

УДК 621.34

Подлесный С. В., Стадник А. Н., Ларичкин А. В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Электрические двигатели, генераторы, неконтактные (электромагнитные, электростатические) подвесы твердого тела, электроизмерительные приборы представляют различные примеры электромеханических систем находящих широкое применение во многих областях техники. Для рационального конструирования и последующего анализа свойств таких систем современная инженерная практика требует создания корректных математических моделей, которые должны содержать дифференциальные уравнения механического движения, а также уравнения электромагнитных процессов. Для составления уравнений электромеханических систем весьма удобным является аппарат аналитической механики, в котором электромагнитные и механические величины, характеризующие систему, фигурируют как формально равноправные и уравнения движения получаются при помощи лагранжева формализма.

В данной статье рассматриваются электромеханические системы, для описания динамики которых можно использовать конечномерные модели, т. е. модели, требующие задания конечного числа независимых механических и электрических параметров. Главное внимание обращается на этап составления замкнутой системы дифференциальных уравнений движения электромеханической системы. Используется электромеханическая аналогия сила – напряжение. Приводится ряд примеров анализа конкретных электромеханических систем, а именно – акселерометров и сейсмографов.

Основой проведения исследований является математическое моделирование, которое, используя современные достижения вычислительной техники, дает возможность заменить изучение сложного электромеханического преобразователя энергии относительно простой для практической реализации моделью.

Рассмотрению данного вопроса уделялось и уделяется достаточно большое внимание [1–6]. Само моделирование осуществлялось с использованием различных пакетов прикладных программ (ППП), таких как Simulink (среды MATLAB), Mathcad, MAPC и др. Однако, имеется широкое разнообразие типов электромеханических систем и подходов к моделированию их работы. Использованию одному из подходов для моделирования работы одного из типов электромеханических систем и посвящена предлагаемая работа.

Целью работы является создание и исследование с помощью математических моделей электромеханических систем акселерометров и сейсмографов в среде Mathcad.

Рассмотрим динамику сейсмометра (рис. 1). К основанию сейсмометра с индукционным преобразователем прикреплен катушка из n витков радиуса r , соединенная с электрической регистрирующей системой, схематизируемой цепью с самоиндукцией L и сопротивлением R . Магнитный сердечник, создающий радиальное магнитное поле, характеризуемое в зазоре магнитной индукцией B , опирается на основание с помощью пружин общей жесткости c . На сердечник так же действует сила сопротивления, пропорциональная его скорости, вызываемая демпфером, создающим силу сопротивления $\beta\dot{x}$. Основание сейсмометра совершает малые вертикальные колебания по закону $\xi = \xi_0 \sin \omega t$. Обобщенные силы, отвечающие взаимодействию катушки и магнита даются формулами $Q_q = -2\pi n B \dot{x}$, $Q_x = 2\pi n B \dot{q}$ (Q_q – электродвижущая сила, индуцированная в электрической цепи, а Q_x – сила взаимодействия катушки с магнитом).

Электромеханическая система, состоящая из подвижного якоря, совершающего поступательное движение, постоянного магнита и электромагнитного механизма, имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x – перемещение якоря, определяет положение подвижной части механизма, q (электрический заряд) – обобщенная координата, которая фиксирует состояние электрической части цепи (рис. 2).

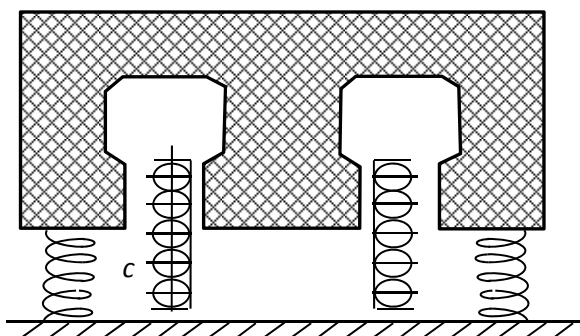


Рис. 1. Динамика сейсмометра

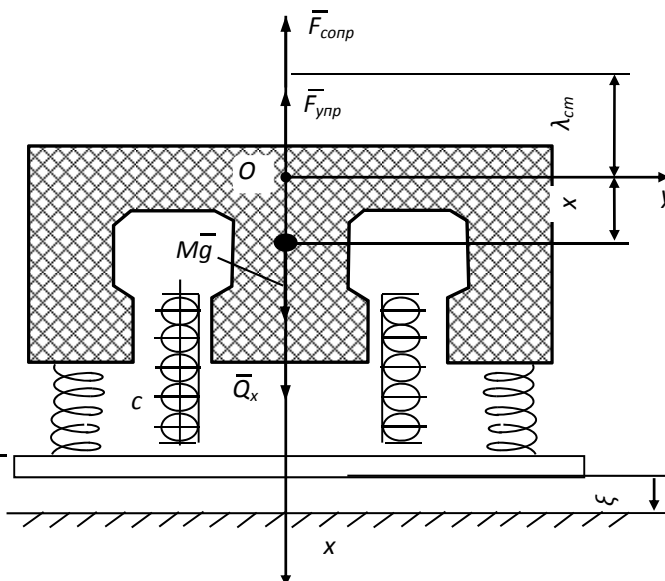


Рис. 2. Электромеханическая система

Этим обобщенным координатам соответствуют уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q, \quad (2)$$

Кинетическая энергия T электромеханической системы равна сумме кинетической энергии T_1 механической части системы и электрокинетической энергии T_2 электрической цепи:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) \dot{q}^2.$$

С учетом потери напряжения найдем значение ЭДС в цепи:

$$E^* = E - R\dot{q}.$$

Определим обобщенные силы:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{Mg \cdot \delta x - F_{ynp} \cdot \delta x - F_{cопp} \cdot \delta x + Q_x^* \cdot \delta x}{\delta x} = \\ &= Mg - F_{ynp} - F_{cопp} + Q_x^* = Mg - c(x + \lambda - \xi) - \beta \dot{x} + 2\pi n B \dot{q}; \\ Q_q &= \frac{\delta A}{\delta q} = E^* - Q_q^* = E - R\dot{q} - 2\pi n B \dot{x}. \end{aligned}$$

Найденные выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил Q_x и Q_q подставим в уравнения (1) и (2) и получим уравнения, определяющие перемещение сердечника и ток в цепи:

$$M\ddot{x} = Mg - cx - c\lambda - c\xi_0 \sin \omega t - \beta \dot{x} + 2\pi n B \dot{q}; \quad (3)$$

$$L\ddot{q} = E - R\dot{q} - 2\pi n B \dot{x}. \quad (4)$$

В положении равновесия системы $c\lambda_{cm} = Mg$, $\dot{q} = i_0 = \frac{E}{R}$.

Тогда уравнения движения системы (3) и (4) примут вид:

$$M\ddot{x} + cx + \beta\dot{x} - 2\pi nB\dot{q} = c\xi_0 \sin \omega t; \quad (5)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi nB\dot{x} = 0. \quad (6)$$

Для моделирования работы механизма зададимся конкретными значениями параметров: $M = 6$ кг, $c = 75$ Н/м, $\beta = 2$ Н*с/м, $r = 0,04$ м, $n = 200$, $B = 8$ мкТл, $\omega = 5$ с⁻¹, $L = 9$ мкГн, $R = 0,1$ Ом, $\xi_0 = 0,0005$ м.

Результаты моделирования представлены на ниже приведенных графиках (рис. 3, рис. 4).

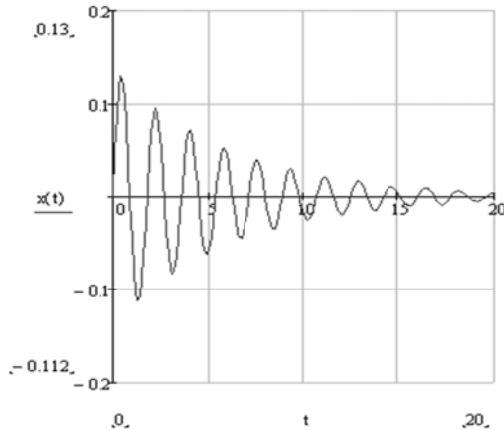


Рис. 3. Перемещение сердечника в функции времени

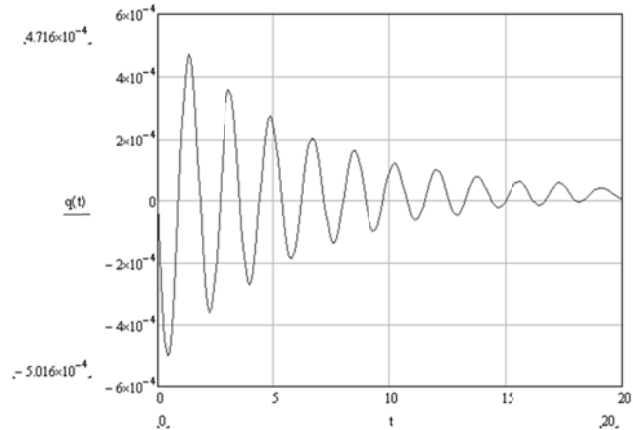


Рис. 4. Изменение заряда во времени

Траектории движения сердечника и изменения тока имеют вид затухающих колебаний с частотой близкой к частоте собственных колебаний якоря на пружине ν и периодом τ , величины которых можно оценить по формулам:

$$\nu \approx \sqrt{\frac{c}{M}} \approx \sqrt{\frac{75}{6}} \approx 3,53 \text{ с}^{-1}; \quad \tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2 \cdot 3,14}{3,53} \approx 1,8 \text{ с}. \quad (7)$$

Из рис. 3 и 4 видно, что десять колебаний якоря и электрического заряда происходят в течении восемнадцати секунд, что и подтверждает вышеизложенные утверждения. Затухание в системе определяется наличием соответствующих коэффициентов демпфирования. Установившимися значениями положения якоря и значения тока будут величины близкие к нулю. Колебания в системе, вызванные кинематическим движением основания, практически не наблюдаемы.

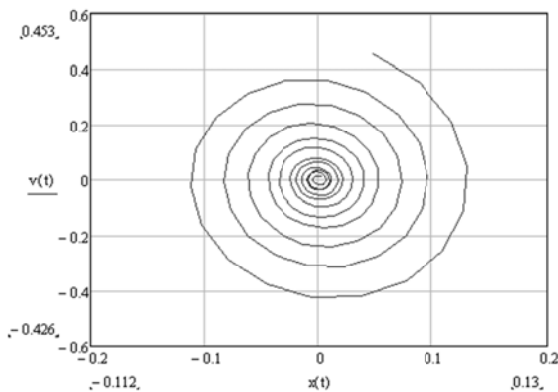


Рис. 5. Фазовые траектории движения сердечника

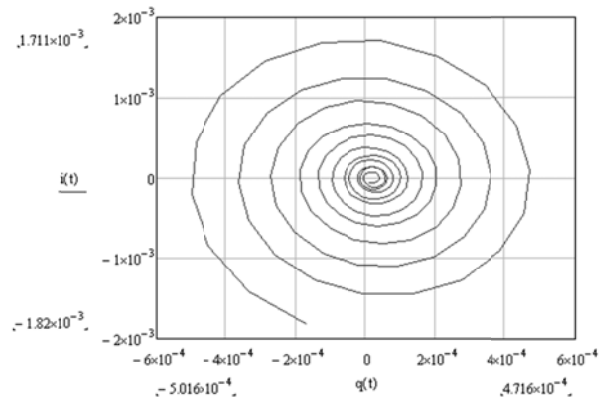


Рис. 6. Изменения тока

На рис. 5 и рис. 6 представлены фазовые траектории движения сердечника и изменения тока, они сходятся к нулевому значению по координатам и скоростям.

Исследуем другую электромеханическую движущую систему (рис. 7) состоящую из цилиндрического постоянного магнита с концентрическими полюсами A , создающего радиальное поле, и якоря массы M , опирающегося на пружину жесткости c . Якорь соединен с катушкой, состоящей из n витков, и с механическим демпфером, сопротивление которого пропорционально скорости якоря (коэффициент сопротивления β); средний радиус катушки r ее самоиндукция L , сопротивление R , магнитная индукция в зазоре магнита B . К зажимам катушки приложено переменное напряжение $V(t)$. Обобщенные силы, отвечающие взаимодействию катушки и магнита, даются теми же формулами $Q_q = -2\pi n B \dot{x}$, $Q_x = 2\pi n B \dot{q}$.

Электромеханическая система, состоящая из подвижного якоря, совершающего поступательное движение, постоянного магнита и электромагнитного механизма, имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x – перемещение якоря, определяет положение подвижной части механизма, q – обобщенная координата фиксирует состояние электрической части цепи (рис. 8).

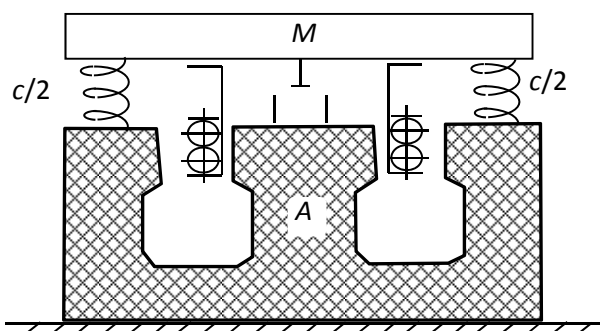


Рис. 7. Электромеханическая движущая система

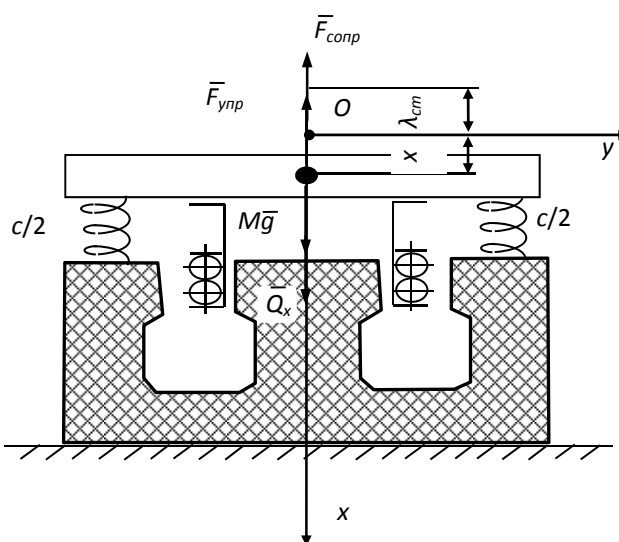


Рис. 8. Электромеханическая система

Этим обобщенным координатам соответствуют уравнения Лагранжа 2-го рода такие же как (1)–(2).

Кинетическая энергия T электромеханической системы равна сумме кинетической энергии T_1 механической части системы и электрокинетической энергии T_2 электрической цепи:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) \dot{q}^2 .$$

Обобщенные силы:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{Mg \cdot \delta x - F_{ynp} \cdot \delta x - F_{copr} \cdot \delta x + Q_x^* \cdot \delta x}{\delta x} = \\ &= Mg - F_{ynp} - F_{copr} + Q_x^* = Mg - c(x + \lambda) - \beta \dot{x} + 2\pi n B \dot{q} ; \\ Q_q &= \frac{\delta A}{\delta q} = \frac{E^* \cdot \delta q - Q_q^* \cdot \delta q + V(t) \cdot \delta q}{\delta q} = E^* + V(t) - Q_q^* = \\ &= E - R \dot{q} + V(t) - 2\pi n B \dot{x} . \end{aligned}$$

Найденные выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил Q_x и Q_q подставим в уравнения (1) и (2) и получим уравнения движения системы:

$$M\ddot{x} = Mg - c(x + \lambda) - \beta\dot{x} + 2\pi n B \dot{q}, \quad (8)$$

$$L\ddot{q} = E - R\dot{q} + V(t) - 2\pi n B \dot{x}. \quad (9)$$

В положении равновесия системы $c\lambda = Mg$, $\dot{q} = i_0 = \frac{E}{R}$.

Тогда уравнения движения системы (7) и (8) примут вид:

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - 2\pi n B \dot{q} = 0, \quad (10)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi n B \dot{x} = V(t). \quad (11)$$

Будем считать, что напряжение изменяется по гармоническому закону $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$.

Выполним моделирование работы устройства при следующих параметрах: $M = 3$ кг, $c = 50$ Н/м, $\beta = 2$ Н·с/м, $r = 0,04$ м, $n = 20$, $B = 4$ мкТл, $V_0 = 10$ В, $\omega = 10$ с⁻¹, $L = 8$ мкГн, $R = 25$ Ом.

Результаты расчетов представлены на нижеприведенных графиках перемещения, изменения заряда (рис. 9, 10) и фазовых траекториях (рис. 11, 12).

Как и в предыдущей задаче траектории движения сердечника и изменения тока имеют вид затухающих колебаний с выходом на установившийся режим через три секунды после начала колебаний. Частота этих колебаний определяется частотой $\omega = 10$ с⁻¹ динамического возбуждения электрического контура. Из рис. 9 и рис. 10 видно, что пять колебаний якоря и электрического заряда происходят в течении порядка 3,1 секунды, что дает период приблизительно 0,62 секунды. При этом частота ν собственных колебаний якоря на пружине с периодом τ оценим по формулам:

$$\nu \approx \sqrt{\frac{c}{M}} \approx \sqrt{\frac{50}{3}} \approx 4,1 \text{ с}^{-1}; \quad \tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2 \cdot 3,14}{4,1} \approx 1,5 \text{ с}. \quad (12)$$

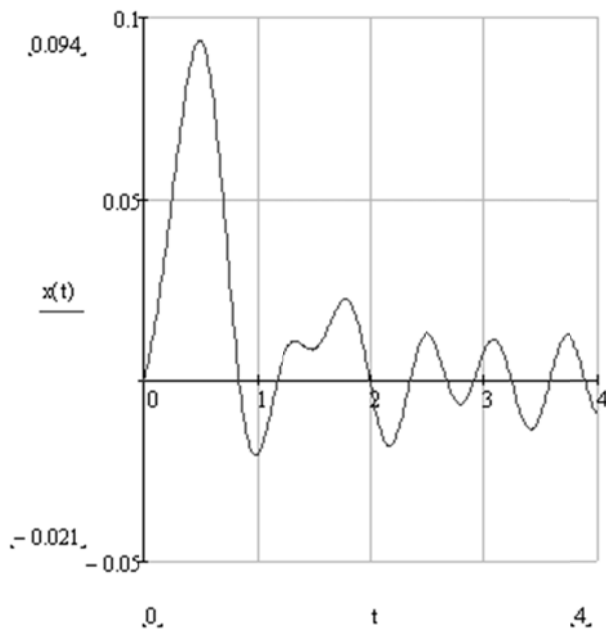


Рис. 9. Перемещение якоря

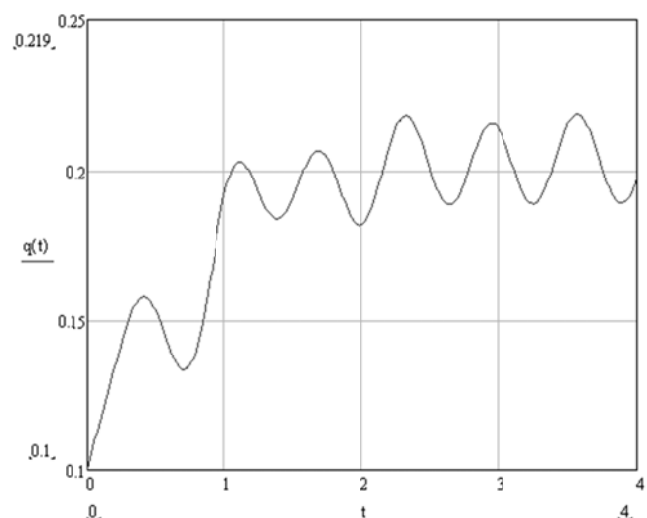


Рис. 10. Изменение заряда

Частота ω возбуждения электрического контура выше частоты ν собственных колебаний якоря на пружине, что и определяет характер этого движения. Следует отметить, что электрический заряд q при этом стремится к значению $0,21 a$, как это следует из рис. 10 и рис. 12 и тем, что q – циклическая координата в уравнении 11. Влияние собственных колебаний наблюдается в течении первых трех секунд.

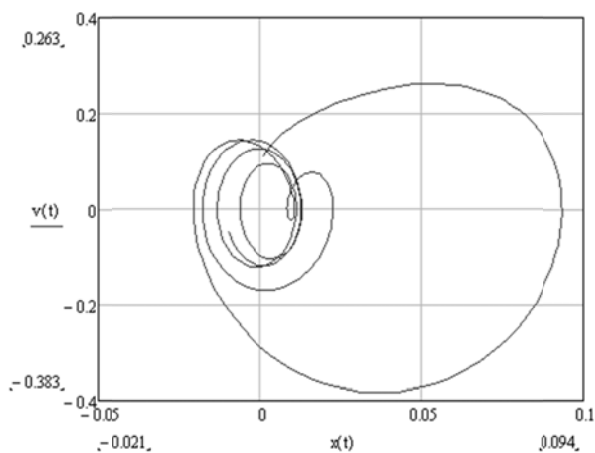


Рис. 11. Фазовые траектории движения якоря

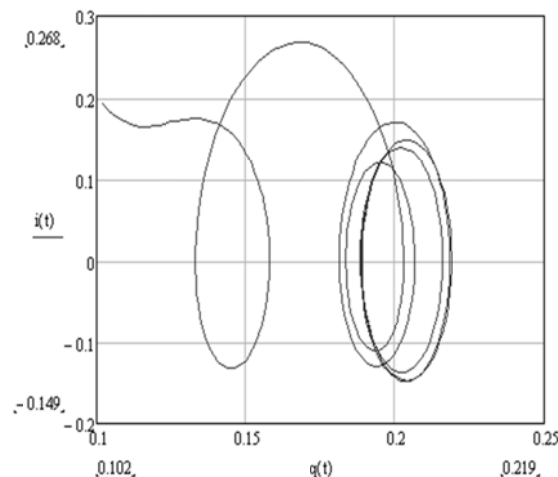


Рис. 12. Изменение тока

ВЫВОДЫ

Моделирование динамики электромеханических систем на базе уравнений Лагранжа-Максвелла и с использованием современных ППП и компьютерной техники позволяет уменьшить материальные затраты на разработку электромеханических устройств и путем варьирования параметров подобрать их рациональное сочетание. Если же определиться с критерием оптимальности, то имея математическую модель и программу, можно выполнить и оптимизацию параметров. Приведены примеры кинематического и динамического возбуждения системы с частотами выше и ниже частоты собственных колебаний.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плюгин В. Е. Математическая модель электромеханического преобразователя энергии с массивным ротором / В. Е. Плюгин. – *Электротехніка і Електромеханіка*, 2012. – № 1. – С. 42–44. – ISSN 2074-272X.
2. Менициков И. А. Математическая модель прогнозирования устойчивости функционирования электромеханических систем / И. А. Менициков. – *Вісник СГПУ*, 2012. – № 2 (66). – Выпуск 2. – С. 114–120.
3. Дикарев А. В. Применение микроэлектромеханических акселерометров в задачах стабилизации изображения / А. В. Дикарев. – *Известия ВолгГТУ*. 2012. – С. 49–52.
4. Зайченко Т. Н. Решение задач динамики электромеханических систем в среде автоматизированного моделирования марс / Т. Н. Зайченко. – *Известия Томского политехнического университета*, 2005. – Т. 308. – № 4 – С. 147–153.
5. Завьялова О. Ю. Синтез регулятора маховичного электромеханического исполнительного органа / О. Ю. Завьялова, Ю. М. Казанцев. – *Известия Томского политехнического университета*, 2012. – Т. 320. – № 4. – С. 162–166.
6. До Ньы И. Управление электроприводом электромеханической системы вибрационных грохотов / До Ньы И. – *Машиностроение и машиноведение. Известия ТулГУ. Технические науки*, 2013. – Вып. 7. – Ч. 2 – С. 337–340.