ВІСНИК ДОНБАСЬКОЇ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Будівлі та конструкції із застосуванням нових матеріалів та технологій
Випуск 2013-3(101)

УДК 514.18

А. И. БУМАГА
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

КОНСТРУИРОВАНИЕ ДУГИ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ПЯТЬ ТОЧЕК

В статье, на основе теоремы Паскаля, предложен геометрический алгоритм построения дуги кривой второго порядка, проходящей через пять точек. На основе геометрического алгоритма получено точечное уравнение дуги кривой второго порядка, которая проходит через пять точек.

симплекс, кривая второго порядка, геометрический алгоритм, БН-исчисление, теорема Паскаля

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Для геометрического моделирования процессов и явлений важно иметь дуги кривых, которые проходят через заданные точки. Кривые второго порядка эффективно используются для геометрического моделирования ввиду их простоты и предсказуемости формы. Из проективной геометрии известно, что кривая второго порядка однозначно определяется: пятью точками, пятью касательными или их комбинациями. Использование дуги кривой второго порядка, проходящей через пять точек, позволит получать адекватные геометрические модели процессов и явлений, состоящих из пяти и более частей.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Конструирование дуги кривой второго порядка, проходящей через пять точек рассмотрено в работе [1]. Однако в этой работе используется такой текущий параметр, который затрудняет практическое использование полученного уравнения дуги кривой второго порядка.

Для реализации предложенного геометрического алгоритма конструирования дуги кривой второго порядка, проходящей через пять точек, используем БН-исчисление [2–5].

ЦЕЛИ

Предложенное исследование ставит и решает задачу получения точечного уравнения дуги кривой второго порядка, которая проходит через пять точек.

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

Рассмотрим геометрический алгоритм конструирования дуги $AA_1A_2MA_3B$ кривой второго порядка (рис.). Точки A и B – начало и конец дуги кривой второго порядка, $A_1A_2A_3$ – точки, через которые проходит кривая второго порядка. В соответствии с теоремой Паскаля, соединяем противоположные стороны шестиугольника $AA_1A_2MA_3B$. Тогда точки P, Q и R образуют прямую Паскаля.

Для задания дуги кривой второго порядка, точки A_1, A_2, A_3 должны занимать особое положение относительно симплекса CAB (рис.):

$$A_1 = (A-C)p_1 + C, \; A_3 = (B-C)q_3 + C, \tag{1}$$

где $0 < p_1, q_3 < 1$.

При этом точка A_2 должна находиться внутри треугольника CA_1A_3. Для выполнения этого условия определим точку T_2 на прямой A_1A_3 с помощью параметра p_2:

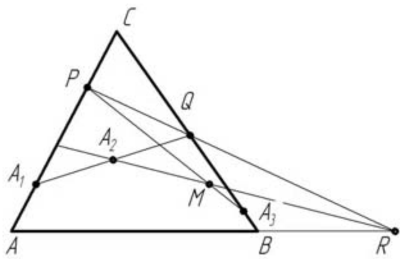

Рисунок – Геометрический алгоритм конструирования дуги кривой второго порядка.

$$T_2 = \left(A_3 - A_1\right) p_2 + A_1 = (A-C)\,p_1\bar{p}_2 + (B-C)\,p_2 q_3 + C. \tag{2}$$

Далее, определим точку A_2 с помощью параметра q_2:

$$A_2 = \left(T_2 - C\right) q_2 + C = (A-C)\,p_1\bar{p}_2 q_2 + (B-C)\,p_2 q_2 q_3 + C, \tag{3}$$

где $0 < p_1,\ p_2,\ q_2, q_3 < 1$.

Принимая в качестве текущего параметра отношение $t = \dfrac{AP}{AC}$, имеем:

$$P = \left(A-C\right)\bar{t} + C. \tag{4}$$

Определим точки Q как пересечение прямых A_1A_2 и BC. Точечное уравнение прямой A_1A_2 имеет вид:

$$Q = A_1\bar{u} + A_2 u = (A-C)\left[\,p_1\bar{u} + p_1\bar{p}_2 q_2 u\right] + (B-C)\,p_2 q_2 q_3 u + C. \tag{5}$$

Прямые A_1A_2 и BC пересекутся в точке Q при условии, что площадь треугольника BCQ равна нулю. В соответствии с s-теоремой БН-исчисления, имеем:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ p_1\bar{u} + p_1\bar{p}_2 q_2 u & p_2 q_2 q_3 u & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$u = \frac{1}{1-\bar{p}_2 q_2};\ \bar{u} = \frac{-\bar{p}_2 q_2}{1-\bar{p}_2 q_2}. \tag{6}$$

Подставив значение параметра u в уравнение (5), получим:

$$Q = (B-C)\frac{p_2 q_2 q_3}{1-\bar{p}_2 q_2} + C. \tag{7}$$

Аналогичным образом определим точку R как пересечение прямых AB и PQ.

$$R = P\bar{u} + Qu = \left(A-C\right)\bar{t}\bar{u} + (B-C)\frac{p_2 q_2 q_3}{1-\bar{p}_2 q_2}u + C. \tag{8}$$

В соответствии с s-теоремой БН-исчисления, имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \bar{t}\bar{u} & \dfrac{p_2 q_2 q_3}{1-\bar{p}_2 q_2}u & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$u = \frac{t\left(1-\bar{p}_2 q_2\right)}{p_2 q_2 q_3 - \bar{t}\left(1-\bar{p}_2 q_2\right)};\ \bar{u} = \frac{p_2 q_2 q_3 - \left(1-\bar{p}_2 q_2\right)}{p_2 q_2 q_3 - \bar{t}\left(1-\bar{p}_2 q_2\right)}. \tag{9}$$

Подставив значение параметра u в уравнение (8), получим:

$$R = \left(A-C\right)\frac{p_2 q_2 q_3 - \left(1-\bar{p}_2 q_2\right)}{p_2 q_2 q_3 - \bar{t}\left(1-\bar{p}_2 q_2\right)}\bar{t} + (B-C)\frac{p_2 q_2 q_3}{p_2 q_2 q_3 - \bar{t}\left(1-\bar{p}_2 q_2\right)}t + C. \tag{10}$$

Определим точку M как пересечение прямых RA_2 и PA_3.

$$M = R\bar{u} + A_2 u = (A-C)\left[\frac{p_2q_2q_3-(1-\bar{p}_2q_2)}{p_2q_2q_3-\bar{t}(1-\bar{p}_2q_2)}t\bar{u} + p_1\bar{p}_2q_2u\right] + \\ +(B-C)\left[\frac{p_2q_2q_3}{p_2q_2q_3-\bar{t}(1-\bar{p}_2q_2)}t\bar{u} + p_2q_2q_3u\right] + C. \quad (11)$$

В соответствии с s-теоремой БН-исчисления, имеем:

$$\begin{vmatrix} \frac{p_2q_2q_3-(1-\bar{p}_2q_2)}{p_2q_2q_3-\bar{t}(1-\bar{p}_2q_2)}t\bar{u} + p_1\bar{p}_2q_2u & \frac{p_2q_2q_3}{p_2q_2q_3-\bar{t}(1-\bar{p}_2q_2)}t\bar{u} + p_2q_2q_3u & 1 \\ \bar{t} & 0 & 1 \\ 0 & q_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$u = \frac{t\bar{t}(1-q_2)}{\left[p_2q_2t + p_2q_2q_3-(1-\bar{p}_2q_2)\right]\bar{t} - \left(p_2q_2\bar{t} + p_1\bar{p}_2q_2\right)\left(p_2q_2q_3-\bar{t}(1-\bar{p}_2q_2)\right)}; \quad (12)$$

$$\bar{u} = \frac{\left[p_2q_2q_3-\bar{t}(1-\bar{p}_2q_2)\right]\left(\bar{t}-p_2q_2(\bar{t}+\bar{p}_2)\right)}{\left[p_2q_2t + p_2q_2q_3-(1-\bar{p}_2q_2)\right]\bar{t} - p_2q_2(\bar{t}+\bar{p}_2)\left[p_2q_2q_3-\bar{t}(1-\bar{p}_2q_2)\right]}.$$

Подставив значение параметра u в уравнение (11), получим:

$$M = (A-C)\frac{\left(p_2q_2q_3-(1-\bar{p}_2q_2)\right)\left(\bar{t}-p_2q_2(\bar{t}+\bar{p}_2)\right)\bar{t} + p_1\bar{p}_2q_2(q_2-1)t\bar{t}}{\left[p_2q_2t + p_2q_2q_3-(1-\bar{p}_2q_2)\right]\bar{t} - p_2q_2(\bar{t}+\bar{p}_2)\left[p_2q_2q_3-\bar{t}(1-\bar{p}_2q_2)\right]} + \\ +(B-C)\frac{p_2\bar{p}_2q_2^2q_3t(\bar{t}-p_2)}{\left[p_2q_2t + p_2q_2q_3-(1-\bar{p}_2q_2)\right]\bar{t} - p_2q_2(\bar{t}+\bar{p}_2)\left[p_2q_2q_3-\bar{t}(1-\bar{p}_2q_2)\right]} + C. \quad (13)$$

ВЫВОДЫ

Получено точечное уравнение дуги кривой второго порядка, проходящей через пять точек, которое позволяет получать адекватные геометрические модели процессов и явлений, состоящие из пяти и более точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давыденко, И. П. Конструирование поверхностей пространственных форм методом подвижного симплекса [Текст] : диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук : 05.01.01 / Давыденко Иван Петрович. – Макеевка : ДонНАСА, 2012. – 186 с.
2. Верещага, В. М. Алгебра БН-исчисления [Текст] / И. Г. Балюба, В. М. Верещага, В. М. Найдыш // Прикладна геометрія та інженерна графіка : Міжвідомчий науково-технічний збірник. – К. : КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 210–215.
3. Точечное исчисление – математический аппарат параллельных вычислений для решения задач математического и компьютерного моделирования геометрических форм [Текст] / И. Г. Балюба, В. И. Полищук, Б. Ф. Горягин, Т. П. Малютина // Материалы Международной научной конференции «Моделирование – 2008», 14–16 мая 2008 р., г. Киев, Том 2 / Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. – Киев : Институт проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины, 2008. – С. 389–394.
4. Балюба І. Г. Основи математичного апарату точкового числення [Текст] / І. Г. Балюба, В. І. Поліщук, Т. П. Малютіна // Прикладна геометрія та інженерна графіка : Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь : ТДАТА, 2005. – Т. 29, Вип. 4. – С. 22–30.
5. Точечное исчисление геометрических форм и его место в ряду других существующих исчислений [Текст] / И. Г. Балюба, Т. П. Малютина, Е. В. Конопацкий [и другие] // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво : Науковий журнал. – Луцьк : ЛНТУ, 2011. – № 6. – С. 24–29.

Получено 01.03.2013

А. І. БУМАГА
КОНСТРУЮВАННЯ ДУГИ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ П'ЯТЬ ТОЧОК
Донбаська національна академія будівництва і архітектури

В статті, на основі теореми Паскаля, запропоновано геометричний алгоритм побудови дуги кривої другого порядку, яка проходить через п'ять точок. На основі геометричного алгоритму отримано точкове рівняння дуги кривої другого порядку, яка проходить через п'ять точок.
симплекс, крива другого порядку, геометричний алгоритм, БН-числення, теорема Паскаля

ALLA BUMAGA
DESIGNING OF THE ARC OF CURVE OF THE SECOND ORDER PASSING THROUGH FIVE POINTS
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture

The article, based on Pascal's theorem, the geometric algorithm of construction of the arc of curve the second order, passing through five points has been suggested. The point equation of the arc of the second order, which passes through the five points has been taken out on the basis of the geometric algorithm.
simplex, curve of the second order, the geometric algorithm, BN-calculation, Pascal's theorem