

УДК 539.3/6

**Холодняк Ю. С., Подлесный С. В., Капорович С. В.****УПРОЩЁННАЯ МЕТОДИКА СИЛОВОГО РАСЧЁТА ПЛОСКИХ РАМ В УСЛОВИЯХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Научно-технический прогресс требует от проектантов применения всё более совершенных расчётных методов, касающихся прочностных и энергосиловых параметров проектируемых изделий. Особо актуальны такие требования для конструкций, подверженных колебаниям под действием периодически изменяющихся во времени внешних нагрузок, создающих в конструкциях значительные усилия и напряжения. Адекватная оценка этих внутренних силовых факторов является основой обеспечения надёжности и долговечности создаваемой продукции.

В машиностроении и в строительстве значительно распространены стержневые конструкции – балки и плоские рамы, работающие в условиях вынужденных колебаний. Методики силового расчёта таких конструкций изложены в целом ряде публикаций, большинство из которых касается балок.

Так, в учебно-методической литературе по сопротивлению материалов рассматриваются, как правило, вынужденные колебания невесомой балки с закреплённой на ней точечной массой [1–3 и др.]. Такая модель колеблющейся системы, несмотря на свою простоту, даёт обычно приемлемую точность силовых расчётов. Именно поэтому она и является наиболее распространённой на практике.

Наряду с этим в университетских курсах сопротивления материалов и строительной механики анализируются также случаи вынужденных колебаний балок с распределёнными или несколькими дискретными массами [4–6 и др.]. Предлагаемые при этом методики расчёта для широкого практического применения достаточно сложны, поскольку требуют углублённой математической подготовки и сложных вычислительных средств.

Подобные (уточнённые) методики расчёта, касающиеся вынужденных колебаний плоских рам [7–9 и др.], рассматриваются обычно в университетских курсах строительной механики. В своей основе они имеют сложные двумерные математические модели и для применения на практике также довольно сложны. Менее сложных методик силового расчёта колеблющихся рам не существует. Известна лишь сомнительная попытка использовать для них такие же методические подходы, как и для балок [10]. Для широкой инженерной практики необходимы более простые и обоснованные методики расчёта.

Целью настоящей работы является разработка упрощённой двумерной математической модели вынужденных колебаний плоских рам с последующим использованием этой модели в их силовых расчётах.

Для реализации указанной цели возьмём простейшую Г-образную раму (рис. 1) и проанализируем её деформацию.

Пусть в произвольный момент времени на колеблющуюся массу  $m$  действуют некие силы  $P_1$  и  $P_2$ , создавая её смещения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  (см. рис. 1):

$$\Delta_1 = P_1 \cdot \delta_{11} + P_2 \cdot \delta_{12}, \quad (1)$$

$$\Delta_2 = P_2 \cdot \delta_{22} + P_1 \cdot \delta_{21}, \quad (2)$$

где  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{21}$  – смещения колеблющейся массы под действием единичных сил  $P_1 = 1$  и  $P_2 = 1$ , определяемые с помощью эпюр изгибающих моментов от этих сил –  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  [4].

Колебания массы происходят относительно положения статического равновесия (точка  $O$  на рис. 1). В этом положении:

$$P_1^{ст} = mg, \tag{3}$$

$$P_2^{ст} = 0. \tag{4}$$

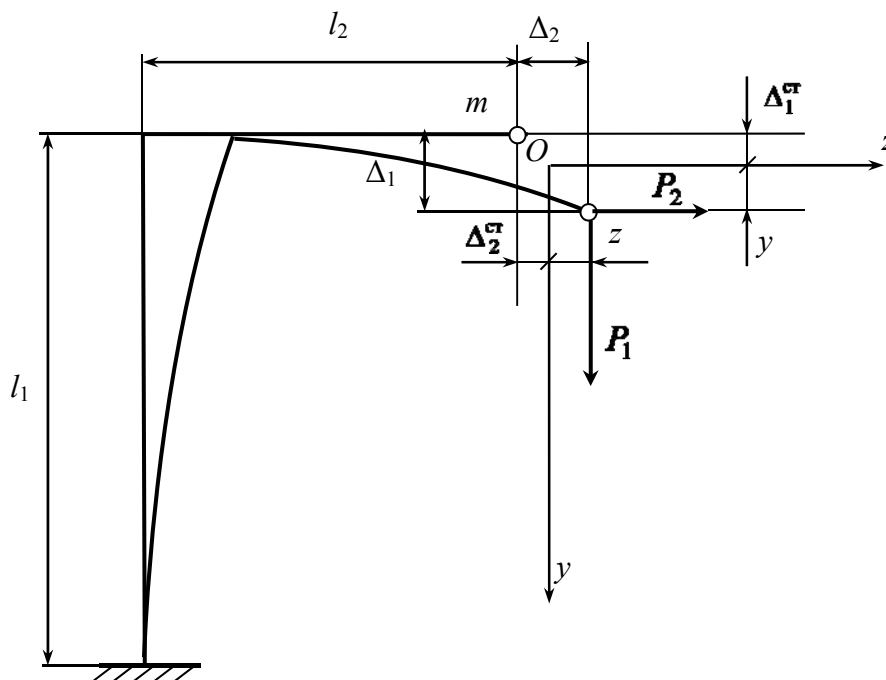


Рис. 1. Схема рамы

Тогда в соответствии с (1) и (2) имеем:

$$\Delta_1^{ст} = P_1^{ст} \cdot \delta_{11} = mg \cdot \delta_{11}, \tag{5}$$

$$\Delta_2^{ст} = P_1^{ст} \cdot \delta_{21} = mg \cdot \delta_{21}. \tag{6}$$

В процессе колебаний (см. рис. 1):

$$\Delta_1 = \Delta_1^{ст} + y = mg \cdot \delta_{11} + y, \tag{7}$$

$$\Delta_2 = \Delta_2^{ст} + z = mg \cdot \delta_{21} + z. \tag{8}$$

Подставим выражения (7) и (8) в формулы (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} mg \cdot \delta_{11} + y = P_1 \cdot \delta_{11} + P_2 \cdot \delta_{12}, \\ mg \cdot \delta_{21} + z = P_2 \cdot \delta_{22} + P_1 \cdot \delta_{21}. \end{cases} \tag{9}$$

Решая систему уравнений (9), получим зависимости  $P_1$  и  $P_2$  от текущих координат колеблющейся массы:

$$P_1 = f_1(y, z) = mg + \frac{z}{\delta_{21}} - \frac{y \cdot \delta_{21} - z \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}} \cdot \frac{\delta_{22}}{\delta_{21}}, \quad (10)$$

$$P_2 = f_2(y, z) = \frac{y \cdot \delta_{21} - z \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}}. \quad (11)$$

Учтём, что  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$  – силы, деформирующие раму. Тогда соответствующие реакции рамы будут равны этим силам:

$$R_1 = P_1 = f_1(y, z), \quad (12)$$

$$R_2 = P_2 = f_2(y, z). \quad (13)$$

Конкретизируем решаемую задачу. В качестве колеблющейся массы примем, как это делают авторы ряда работ [1, 10, 11 и др.], электродвигатель со статически неотбалансированным ротором. Его угловая скорость –  $\omega$ , модуль создаваемой им возмущающей силы –  $H$ .

Приложим к указанной массе силу тяжести –  $m\bar{g}$ , реакции рамы –  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$ , возмущающую силу –  $\bar{H}$ , силы инерции –  $\bar{\Phi}_1$  и  $\bar{\Phi}_2$ , силы сопротивления среды –  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  (рис. 2). Под действием этих сил масса  $m$  будет находиться в положении кинетостатического равновесия:

$$m\bar{g} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{H} + \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0. \quad (14)$$

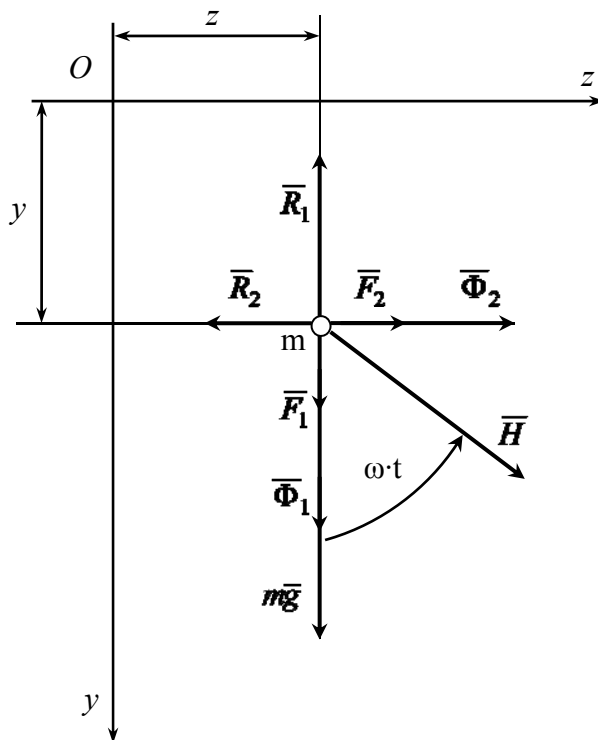


Рис. 2. Схема нагружения колеблющейся массы

Спроецируем векторное уравнение (14) на оси  $y$  и  $z$ , получим:

$$(y) : mg + R_1^y + H \cdot \cos \omega t + \Phi_1^y + F_1^y = mg - f_1(y, z) + H \cdot \cos \omega t - m \cdot \ddot{y} - \mu \cdot \dot{y} = 0 ; \quad (15)$$

$$(z) : R_2^z + H \cdot \sin \omega t + \Phi_2^y + F_2^y = -f_2(y, z) + H \cdot \sin \omega t - m \cdot \ddot{z} - \mu \cdot \dot{z} = 0 . \quad (16)$$

После преобразований (15) и (16) имеем окончательную форму дифференциальных уравнений движения массы  $m$ :

$$m \cdot \ddot{y} + \mu \cdot \dot{y} + f_1(y, z) = mg + H \cdot \cos \omega t , \quad (17)$$

$$m \cdot \ddot{z} + \mu \cdot \dot{z} + f_2(y, z) = H \cdot \sin \omega t , \quad (18)$$

где  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$  – проекции на оси координат ускорения колеблющейся массы;

$\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  – проекции на оси координат скорости этой массы;

$\mu$  – коэффициент сопротивления среды;

$t$  – время, отсчитываемое от начала движения (выхода массы  $m$  из положения статического равновесия).

Следует отметить, что уравнения (17) и (18) являются универсальными, не зависящими напрямую от геометрических параметров рамы: эти параметры связаны лишь с величинами  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ . Для рамы, изображённой на рис. 1, их значения легко вычислить с помощью правила Верещагина путём «перемножения» эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  (рис. 3, 4).

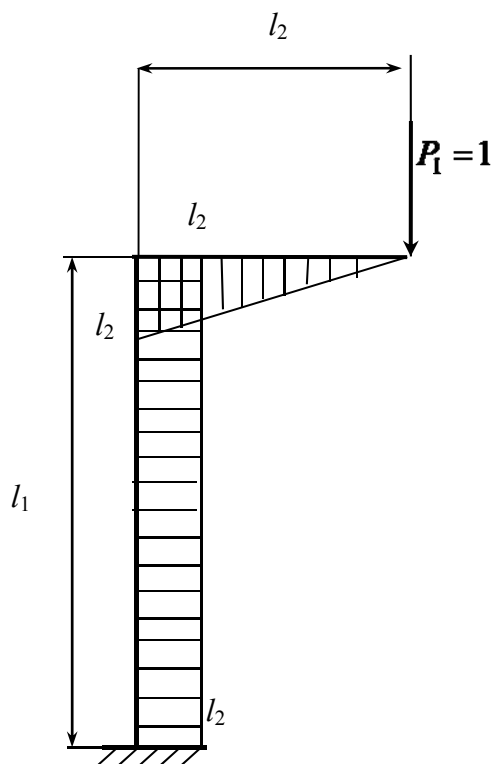


Рис. 3. Эпюра  $\bar{M}_1$

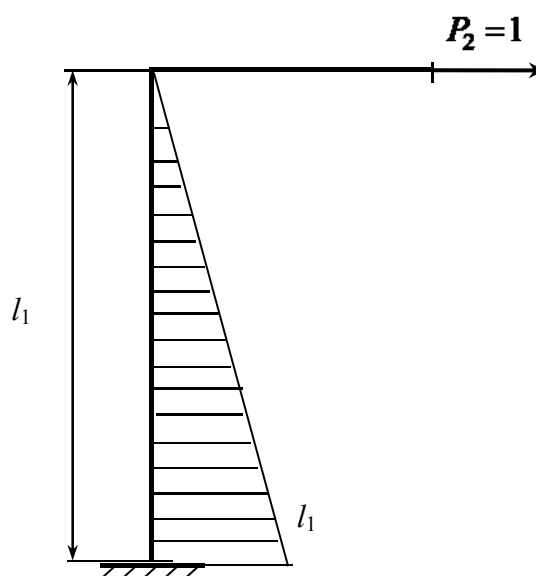


Рис. 4. Эпюра  $\bar{M}_2$

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot l_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 \cdot l_2 \right) = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot l_2^3 + l_1 \cdot l_2^2 \right), \quad (19)$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot l_1 = \frac{l_1^3}{3E \cdot J_x}, \quad (20)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_1 = \frac{l_1^2 \cdot l_2}{2E \cdot J_x}, \quad (21)$$

где  $E \cdot J_x$  – жёсткость сечения стержней рамы.

При иной форме рамы формулы для вычисления указанных величин будут иными, однако процедура их определения останется прежней.

Следует обратить внимание на направление силы  $P_2 = 1$ . В соответствии с рис. 1 она должна быть направлена в сторону горизонтального смещения массы  $m$  под действием её силы тяжести  $m\bar{g}$  –  $\Delta_r$ . При таком направлении силы  $P_2 = 1$  величина  $\Delta_r$  должна быть положительной, т. е.:

$$\Delta_r > 0. \quad (22)$$

Но

$$\Delta_r = M_p \times \bar{M}_2, \quad (23)$$

где  $M_p$  – эюра изгибающих моментов от силы  $m\bar{g}$ :

$$M_p = mg \cdot \bar{M}_1. \quad (24)$$

С учётом этого условие (22) приобретает вид:

$$\Delta_r = mg \cdot \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = mg \cdot \delta_{12} > 0, \quad (25)$$

или

$$\delta_{12} > 0. \quad (26)$$

Таким образом, при «правильном» направлении силы  $P_2 = 1$  величина  $\delta_{12}$  должна быть положительной.

Найденные значения перемещений  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$  и  $\delta_{12}$  позволяют определить также резонансные частоты колебаний системы.

В основу этого определения положим формулу для определения резонансных частот колебаний рамы с двумя закреплёнными на ней точечными массами  $m_1$  и  $m_2$ , каждая из которых может перемещаться в одном направлении [12]. Эта формула имеет вид:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22}) \pm \sqrt{(m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22})^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}}. \quad (27)$$

В нашем случае на раме закреплена одна масса  $m$ , но она перемещается в двух направлениях – вертикальном и горизонтальном. Чтобы учесть это обстоятельство, положим в формуле (27):

$$m_1 = m_2 = m. \quad (28)$$

Тогда, после несложных преобразований, формула (27) примет вид:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta_{11} + \delta_{22}) \pm m \cdot \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}} \quad (29)$$

или

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22}) \pm \sqrt{(\delta_{11} - \delta_{22})^2 + 4 \cdot \delta_{12}^2}}}}. \quad (30)$$

Для оценки адекватности предлагаемой модели проводилось сравнение получаемых с её помощью результатов с таковыми, опубликованными в работе [13], где на основе использования классической модели вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы определены параметры вертикальных колебаний невесомой консольной балки (двухавр 20,  $l = 3$  м) с установленным на ней электродвигателем ( $m = 1000$  кг,  $n = 1000$  об/мин) со статически неотбалансированным ротором, создающим возмущающую силу  $H = 0,3mg$ . В этой работе круговая частота собственных колебаний системы оказалась равной  $\kappa = 20,220$  с<sup>-1</sup>, а максимальные нормальные напряжения в балке составили  $\sigma_{max} = 171$  МПа. В расчёте принято  $\mu = 0$ .

Альтернативный расчёт по предлагаемой методике выполнялся в среде Mathcad 15 [14, 15] применительно к схеме рамы, изображённой на рис. 1, но с максимальным её приближением по форме и размерам к вышеупомянутой балке:  $l_1 = 0,1$  м,  $l_2 = 3$  м. Остальные параметры системы – такие же, как и в работе [13]. Результаты этого расчёта представлены на рис. 5.

Расхождение результатов по  $\sigma_{max}$ , действующих в жёстких заделках рамы и балки:

$$\Delta(\sigma_{max}) = \frac{167,416 - 171}{171} \cdot 100 = -2,096\%,$$

по резонансной частоте ( $\omega_1$  и  $\kappa$ ):

$$\Delta(\omega_1) = \frac{19,28 - 20,22}{20,22} \cdot 100 = -4,649\%.$$

Как видно, результаты обоих расчётов достаточно близки.

Для дальнейшей апробации предлагаемой методики проведена серия аналогичных расчётов для такой же Г-образной рамы, но с  $l_1 = 3$  м,  $l_2 = 2$  м и варьированием значений  $\omega$  в диапазоне от 3 с<sup>-1</sup> до 300 с<sup>-1</sup> (табл. 1); остальные исходные данные – те же.

$$g := 9.81 \quad J_x := 1840 \cdot 10^{(-8)} \quad eE := 2 \cdot 10^{11} \quad l_2 := 3 \quad m := 1000 \quad H := 2943 \quad \omega := 104.7$$

$$l_1 := 0.1 \quad W_x := 184 \quad \mu := 0.0000001$$

$$\delta_{11} := \frac{2 \cdot l_2^3 + 6 \cdot l_1 \cdot l_2^2}{6 \cdot eE \cdot J_x} \quad \delta_{22} := \frac{2 \cdot l_1^3}{6 \cdot eE \cdot J_x} \quad \delta_{12} := \frac{3 \cdot l_2 \cdot l_1^2}{6 \cdot eE \cdot J_x} \quad \delta_{21} := \delta_{12}$$

$$\delta_{11} = 2.69 \times 10^{-6} \quad \delta_{22} = 9.058 \times 10^{-11} \quad \delta_{12} = 4.076 \times 10^{-9} \quad \delta_{21} = 4.076 \times 10^{-9}$$

Given

$$m \cdot y''(t) + \mu \cdot y'(t) + \left[ \frac{-z(t) \cdot \delta_{12} - m \cdot g \cdot \delta_{12} \cdot \delta_{21} + y(t) \cdot \delta_{22} + m \cdot g \cdot \delta_{11} \cdot \delta_{22}}{(\delta_{12} \cdot \delta_{21} - \delta_{11} \cdot \delta_{22})} \right] = H \cdot \cos(\omega \cdot t) + m \cdot g$$

$$m \cdot z''(t) + \mu \cdot z'(t) - \frac{-z(t) \cdot \delta_{11} + y(t) \cdot \delta_{21}}{-\delta_{12} \cdot \delta_{21} + \delta_{11} \cdot \delta_{22}} = H \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad z(0) = 0 \quad z'(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, t, 4 \right] \quad t := 0, 0.002 \dots 4$$

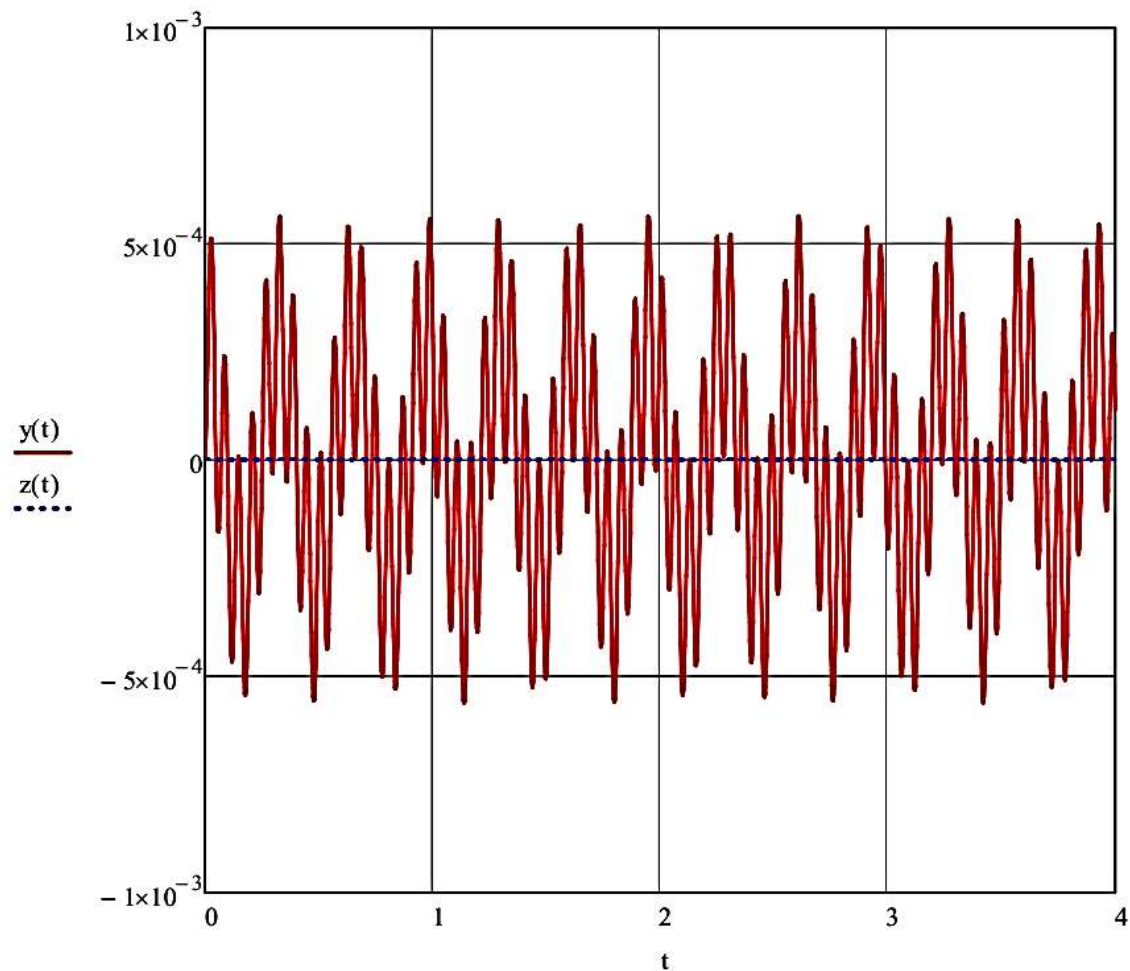


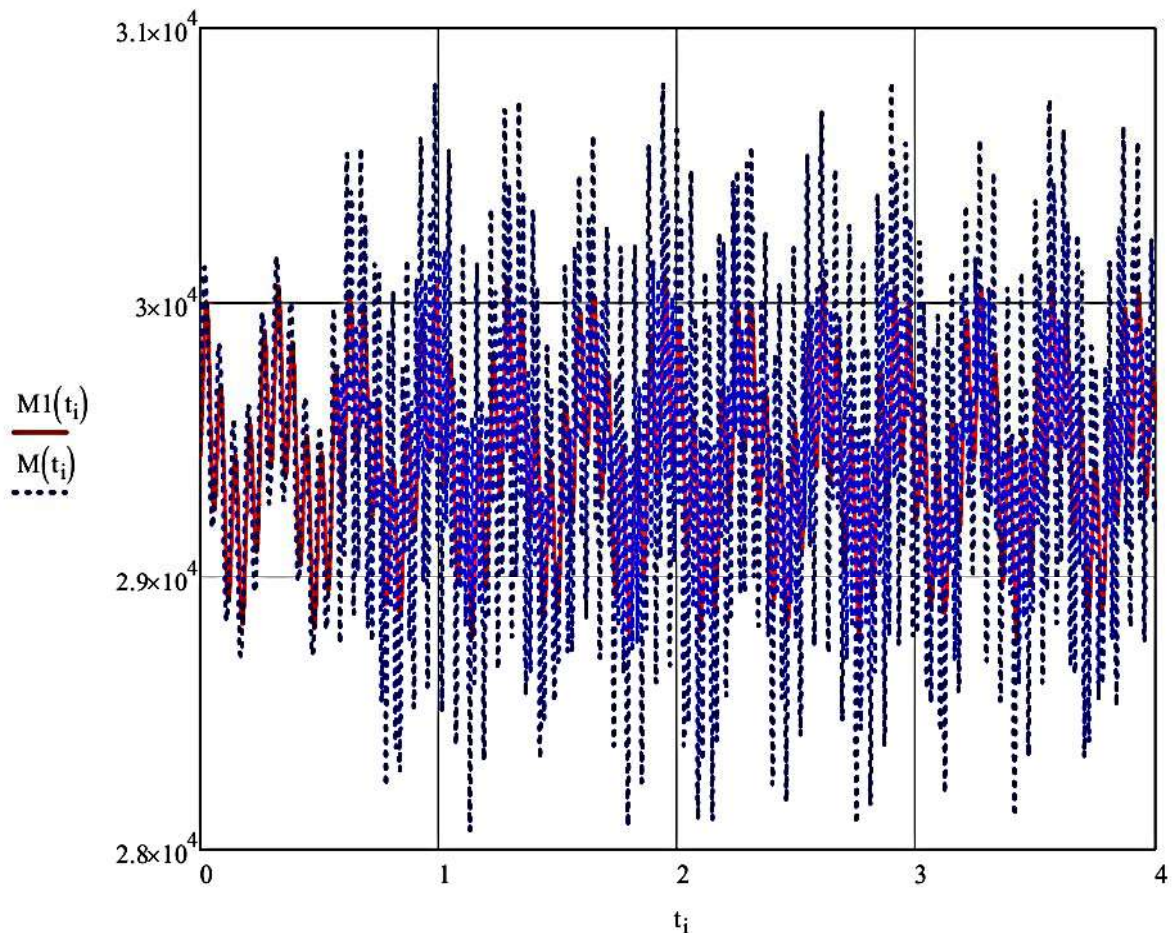
Рис. 5. Расчёт по предлагаемой методике

$$M1(t) := \left( m \cdot g + \frac{z(t)}{\delta 21} - \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \cdot \frac{\delta 22}{\delta 21} \right) \cdot l_2$$

$$M2(t) := \left( \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \right) \cdot l_1$$

$$M(t) := M1(t) + M2(t)$$

ORIGIN := 1    i := 1..4000    t<sub>i</sub> := 0 +  $\frac{i}{1000}$     MM<sub>i</sub> := M(t<sub>i</sub>)    MM1<sub>i</sub> := M1(t<sub>i</sub>)



Mmax := max(MM)    Mmax = 3.08 × 10<sup>4</sup>    σmax :=  $\frac{Mmax}{Wx}$     σmax = 167.416

M1max := max(MM1)    M1max = 3.009 × 10<sup>4</sup>    σ1max :=  $\frac{M1max}{Wx}$     σ1max = 163.53

$$\omega R1 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) + m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}}$$

ωR1 = 19.28

$$\omega R2 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) - m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}}$$

ωR2 = 3.442 × 10<sup>3</sup>

Рис. 5. Лист 2



Таблица 1

Координаты точек графиков  $M_{\max}(\omega)$  и  $\sigma_{\max}(\omega)$ 

$\omega, \text{с}^{-1}$	3	5	10	11	12	13	13,05
$M_{\max}, \text{Н}\cdot\text{м}$	$3,929 \cdot 10^4$	$4,089 \cdot 10^4$	$6,296 \cdot 10^4$	$8,334 \cdot 10^4$	$1,369 \cdot 10^5$	$2,841 \cdot 10^5$	$2,89 \cdot 10^5$
$\sigma_{\max}, \text{МПа}$	213,554	222,249	342,162	452,934	743,955	$1,544 \cdot 10^3$	$1,571 \cdot 10^3$
$\omega, \text{с}^{-1}$	13,1	13,115	13,13	13,15	13,154	13,16	13,2
$M_{\max}, \text{Н}\cdot\text{м}$	$2,904 \cdot 10^5$	$2,9044 \cdot 10^5$	$2,904 \cdot 10^5$	$2,90062 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^5$	$2,89835 \cdot 10^5$	$2,886 \cdot 10^5$
$\sigma_{\max}, \text{МПа}$	$1,578 \cdot 10^3$	$1,578 \cdot 10^3$	$1,578 \cdot 10^3$	$1,576 \cdot 10^3$	$1,576 \cdot 10^3$	$1,575 \cdot 10^3$	$1,568 \cdot 10^3$
$\omega, \text{с}^{-1}$	13,5	14	15	16	17	20	30
$M_{\max}, \text{Н}\cdot\text{м}$	$2,595 \cdot 10^5$	$1,7213 \cdot 10^5$	$8,629 \cdot 10^4$	$6,39 \cdot 10^4$	$5,203 \cdot 10^4$	$3,795 \cdot 10^4$	$3,796 \cdot 10^4$
$\sigma_{\max}, \text{МПа}$	$1,41 \cdot 10^3$	935,491	468,958	347,304	282,789	206,263	206,307
$\omega, \text{с}^{-1}$	32	33	34	35	36	37	38
$M_{\max}, \text{Н}\cdot\text{м}$	$4,197 \cdot 10^4$	$4,518 \cdot 10^4$	$5,002 \cdot 10^4$	$5,546 \cdot 10^4$	$6,625 \cdot 10^4$	$8,657 \cdot 10^4$	$1,426 \cdot 10^5$
$\sigma_{\max}, \text{МПа}$	228,074	245,559	271,856	301,428	360,044	470,509	775,21
$\omega, \text{с}^{-1}$	39	39,1	39,16	39,1675	39,175	39,18	39,2
$M_{\max}, \text{Н}\cdot\text{м}$	$2,98 \cdot 10^5$	$3,022 \cdot 10^5$	$3,03 \cdot 10^5$	$3,02994 \cdot 10^5$	$3,03 \cdot 10^5$	$3,029 \cdot 10^5$	$3,027 \cdot 10^5$
$\sigma_{\max}, \text{МПа}$	$1,62 \cdot 10^3$	$1,642 \cdot 10^3$	$1,647 \cdot 10^3$	$1,647 \cdot 10^3$	$1,647 \cdot 10^3$	$1,646 \cdot 10^3$	$1,645 \cdot 10^3$
$\omega, \text{с}^{-1}$	39,5	40	41	50	70	80	100
$M_{\max}, \text{Н}\cdot\text{м}$	$2,83 \cdot 10^5$	$1,939 \cdot 10^5$	$9,787 \cdot 10^4$	$3,365 \cdot 10^4$	$2,493 \cdot 10^4$	$2,362 \cdot 10^4$	$2,241 \cdot 10^4$
$\sigma_{\max}, \text{МПа}$	$1,538 \cdot 10^3$	$1,054 \cdot 10^3$	531,916	182,869	135,489	128,351	121,771
$\omega, \text{с}^{-1}$	104,7	140	160	180	220	260	300
$M_{\max}, \text{Н}\cdot\text{м}$	$2,219 \cdot 10^4$	$2,135 \cdot 10^4$	$2,104 \cdot 10^4$	$2,086 \cdot 10^4$	$2,057 \cdot 10^4$	$2,039 \cdot 10^4$	$2,029 \cdot 10^4$
$\sigma_{\max}, \text{МПа}$	120,619	116,052	114,371	113,356	111,818	110,824	110,292

По результатам этих расчётов построены графики зависимостей  $M_{\max}$  и  $\sigma_{\max}$  от  $\omega$  (рис. 6), экспериментально подтверждающие наличие у каждого из них двух резонансных пиков. Для уточнения координат их наивысших точек дополнительно построены детальные графики указанных зависимостей вблизи резонансных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 7, 8). Трассировкой этих графиков определены экспериментальные значения резонансных частот:

$$\omega'_1 = 13,115 \text{с}^{-1};$$

$$\omega'_2 = 39,168 \text{с}^{-1}.$$

Расчётные значения резонансных частот составили:  $\omega_1 = 13,154 \text{с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 39,175 \text{с}^{-1}$ .

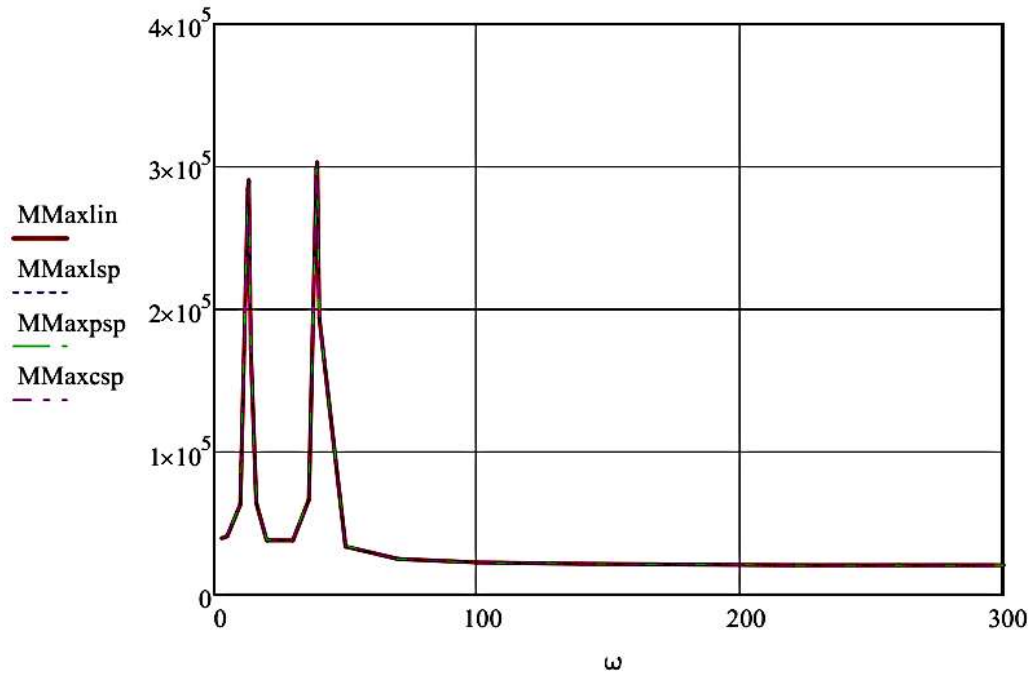
Сравнение экспериментальных и расчётных значений резонансных частот показывает их практически полную идентичность:

$$\Delta(\omega_1) = \frac{\omega_1 - \omega'_1}{\omega_1} \cdot 100 = \frac{13,154 - 13,115}{13,154} \cdot 100 = 0,296 \% ;$$

$$\Delta(\omega_2) = \frac{\omega_2 - \omega'_2}{\omega_2} \cdot 100 = \frac{39,175 - 39,168}{39,175} \cdot 100 = 0,018 \% .$$

Такой результат свидетельствует о приемлемости предлагаемой методики расчёта для практических целей, прежде всего учебных, поскольку она не только достаточно точно определяет значения  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , но и даёт надёжные силовые результаты, подтверждающие эту точность.

$M_{\text{Maxlin}} := \text{linterp}(\omega, \text{momMax}, \omega)$   
 $M_{\text{Maxlsp}} := \text{interp}(\text{lspline}(\omega, \text{momMax}), \omega, \text{momMax}, \omega)$   
 $M_{\text{Maxpsp}} := \text{interp}(\text{pspline}(\omega, \text{momMax}), \omega, \text{momMax}, \omega)$   
 $M_{\text{Maxcsp}} := \text{interp}(\text{cspline}(\omega, \text{momMax}), \omega, \text{momMax}, \omega)$



$$W_x := 184 \cdot 10^{-6} \quad \sigma_{\text{max}} := \frac{M_{\text{Maxlin}}}{W_x}$$

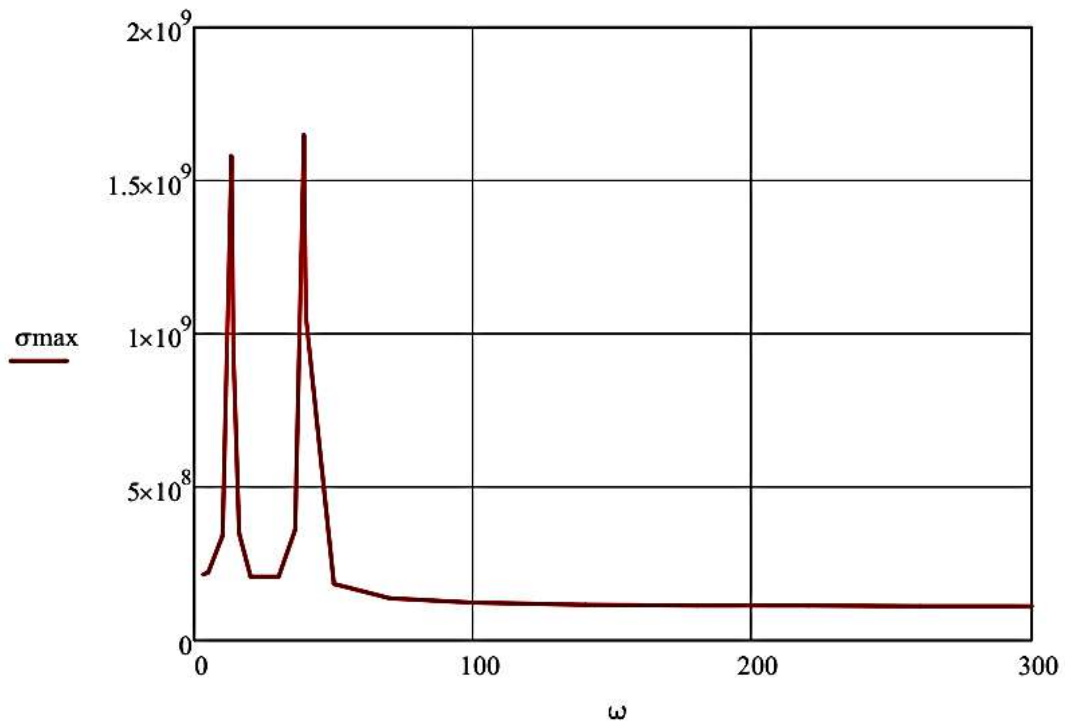
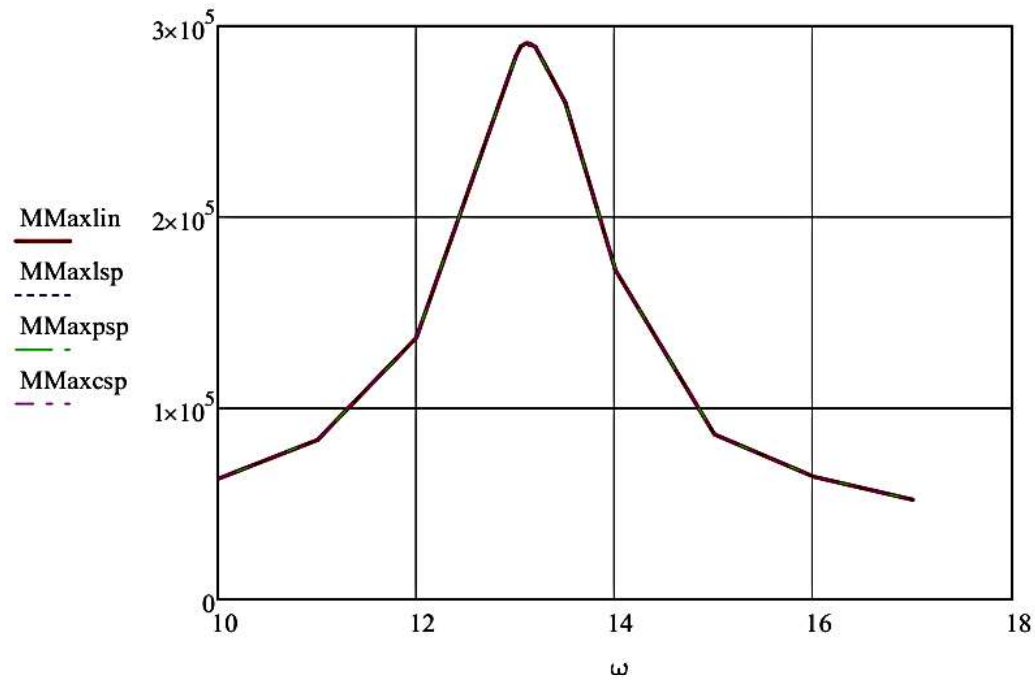


Рис. 6. Графики зависимостей  $M_{\text{max}}(\omega)$  и  $\sigma_{\text{max}}(\omega)$

$M_{\max \text{lin}} := \text{linterp}(\omega, \text{momMax}, \omega)$   
 $M_{\max \text{lsp}} := \text{interp}(\text{lspline}(\omega, \text{momMax}), \omega, \text{momMax}, \omega)$   
 $M_{\max \text{psp}} := \text{interp}(\text{pspline}(\omega, \text{momMax}), \omega, \text{momMax}, \omega)$   
 $M_{\max \text{csp}} := \text{interp}(\text{cspline}(\omega, \text{momMax}), \omega, \text{momMax}, \omega)$



$$W_x := 184 \cdot 10^{-6} \quad \sigma_{\max} := \frac{M_{\max \text{lin}}}{W_x}$$

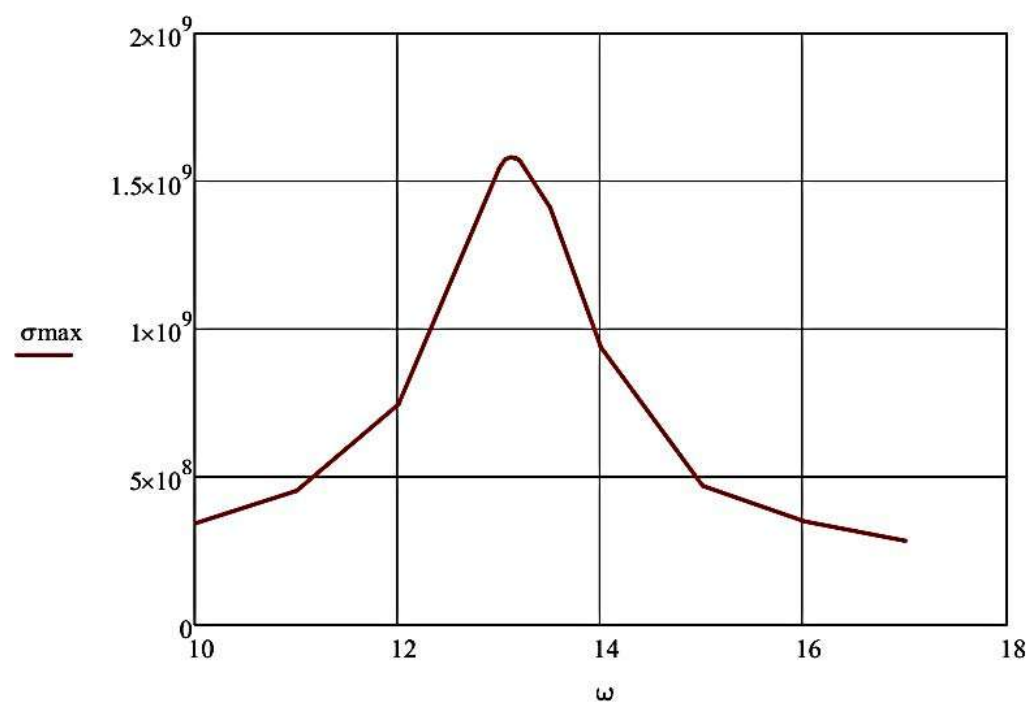
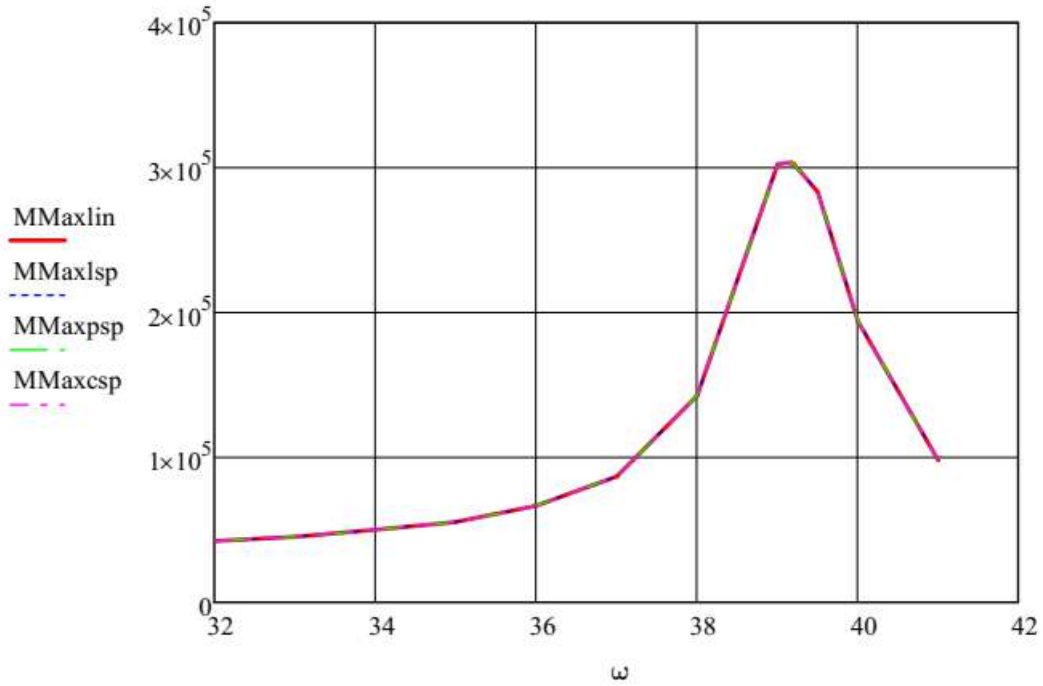


Рис. 7. Графики  $M_{\max}(\omega)$  и  $\sigma_{\max}(\omega)$  в окрестности первой резонансной частоты

$M_{Maxlin} := \text{linterp}(\omega, \text{momMax}, \omega)$   
 $M_{Maxlsp} := \text{interp}(\text{lspline}(\omega, \text{momMax}), \omega, \text{momMax}, \omega)$   
 $M_{Maxpsp} := \text{interp}(\text{pspline}(\omega, \text{momMax}), \omega, \text{momMax}, \omega)$   
 $M_{Maxcsp} := \text{interp}(\text{cspline}(\omega, \text{momMax}), \omega, \text{momMax}, \omega)$



$$W_x := 184 \cdot 10^{-6} \quad \sigma_{max} := \frac{M_{Maxlin}}{W_x}$$

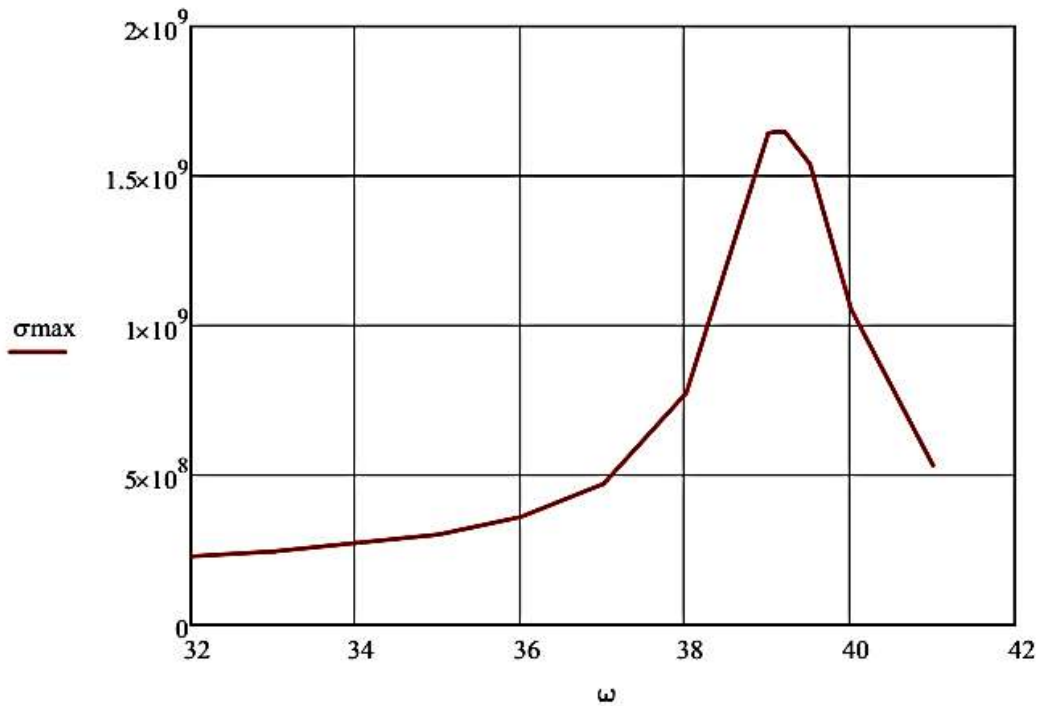


Рис. 8. Графики  $M_{max}(\omega)$  и  $\sigma_{max}(\omega)$  в окрестности второй резонансной частоты

Оценим теперь погрешность силового расчёта рам, в котором не учитываются (как и при расчёте балок) их горизонтальные колебания, неизбежно возникающие даже в случае отсутствия возмущающих сил горизонтального направления.

Для этого выполним, используя разработанную методику, расчёт рамы (рис. 9), изготовленной из двутавра 27 ( $J_x = 5010 \text{ см}^4$ ,  $W_x = 371 \text{ см}^3$ ), при следующих исходных данных:  $m = 2000 \text{ кг}$ ,  $n = 300 \text{ об/мин}$ ,  $H = 0,3mg = 5886 \text{ Н}$ ,  $\mu \approx 0$ . Расчёт такой рамы в одномерном варианте (т. е. с учетом только вертикальных колебаний) приведен в работе [10].

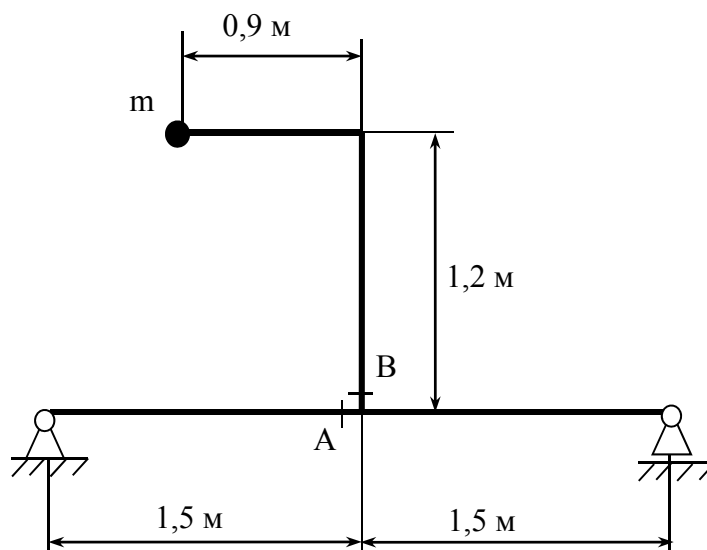


Рис. 9. Схема рамы

Сперва определим опорные реакции рамы от действия единичных сил  $P_1 = 1$  и  $P_2 = 1$  и построим соответствующие эпюры изгибающих моментов (рис. 10, 11). Используя эти эпюры, вычислим с помощью правила Верещагина значения  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{12}$  и  $\delta_{21}$ :

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1 = \frac{1,98}{E \cdot J_x} = \frac{1,98}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 1,976 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}}{\text{Н}},$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2 = \frac{0,936}{E \cdot J_x} = \frac{0,936}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 0,934 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}}{\text{Н}},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \frac{0,918}{E \cdot J_x} = \frac{0,918}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 0,916 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}}{\text{Н}}.$$

Поскольку  $\delta_{12} > 0$ , направление силы  $P_2 = 1$  выбрано правильно.

Теперь установим потенциально опасные сечения рамы и выражения для возникающих в них изгибающих моментов  $M(t)$ .

Из эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  следует, что наиболее нагруженными в процессе колебаний (т. е. опасными) могут стать сечения А или В (см. рис. 9), в которых изгибающие моменты  $M(t)$  связаны с силами  $P_1(t)$  и  $P_2(t)$  соответствующими зависимостями:

$$M(t) = P_1(t) \cdot 1,2 + P_2(t) \cdot 0,6; \tag{31}$$

$$M(t) = P_1(t) \cdot 0,9 + P_2(t) \cdot 1,2. \tag{32}$$

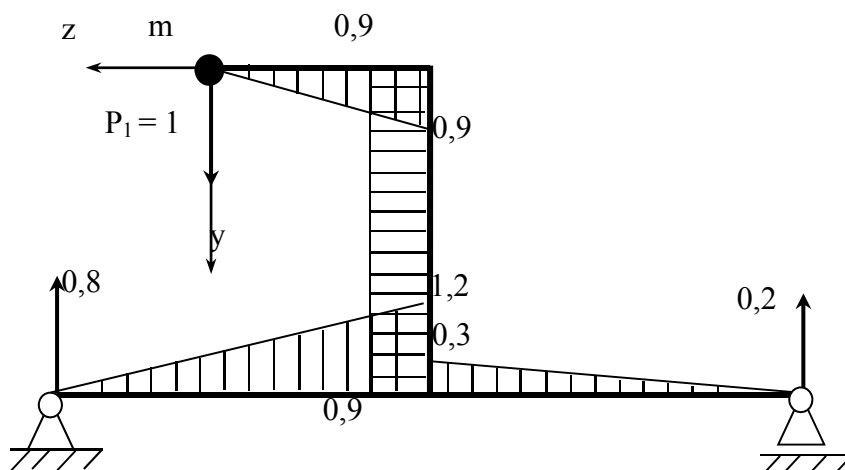


Рис. 10. Эпюра  $\bar{M}_1$ , м

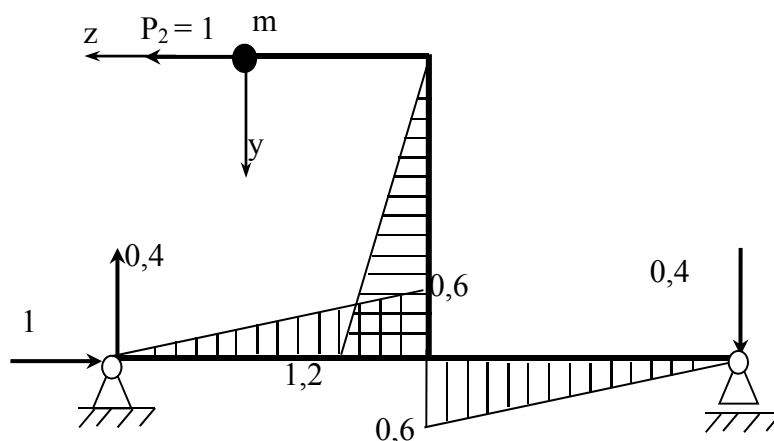


Рис. 11. Эпюра  $\bar{M}_2$ , м

Поскольку соотношения между  $P_1(t)$  и  $P_2(t)$  априори не известны, установить заранее наиболее нагруженное из означенных сечений невозможно. Поэтому расчёты проводились по каждому из них.

По сечению А, в котором изгибающий момент задавался зависимостью (31), получены следующие результаты:  $M_{\max} = 5,380 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $\sigma_{\max} = 145,011 \text{ МПа}$ ;  $\omega_1 = 44,643 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_2 = 111,636 \text{ с}^{-1}$ . В сечении В, где использовалась зависимость (32), результаты по  $M_{\max}$  и  $\sigma_{\max}$  оказались несколько ниже:  $M_{\max} = 5,120 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $\sigma_{\max} = 137,993 \text{ МПа}$ .

Таким образом, опасным оказалось сечение А, которое в процессе колебаний испытывает большие нагрузки.

Сравним теперь результаты проведенного расчёта с таковыми, опубликованными в работе [10] и учитывающими только вертикальные колебания. Они таковы:  $\sigma_{\max} = 94,84 \text{ МПа}$ ;  $\omega_{\text{рез}} = 50,25 \text{ с}^{-1}$ .

Как видно из сравнения, расчёт без учета горизонтальных колебаний сильно занижает значения возникающих в раме напряжений и даёт значительные искажения по резонансной частоте. Это делает его непригодным для серьёзного практического применения.

Реализованный расчёт рамы по сути является проверочным, при котором все параметры системы известны, а задача состоит в проверке условия прочности:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (33)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение для материала рамы.

Предлагаемая методика пригодна и для проектного расчёта, когда необходимо подобрать сечение стержней рамы, обеспечивающее выполнение условия прочности (33). Приведём пример такого расчёта.

Расчёт выполним применительно к уже задействованной схеме рамы (см. рис. 9) при таких исходных данных:  $m = 2000$  кг;  $n = 300$  об/мин ( $\omega = 31,4$  с<sup>-1</sup>);  $H = 0,3mg$ ;  $\mu \approx 0$ ;  $[\sigma] = 160$  МПа;  $M(t) = P_1(t) \cdot 1,2 + P_2(t) \cdot 0,6$ .

Сперва построим эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  (см. рис. 10, 11) и определим с их помощью перемещения рамы от действия единичных сил:  $\delta_{11} = \frac{1,98}{E \cdot J_x}$ ,  $\delta_{22} = \frac{0,936}{E \cdot J_x}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{0,918}{E \cdot J_x}$ .

После этого определим номер двутавра, обеспечивающий выполнение условия прочности (33) при отсутствии колебаний рамы:

$$W_x \geq \frac{M_{\text{ст}}^{\max}}{[\sigma]} = \frac{mg \cdot \bar{M}_1^{\max}}{[\sigma]} = \frac{2000 \cdot 9,81 \cdot 1,2}{160 \cdot 10^6} = 147,15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 147,15 \text{ см}^3.$$

Здесь  $M_{\text{ст}}^{\max}$  – максимальный изгибающий момент от статически приложенного к раме веса электродвигателя –  $mg$ ;

$\bar{M}_1^{\max}$  – максимальное значение изгибающего момента на эпюре  $\bar{M}_1$  (см. рис. 10).

Из таблицы сортамента [16] выбираем двутавр 18а, у которого  $W_x = 159$  см<sup>3</sup>,  $J_x = 1430$  см<sup>4</sup>, и рассчитываем для него значения перемещений от единичных сил:  $\delta_{11} = 6,923 \cdot 10^{-7}$  м/Н,  $\delta_{22} = 3,273 \cdot 10^{-7}$  м/Н,  $\delta_{12} = \delta_{21} = 3,210 \cdot 10^{-7}$  м/Н.

Выполнив расчет для этого двутавра, получаем:  $M_{\max} = 4,634$  Н·м;  $\sigma_{\max} = 291,447$  МПа;  $\omega_1 = 23,850$  с<sup>-1</sup>;  $\omega_2 = 59,645$  с<sup>-1</sup>.

Поскольку у двутавра 18а  $\sigma_{\max} > [\sigma]$ , переходим к следующему двутавру 20 и расчёт продолжаем. И так, пока не получим выполнение условия прочности (33).

Результаты такого расчёта представлены в табл. 2, из которой видно, что указанное условие выполняется только у двутавра 27.

В заключение отметим, что возможности разработанной методики не ограничиваются только означенными типами расчётных задач. Но для её развития необходимы дальнейшие исследования, нацеленные на углубление теоретических представлений о процессе и поиск более совершенных расчётных методов и средств.

Таблица 2

Результаты подбора сечения стержней рамы

Номер двутавра	$J_x, \text{ м}^4$	$M_{\max}, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$W_x, \text{ м}^3$	$\sigma_{\max}, \text{ МПа}$	Резонансные частоты, с <sup>-1</sup>	
					$\omega_1$	$\omega_2$
18а	$1430 \cdot 10^{-8}$	$4,634 \cdot 10^4$	$159 \cdot 10^{-6}$	291,447	23,850	59,645
20	$1840 \cdot 10^{-8}$	$6,971 \cdot 10^4$	$184 \cdot 10^{-6}$	378,852	27,053	67,657
20а	$2030 \cdot 10^{-8}$	$9,598 \cdot 10^4$	$203 \cdot 10^{-6}$	472,785	28,416	71,065
22	$2550 \cdot 10^{-8}$	$4,509 \cdot 10^5$	$232 \cdot 10^{-6}$	1943,540	31,848	79,648
22а	$2790 \cdot 10^{-8}$	$1,641 \cdot 10^5$	$254 \cdot 10^{-6}$	645,962	33,313	83,312
24	$3460 \cdot 10^{-8}$	$7,810 \cdot 10^4$	$289 \cdot 10^{-6}$	270,234	37,098	92,778
24а	$3800 \cdot 10^{-8}$	$6,816 \cdot 10^4$	$317 \cdot 10^{-6}$	215,029	38,878	97,229
27	$5010 \cdot 10^{-8}$	$5,380 \cdot 10^4$	$371 \cdot 10^{-6}$	145,011	44,643	111,636

## ВЫВОДЫ

Разработана новая, упрощённая методика силового расчёта плоских рам в условиях вынужденных колебаний, позволяющая вычислять величины максимальных нормальных напряжений, возникающих в рамах, и определять их резонансные частоты.

Методика реализована в среде Mathcad 15 и прошла масштабную апробацию при решении учебных задач как проверочного, так и проектного расчётов.

С помощью предложенной методики показана неприемлемость силовых расчетов рам, в которых не учитываются горизонтальные колебания. Такие расчёты существенно занижают величины напряжений, возникающих в рамах, и довольно грубы в определении их резонансных частот.

Выполненная разработка может быть полезна студентам и преподавателям ВУЗов, а также практическим специалистам, выполняющим силовые расчёты.

Дальнейшие исследования в направлении развития выполненной разработки представляются актуальными и имеющими определённый научный интерес. Их результаты будут способствовать углублению теоретических представлений о процессе колебаний рам и созданию более совершенных методов и средств их силовых расчётов.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковтун В. В. Опір матеріалів. Розрахункові роботи : навч. посіб. / В. В. Ковтун. – Львів : Афіша, 2002. – 280 с.
2. Ицкович Г. М. Сопротивление материалов : учеб. для сред. спец. учеб. заведений / Г. М. Ицкович. – М. : Высш. шк., 2001. – 368 с.
3. Дарков А. В. Сопротивление материалов : учеб. для техн. ВУЗов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 624 с.
4. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : підр. для техн. ВНЗ / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – К. : Вища шк., 2004. – 655 с.
5. Шевченко Ф. Л. Курс опору матеріалів. Порада до вивчення теорії та розв'язання задач : навч. посіб. / Ф. Л. Шевченко. – Донецьк : ДонНТУ, 2013. – 260 с.
6. Ламси Б. Б. Сборник задач и упражнений по динамике стержневых систем : учеб. пособ. / Б. Б. Ламси и др. – Н. Новгород : ННГАСУ, 2016. – 96 с.
7. Довнар Е. П. Расчет рам на статические и динамические нагрузки : учеб. пособ. / Е. П. Довнар, Л. Б. Климова. – Минск : БНТУ, 2004. – 186 с.
8. Поляков А. А. Строительная механика: учеб. пособ. / А. А. Поляков, Ф. Г. Лялина, Р. Г. Игнатов. – Екатеринбург : УрФУ, 2014. – 424 с.
9. Гайджуrow П. П. Расчет стержневых систем на устойчивость и колебания: учеб. пособ. / П. П. Гайджуrow. – Новочеркасск : ЮРГТУ, 2009. – 195 с.
10. Кутовий Л. В. Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу "Опір матеріалів" (для студентів всіх механічних спеціальностей денної форми навчання) / Л. В. Кутовий та ін. – Краматорськ ДДМА, 2007. – 220 с.
11. Кочетов В. Т. Сопротивление материалов : учеб. пособие / В. Т. Кочетов. – Ростов-на-Дону, Феникс, 2001. – 368 с.
12. Старцева Л. В. Строительная механика в примерах и задачах: учеб. пособ. / Л. В. Старцева, В. Г. Архипов, А. А. Семенов. – М. : Изд-во АСВ, 2013. – 224 с.
13. Холодняк Ю. С. Особенности прочностных расчетов стержневых конструкций, подверженных вынужденным колебаниям / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : зб. наук. праць. – Краматорськ : ДДМА, 2015. – № 1(34). – С. 96–102.
14. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15: учеб. курс / Е. Г. Макаров. – СПб. : Питер, 2011. – 400 с.
15. Макаров Е. Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad / Е. Г. Макаров. – СПб. : БХВ – Петербург, 2004. – 512 с.
16. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко и др. – К. : Наук. думка, 1988. – 704 с.