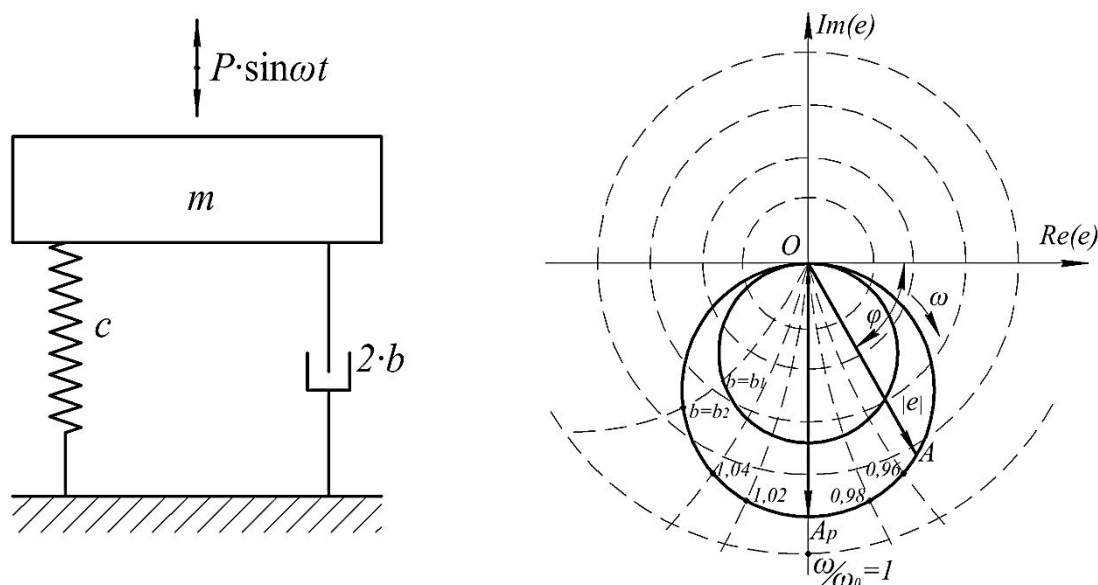


Рис. 1. Одномасова динамічна модель вібраційної машини та її АФЧХ:

$\omega_0 = \sqrt{c/m}$ – резонансна частота; $b_2 > b_1$

Динамічна піддатливість e системи, що описується рівнянням (2), має вид:

$$e = \frac{x_0}{P_0 \cdot \omega^2} = \frac{1}{(-m \cdot \omega^2 + c) + i \cdot 2 \cdot b \cdot \omega} = X + i \cdot Y; \quad (3)$$

$$X = \text{Re}(e) = \frac{(c - m \cdot \omega^2)}{(c - m \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot b \cdot \omega)^2}; \quad Y = \text{Im}(e) = \frac{-2 \cdot b \cdot \omega}{(c - m \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot b \cdot \omega)^2}; \quad (4)$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{(-2 \cdot b \cdot \omega)}{(c - m \cdot \omega^2)} \Leftrightarrow \varphi = \text{arctg} \left(\frac{-2 \cdot b \cdot \omega}{(c - m \cdot \omega^2)} \right). \quad (5)$$

З (3)–(5) випливає:

$$X^2 + Y^2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{(c - m \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot b \cdot \omega)^2}} \right\}^2. \quad (6)$$

Крім того, для модуля e маємо:

$$|e| = \frac{1}{\sqrt{(c - m \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot b \cdot \omega)^2}}. \quad (7)$$

Аналогічно можна показати, що й для одно масової моделі вібраційної машини з гістерезисним демпфуванням, рівняння якої має вид:

$$m \cdot \ddot{x} + \frac{2 \cdot b}{\omega} \cdot \dot{x} + c \cdot x = P_0 \cdot \omega^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}, \quad (8)$$

АФЧХ також є колом, як і (6). Рівняння її (АФЧХ) для рівняння (8) має наступний вигляд:

$$\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{(c - m \cdot \omega^2)^2 + \left(\frac{2 \cdot b}{\omega} \cdot \omega\right)^2}} \right\}^2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{(c - m \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot b)^2}} \right\}^2, \quad (9)$$

де

$$\tilde{X} = \operatorname{Re}(\tilde{e}) = \frac{(c - m \cdot \omega^2)}{(c - m \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot b)^2}; \quad \tilde{Y} = \operatorname{Im}(\tilde{e}) = \frac{-2 \cdot b}{(c - m \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot b)^2}; \quad (10)$$

$$\tilde{\varphi} = \operatorname{arctg}\left\{ \frac{2 \cdot b}{m \cdot \omega^2 - c} \right\}; \quad |\tilde{e}| = \frac{1}{\sqrt{(c - m \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot b)^2}}. \quad (11)$$

Аналіз експериментальних АФЧХ реальних більш складних динамічних систем вібраційних машин показує, що у деяких випадках характеристики мають овальну форму і зміщені відносно уявної вісі. Це свідчить про те, що у системі діють деякі додаткові фактори, наприклад, має місце нелінійне демпфування, нелінійна пружність, приєднані маси, зв'язок окремих елементів конструкції між собою.

Для аналізу цих залежностей були розглянуті деякі прості математичні моделі та були побудовані для них відповідно АФЧХ.

2. Метод гармонічної лінеаризації для визначення АФЧХ системи з одним ступенем вільності руху та нелінійною силою тертя.

Приймаємо, що вираз для нелінійної сили тертя має наступний вигляд:

$$F(\dot{x}) = H \cdot \frac{\dot{x}^{n+1}}{|\dot{x}|}. \quad (12)$$

При $n = 0$ отримаємо кулонове тертя; $n = 1$ – лінійне в'язке тертя; $n = 2$ – квадратичне тертя.

2.1. Кулонове тертя. У цьому випадку рівняння руху має вид:

$$m \cdot \ddot{x} + 2 \cdot b \cdot \dot{x} + c \cdot x + H \cdot \operatorname{sign}(\dot{x}) = P \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (13)$$

або у безрозмірних координатах:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + 2 \cdot \xi \cdot \frac{d\bar{x}}{d\tau} + \bar{x} + h \cdot \operatorname{sign}\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right) = e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot \tau}, \quad (14)$$

де $\tau = \omega_0 \cdot t$; $\omega_0 = \sqrt{c/m}$; $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$; $h = H/P$; $\xi = b/(2 \cdot \omega_0 \cdot m)$.

Коефіцієнт підсилення:

$$\bar{e} = \frac{x_0}{x_{cm}} = \frac{x_0 \cdot c}{P}, \quad (15)$$

де $x_{cm} = P/c$ – статичне переміщення системи.

Дослідимо рівняння (14) методом гармонічної лінеаризації [5], вважаючи його розв'язок наступним:

$$\bar{x} = \bar{e} \cdot e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot \tau}. \quad (16)$$

При цьому отримуємо наступні рівняння для \bar{e} та фази $\varphi = \arg \bar{e}$:

$$\bar{e}^2 \cdot (1 - \bar{\omega}^2)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \bar{e} \cdot \bar{\omega} + \frac{4 \cdot h}{\pi} \right)^2 = 1; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\left(2 \cdot \xi \cdot \bar{e} \cdot \bar{\omega} + \frac{4 \cdot h}{\pi} \right)}{\bar{e} \cdot (1 - \bar{\omega}^2)}. \quad (17)$$

З першого рівняння (17) визначаємо \bar{e} :

$$\bar{e} = \frac{-16 \cdot \xi \cdot \bar{\omega} \cdot \frac{h}{\pi} + \left\{ 256 \cdot \xi^2 \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \frac{h^2}{\pi^2} + 4 \cdot \left[(1 - \bar{\omega}^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \bar{\omega}^2 \right] \cdot \left(1 - \frac{16 \cdot h^2}{\pi^2} \right) \right\}^{1/2}}{2 \cdot \left[(1 - \bar{\omega}^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \bar{\omega}^2 \right]}, \quad (18)$$

тоді з другого рівняння (17) із врахуванням (18) маємо:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\left(2 \cdot \xi \cdot \bar{e} \cdot \bar{\omega} + \frac{4 \cdot h}{\pi} \right)}{\bar{e} \cdot (1 - \bar{\omega}^2)}. \quad (19)$$

У (18) та (19) вважаємо, що $\frac{16 \cdot h^2}{\pi^2} < 1$.

АФЧХ, побудована за рівняннями (18) та (19) при $h = 0,2$; $\xi = 0,15$, зображена на рис. 2 (крива 1). Тут також для порівняння наведена АФЧХ лінійної системи при $h = 0$; $\xi = 0,15$ (крива 2). Таким чином, наявність сухого тертя зменшує амплітуду коливань і змінює форму АФЧХ, яка приймає вид еліпса з великою піввіссю, розміщеною на уявній вісі. Точка резонансу A_1 лежить на уявній піввісі, причому величина резонансного діаметру визначається формулою:

$$OA_1 = \frac{1}{\left(2 \cdot \xi \cdot \bar{e} \cdot \bar{\omega} + \frac{4 \cdot h}{\pi} \right)}. \quad (20)$$

2.2. Квадратичне тертя. Рівняння руху у цьому випадку має вид:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + 2 \cdot \xi \cdot \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 + \bar{x} = e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot \tau}. \quad (21)$$

За допомогою методу гармонічної лінеаризації отримаємо:

$$\bar{\omega}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{\bar{e}^2} - \bar{e}^2 \cdot v^2 + v^2}}{1 + \bar{e}^2 \cdot v^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v \cdot \bar{e} \cdot \bar{\omega}^2}{(1 - \bar{\omega}^2)}; \quad v = \frac{16}{3 \cdot \pi} \cdot \xi. \quad (22)$$

АФЧХ, побудована за формулами (22) при $\xi = 0,04$ має вид еліпсу з великою піввіссю, паралельною дійсній вісі (крива 3 на рис. 2). Резонансна точка розміщена на уявній піввісі.

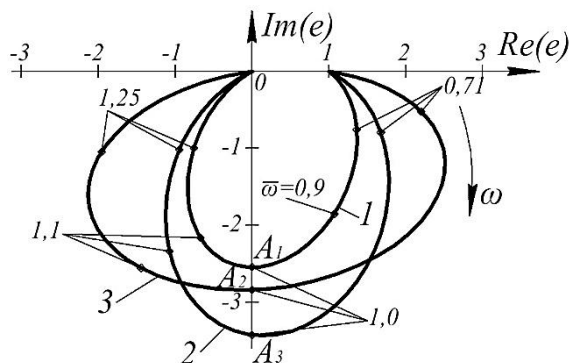


Рис. 2. АФЧХ одномасових систем при різних типах демпфування: 1 – кулонове тертя; 2 – лінійне демпфування; 3 – квадратичне демпфування

3. Чисельний аналіз на ПЕОМ та визначення АФЧХ системи з одним ступенем вільності руху та нелінійною силою тертя (в'язке + «сухе» тертя за Кулоном).

Рівняння (14) було розв'язано чисельно на ПЕОМ за допомогою стандартної програми «VISIM». Нижче, на рис. 3 та 4 наведені залежності: $\bar{x}(\tau)$, $\bar{x}_\tau(\tau)$, $\bar{x}_{\tau\tau}(\tau)$, фазові портрети (\bar{x}, \bar{x}_τ) , $(\bar{x}_\tau, \bar{x}_{\tau\tau})$ та $(\bar{x}, \bar{x}_{\tau\tau})$ для різних значень параметрів $\bar{\omega}$ та h . При цьому $\xi = 0,15$. Амплітудно-частотна характеристика для кожного варіанту розрахунку розглянута на площині $(\text{Re}(\bar{e}), \text{Im}(\bar{e}))$ і зображена на рис. 5. Фазочастотна характеристика системи подана для деяких варіантів розрахунків у табличній формі (табл. 1–5).

В цілому результати чисельного аналізу на ПЕОМ АФЧХ співпадають з отриманими аналітично при використанні методу гармонічної лінеаризації.

Слід зазначити, що при деякому значенні h (при $\xi = const$), тобто величині (амплітуді) сухого тертя (близькій до $h \approx \pi/4$) виникає різка зміна (поворот за годинниковою стрілкою) АФЧХ системи. Це означає, що її піддатливість різко змінюється, коли h стає більшою деякого значення $h^* \approx 0,8 - 0,9$.

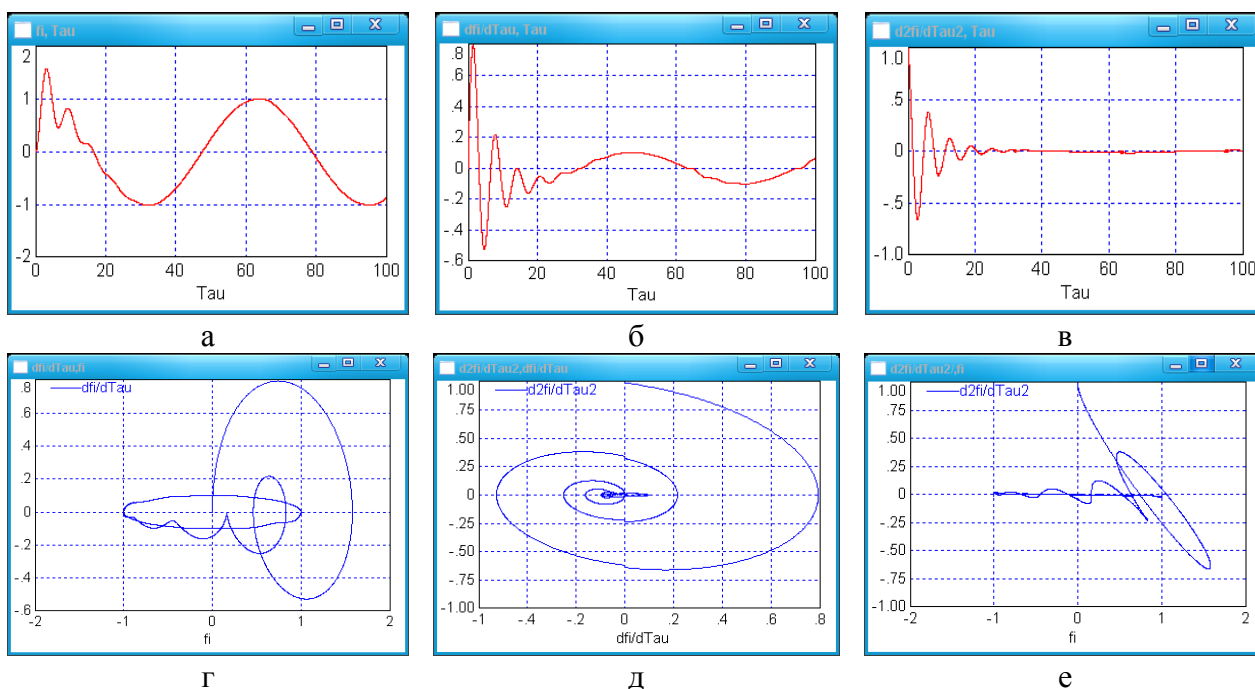


Рис. 3. Графічні залежності при наступних параметрах $h = 0,01$; $\xi = 0,15$; $\bar{\omega} = 0,1$: а – $\bar{x}(\tau)$; б – $\bar{x}_\tau(\tau)$; в – $\bar{x}_{\tau\tau}(\tau)$; г – (\bar{x}, \bar{x}_τ) ; д – $(\bar{x}_\tau, \bar{x}_{\tau\tau})$; е – $(\bar{x}, \bar{x}_{\tau\tau})$

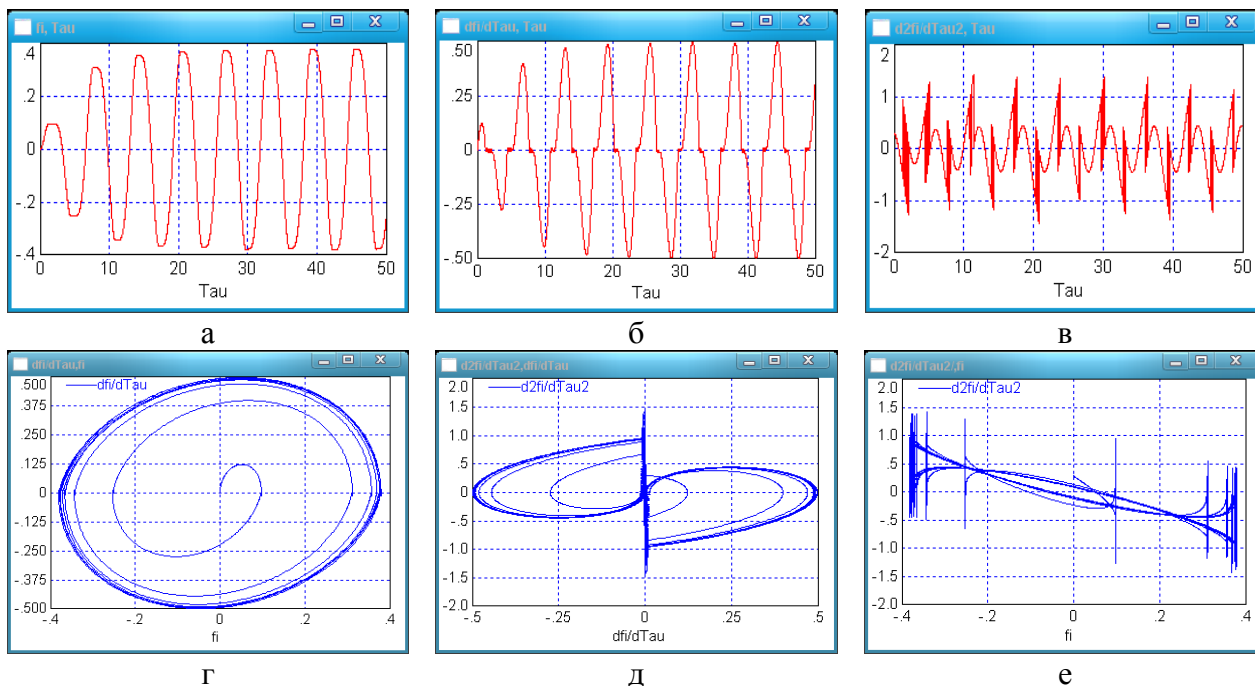


Рис. 4. Графічні залежності при наступних параметрах $h = 0,7$; $\xi = 0,15$; $\bar{\omega} = 1$:
 а – $\bar{x}(\tau)$; б – $\bar{x}_\tau(\tau)$; в – $\bar{x}_{\tau\tau}(\tau)$; г – (\bar{x}, \bar{x}_τ) ; д – $(\bar{x}_\tau, \bar{x}_{\tau\tau})$; е – $(\bar{x}, \bar{x}_{\tau\tau})$

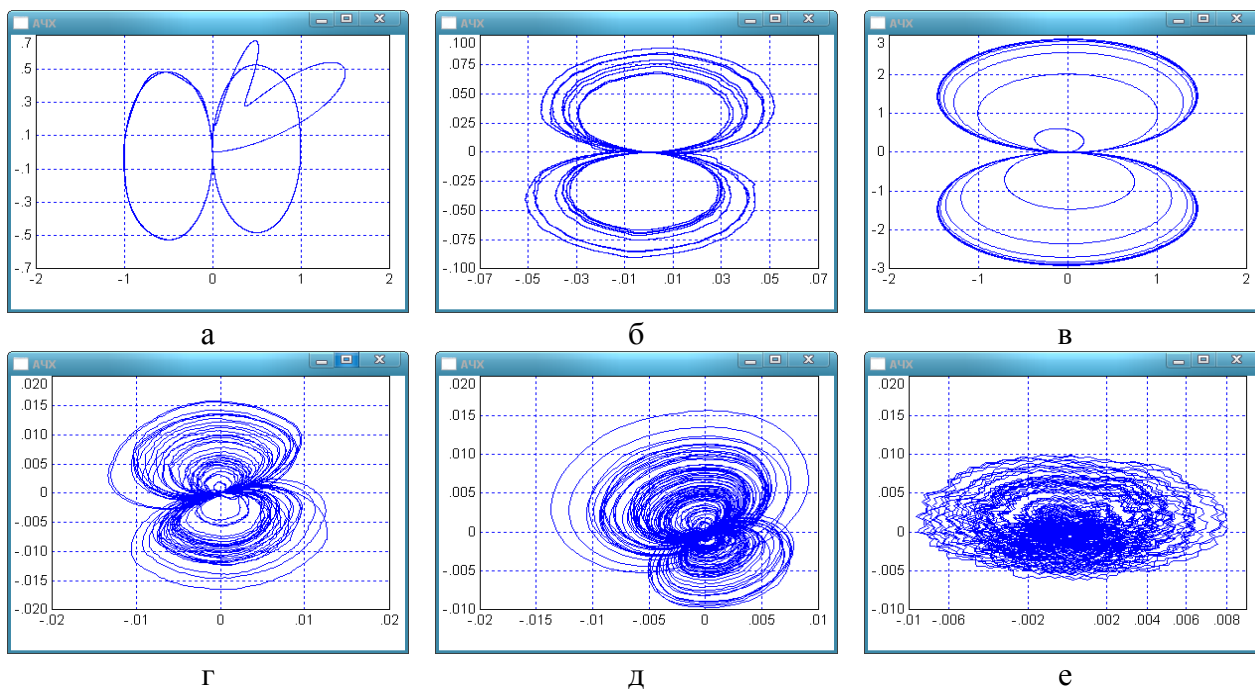


Рис. 5. Амплітудно-частотні характеристики вібраційної системи при різних параметрах:
 а – $h = 0,01$; $\xi = 0,15$; $\bar{\omega} = 0,1$; б – $h = 1$; $\xi = 0,15$; $\bar{\omega} = 0,1$; в – $h = 0,1$; $\xi = 0,15$; $\bar{\omega} = 1$;
 г – $h = 0,9$; $\xi = 0,15$; $\bar{\omega} = 2$; д – $h = 0,8$; $\xi = 0,15$; $\bar{\omega} = 5$; е – $h = 5$; $\xi = 0,15$; $\bar{\omega} = 5$

Таблиця 1

Фазочастотна характеристика системи при $h = 0,01$ та $\xi = 0,15$

$\bar{\omega}$	0,1	0,5	0,8	0,9	0,99	2,0	5,0	10,0
\bar{x}	0,04431	0,217593	0,601726	0,969952	1,50562	0,208796	0,136435	0,035247

Таблиця 2

Фазочастотна характеристика системи при $h = 0,1$ та $\xi = 0,15$

$\bar{\omega}$	0,1	0,5	0,8	0,9	0,99	2,0	5,0	10,0
\bar{x}	0,15587	0,436388	0,728416	1,07523	1,5194	1,5194	0,502387	0,239219

Таблиця 3

Фазочастотна характеристика системи при $h = 0,8$ та $\xi = 0,15$

$\bar{\omega}$	0,1	0,5	0,8	0,9	0,99	2,0	5,0	10,0
\bar{x}	1,24454	1,50076	1,51673	1,54631	1,56904	1,27569	0,570832	0,584418

Таблиця 4

Фазочастотна характеристика системи при $h = 1,0$ та $\xi = 0,15$

$\bar{\omega}$	0,1	0,5	0,8	0,9	0,99	2,0	5,0	10,0
\bar{x}	1,32096	1,52418	1,56283	1,55532	1,56989	1,47061	1,4947	0,745645

Таблиця 5

Фазочастотна характеристика системи при $h = 5,0$ та $\xi = 0,15$

$\bar{\omega}$	0,1	0,5	0,8	0,9	0,99	2,0	5,0	10,0
\bar{x}	1,49713	1,5623	1,56891	1,56892	1,57018	1,54119	1,47446	0,829338

ВИСНОВКИ

1. Проведений амплітудно-частотний та фазочастотний аналіз характеристик руху вібраційних машин за наявності лінійного (в'язкого) та нелінійного («сухого» за кулоном, квадратичного) тертя у системі аналітичними методами (метод гармонічної лінеаризації) та чисельними методами на ПЕОМ. Встановлені основні особливості трансформації АФЧХ при зміні сил нелінійного тертя у розглядуваній системі.

2. Отримані у роботі результати можуть у подальшому бути використані для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку машин вібраційної дії як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах їх реальної експлуатації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Kennedu C. C., Ranku C. D. P. // *Journal of aeronautical science*. – 1947. – V. 14.
2. Банах Л. Я. Исследование динамических свойств резонансных вибромашин с помощью амплитудно-фазовых частотных характеристик / Л. Я. Банах, М. Д. Перминов // «Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах»: сборник научных работ. – М. : Наука, 1972. – С. 209–216.
3. Bishop R. E. D., Pendered I. W. // *Journal of mechanical engineering science*. – 1963. – V. 5. – No. 4.
4. Вибрационная техника. Материалы научно-технической конференции. – М. : НИИИНСТРОЙДОР-КОММУНМАШ, 1966.
5. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер. – М. : ИЛ, 1961. – 500 с.